

The Quantum Theory of Fields

Volume I Foundations

Steven Weinberg (著)
University of Texas at Austin

张驰 (译)

Cambridge University Press

目 录

	记 号	iii
1	历史介绍	1
1.1	相对论波动力学	2
1.2	量子场论的诞生	10
1.3	无限大的问题	21
	参考文献	25
2	相对论量子力学	31
2.1	量子力学	31
2.2	对称性	32
2.3	量子Lorentz变换	35
2.4	Poincaré代数	38
2.5	单粒子态	41
2.6	空间反演和时间反演	50
2.7	投影表示	56
A	对称表示定理	62
B	群算符和同伦类	66
C	反演和简并积	69
	参考文献	72
3	散射理论	75
3.1	“入”态和“出”态	75
3.2	S-矩阵	79
3.3	S-矩阵的对称性	81
3.4	速率与截面	93
3.5	微扰论	99
3.6	么正性的应用	103

3.7	分波展开	106
3.8	共振	111
	参考文献	115
4	集团分解原理	119
4.1	玻色子与费米子	119
4.2	产生和湮灭算符	121
4.3	集团分解和连接振幅	125
4.4	相互作用的结构	128
	参考文献	132
5	量子场与反粒子	133
5.1	自由场	133
5.2	因果标量场	140
5.3	因果矢量场	145
5.4	Dirac形式体系	150
5.5	因果Dirac场	154
5.6	齐次Lorentz群的一般不可约表示	161
5.7	一般因果场	164
5.8	CPT定理	173
5.9	无质量粒子场	174
	参考文献	181
6	Feynman规则	183
6.1	规则推导	183
6.2	传播子的计算	193
6.3	动量空间规则	198
6.4	质量壳之外	203
	参考文献	205
7	正则形式体系	207
7.1	正则变量	207
7.2	拉格朗日形式体系	212
7.3	整体对称性	218

7.4	Lorentz不变性	223
7.5	过渡到相互作用绘景: 例子	226
7.6	约束与Dirac括号	232
7.7	场重定义与冗余耦合	236
	从正则对易子到Dirac括号	237
	参考文献	240
8	电动力学	243
8.1	规范对称性	243
8.2	约束与规范条件	246
8.3	Coulomb规范中的量子化	248
8.4	相互作用绘景中的电动力学	251
8.5	光子传播子	253
8.6	旋量电动力学的Feynman规则	255
8.7	Compton散射	259
8.8	推广: p -形式规范场	265
	迹	267
	参考文献	269
9	路径积分方法	271
9.1	普遍的路径积分公式	272
9.2	过渡到 S -矩阵	277
9.3	路径积分公式的拉格朗日版本	280
9.4	Feynman规则的路径积分推导	284
9.5	费米子的路径积分	287
9.6	量子电动力学的路径积分公式	298
9.7	各种统计	302
	高斯多重积分	304
	参考文献	306
10	非微扰方法	309
10.1	对称性	309
10.2	定极学	312

10.3	场重整化和质量重整化	317
10.4	重整化荷与Ward等式	322
10.5	规范不变性	325
10.6	电磁形状因子与磁矩	328
10.7	Källén-Lehmann表示	333
10.8	色散关系	336
	参考文献	341
11	量子电动力学中的一圈辐射修正	343
11.1	抵消项	343
11.2	真空极化	344
11.3	反常磁矩与荷半径	352
11.4	电子自能	359
	各种积分	361
	参考文献	362
12	重整化的一般理论	363
12.1	发散度	363
12.2	发散的抵消	367
12.3	可重整性必要吗?	374
12.4	浮动截断	379
12.5	偶然对称性	382
	参考文献	384
13	红外效应	387
13.1	软光子振幅	387
13.2	虚软光子	391
13.3	实软光子; 发散的抵消	394
13.4	一般的红外发散	397
13.5	软光子散射	400
13.6	外场近似	402
	参考文献	406

14	外场中的束缚态	409
14.1	Dirac方程	409
14.2	外场中的辐射修正	415
14.3	轻原子中的Lamb位移	419
	参考文献	431

记号

拉丁指标 i, j, k 等一般取遍三维空间坐标指标，通常取做 1, 2, 3.

希腊指标 μ, ν 等一般取遍四维时空坐标指标 1, 2, 3, 0，其中 x^0 是时间坐标。

重复指标一般表示求和，除非另有说明。

时空度规 $\eta_{\mu\nu}$ 是对角的，其对角元为 $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{00} = -1$ 。

达朗贝尔算符定义为 $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2 / \partial t^2$ ，其中 ∇^2 是拉普拉斯算符 $\partial^2 / \partial x^i \partial x^i$ 。

列维-奇维塔张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 定义为全反对称量，并有 $\epsilon^{0123} = +1$ 。

空间三矢由黑体字母标记。

任意矢量上的“帽子”代表相应的单位矢量：因此 $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v} / |\mathbf{v}|$ 。

任意量上加一点代表该量对时间的导数。

狄拉克矩阵 γ_μ 的定义满足 $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ 。并且 $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ ， $\beta = i\gamma^0$ 。

阶跃函数 $\theta(s)$ ：当 $s > 0$ 时为 1, $s < 0$ 时为 0。

矩阵或矢量 \mathbf{A} 的复共轭、转置、厄米共轭分别记为 \mathbf{A}^* 、 \mathbf{A}^T 以及 $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{*T}$ 。算符 O 的厄米共轭记为 O^\dagger ，除了强调一个算符的矩阵或矢量是非转置的才用星号。在方程末尾的 +H.c. 或 c.c. 表示前面几项的厄米共轭或复共轭。狄拉克旋量 u 上加横线定义为 $\bar{u} = u^\dagger \beta$ 。

除了第一章，我们取 \hbar 和 c 为单位 1。这样 $-e$ 是电子的电荷，精细结构常数是 $\alpha = e^2 / 4\pi \simeq 1/137$ 。

第 1 章 历史介绍

沉湎在现代物理之中使我们很难体会到短短几年前物理学家的艰难,也很难从他们的经验中获益.同时,关于历史的知识对于我们而言是喜忧参半的,它阻碍了以逻辑重建物理理论的道路,而这条道路似乎也一直是必要的.

在本书中,我尝试以逻辑的方式展现量子场论,强调从狭义相对论和量子力学的物理原理所出发的演绎道路.这种方法必然使我远离事实发展的真实次序.举一个例子,历史上,量子场论部分衍生于对相对论波动方程的研究,这包括Maxwell方程, Klein-Gordon方程以及Dirac方程.由于这些原因,量子场论相关的教程和专著首先介绍这些波动方程并给予它们相当大的篇幅是十分自然的.然而,长久以来,于我而言, Wigner将粒子定义为非齐次Lorentz群的表示是一个更好的出发点,尽管这个工作直到1939年才发表,并且在之后的很多年里没有很大的影响.在这本书里,我们从粒子出发,然后才是波动方程.

这并不意味着粒子肯定比场更基本.在1950年之后的很多年,大家广泛地承认自然法则采取量子场论的形式.在本书中,我从粒子出发,并不是因为它们更基本,而是因为从相对论和量子力学原理出发可以更确定、更直接地推出我们所了解的粒子.如果发现一些量子场论无法描述的物理系统,这将是一个轰动;如果发现不服从量子力学和相对论法则的系统,这将是一场灾难.

事实上,稍后便有了反对将量子场论作为基础的观点.基础理论可能不是场或粒子的理论,而是一些完全不同的东西,比如弦.这种观点认为:我们引以为傲的量子电动力学和其它量子场论仅仅是“有效场论”,是更基础理论的低能近似.我们的场论如此的成功并不是因为它们和基本真理,而是在足够低的能量状况下,将相对论性量子理论用于粒子使得任何相对论量子理论看起来都像场论.在此基础上,如果我们想知道为什么量子场论是它们所呈现的形式,就不得不从粒子出发.

然而我们不想以完全忘掉过去为代价.因此本章将呈现早期到1949年的量子场论历史,直到那时它的现代形式才最终被接受.在本书的其余部分,我将会尽力避免历史介入物理.

在本章的撰写过程中,我发现一个问题:从一开始,量子场论的历史与量子力学本身的历史就不可避免地纠缠在一起.因此,熟悉量子力学历史的读者可能会发现一些早已知晓的素材,尤其在第一节,在这一节我讨论了将狭义相对论和量子力学融合在一起的早期尝试.在这种情况下,我仅能建议读者应该跳到那些不太熟悉的部分.

另一方面,那些没有接触过量子场论的读者会发现本章的部分内容过于简洁以至于无法完全理解.我请这样的读者不要担心.本章并不是作为量子场论一个自足的简介,也不是本书其余部分的基础.一些读者甚至可能更倾向从下一章开始,之后再回到历史.然而,对于大多数读者,量子场论的历史应该作为量子场论本身一个很好的导论.

我想补充一点:本章并不是作为历史研究的原始工作而准备的.它是基于真正历史学家的书和文章,再加上一些我读过的历史综述和物理原始论文.它们中的大多数列于本章最后的附录和参考文献中.建议想要在这些历史资料中深入下去的读者去参考所列文献.

关于记号的说明. 为了保留过去的一些偏好, 在本章, 我将会写出因子 \hbar 和 c (甚至 h), 但是为了便于与现代物理文献进行比较, 我将会使用电荷更加现代合理的静电单位制, 使得精细结构常数 $\alpha \simeq 1/137$ 为 $e^2/4\pi\hbar c$. 之后的章节我将几乎全部使用“自然”单位制, 简单地令 $\hbar = c = 1$.

1.1 相对论波动力学

波动力学源于相对论波动力学. 事实上, 正如我们将看到的, 波动力学的建立者, Louis de Broglie(路易·德布罗意)和Erwin Schrödinger(埃尔温·薛定谔), 从狭义相对论中获得了大量的灵感. 但那之后不久, 人们普遍认识到, 就作为粒子数固定的相对论量子理论的意义而言, 相对论波动力学是不可能的. 因此, 尽管相对论波动力学取得了大量的成功, 却最终让位于量子场论. 然而, 相对论波动力学作为量子场论形式体系中的重要元素而存留下来, 并向场论提出了挑战, 再现了它的成功.

物质粒子可以像光一样以波的形式描述, 这种可能性是Louis de Broglie在1923年首先提出的.¹ 除了与辐射类比, 主要的线索是Lorentz不变: 如果粒子可以描述为相位的形式在位置 \mathbf{x} 和时间 t 处为 $2\pi(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \nu t)$ 的波, 并且, 如果这个相位是Lorentz不变的, 那么矢量 $\boldsymbol{\kappa}$ 和频率 ν 必须像 \mathbf{x} 和 t 那样变换, 因而类似于 \mathbf{p} 和 E . 为此, $\boldsymbol{\kappa}$ 与 ν 必须有和 \mathbf{p} 与 E 相同的速度关系, 因而必须正比于它们, 并保持比例常数不变. 对于光子, 已有了Einstein关系 $E = h\nu$, 因而, 很自然的可以假定, 对于实物粒子,

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{p}/h, \quad \nu = E/h, \quad (1.1.1)$$

正好与光子相同. 那么, 波的群速度 $\partial\nu/\partial\boldsymbol{\kappa}$ 等于粒子速度, 所以波包与它们所代表的粒子同步.

通过假定任意闭合轨道是粒子波长 $\lambda = 1/|\boldsymbol{\kappa}|$ 的整数倍, de Broglie可以导出Niels Bohr(尼尔森·波尔)和Arnold Sommerfeld(阿诺德·索末菲)的旧量子化条件, 这一条件虽然相当神秘, 但用来解释原子光谱中却十分有效. 另外, de Broglie和Walter Elsasser(沃尔特·埃尔萨瑟)²认为de Broglie的波动理论可以通过寻找电子在晶体上的干涉效应来检验; 数年后, 这种效应被Clinton Joseph Davisson(克林顿·约瑟夫·戴维森)和Lester H. Germer(莱斯特·革默)³发现. 然而, 对于非自由粒子, 例如处在普通库仑场中的电子, 该如何对de Broglie关系(1.1.1)进行修正依旧是不清楚的.

在量子力学的历史中, 波动力学成为下一步发展的支路之一, 另一支路是, Werner Heisenberg(沃纳·海森堡), Max Born(马克斯·玻恩), Pascual Jordan(帕斯夸尔·约当)和Wolfgang Pauli(沃尔夫冈·泡利)在1925-1926年所发展的矩阵力学.⁴ 至少, 矩阵力学的部分灵感是坚持这个理论应该仅包含可观察量, 例如能级、发射和吸收速率. Heisenberg在他1925年的论文里以这样的宣言开头: “本篇论文尝试去建立理论量子力学的基础, 这种基础原则上完全只建立在可观测物理量之间的关系上.” 尽管现代量子场论已经远离这种想法了, 这种实证主义将在量子场论的历史上多次出现, 例如, John Wheeler(约翰·惠勒)和Heisenberg引入的 S -矩阵(见第3章)以及20世纪50年代色散理论的复兴(见第10章). 在这里叙述矩阵力学的任何细节都将使我们远离主题

正如大家所知道的那样, Erwin Schrödinger再次发展了波动力学. 在他1926年的一系列论文⁵中, 著名的非相对论波动方程第一次出现, 然后被用来重现矩阵力学所导出的结果. 之后不久, 在第四篇论文的第六节就给出了一个相对论波动方程. 而按照Dirac的说法,⁶ 历史是完全不同的: Schrödinger首先导出了相对论性方程, 却由于它给出错误的氢原子精细结构而沮丧, 数月之后, 他就意识到他的相对论方程的非相对论近似是很有价值的, 哪怕相对论性方程是错误的! 正当Schrödinger准备去发表他的相对论波动方程时, Oskar Klein(奥斯卡·克莱

因)⁷和Walter Gordon(沃尔特·戈登)⁸再次独立的发现了这个方程, 由于这个原因这个方程通常称为“Klein-Gordon方程”。

要导出Schrödinger的相对论波动方程首先要注意到, 对于处在矢势为 \mathbf{A} 和库仑势为 ϕ 的外场中, 质量为 m , 电荷为 e 的“Lorentz电子”, 哈密顿量 H 和动量 \mathbf{p} 存在如下关系*

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4. \quad (1.1.2)$$

对于一个由平面波 $\exp\{2\pi i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \nu t)\}$ 描述的自由粒子, de Broglie关系(1.1.1)可以通过如下的代换获得:

$$\mathbf{p} = h\boldsymbol{\kappa} \rightarrow -i\hbar\nabla, \quad E = h\nu \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.1.3)$$

其中 \hbar 是 $h/2\pi$ 的简记(由Dirac引入). 通过一个显然的形式类比, Schrödinger猜测, 在外场 \mathbf{A}, ϕ 中的电子可以由波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 描述, 这个波函数所满足的方程可以通过在(1.1.2)中做相同的替换获得:

$$0 = \left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right)^2 - c^2 \left(-i\hbar\nabla + e\frac{\mathbf{A}}{c} \right)^2 - m^2c^4 \right] \psi(\mathbf{x}, t). \quad (1.1.4)$$

特别地, 对于氢原子的定态, 我们有 $\mathbf{A} = 0$ 以及 $\phi = e/4\pi r$, 并且 ψ 有时间相关因子 $\exp(-iEt/\hbar)$, 所以(1.1.4)变成

$$0 = \left[\left(E + \frac{e^2}{4\pi r} \right)^2 + c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4 \right] \psi(\mathbf{x}). \quad (1.1.5)$$

满足合理边界条件的解可以在如下能量值得到⁹

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (1.1.6)$$

其中 $\alpha \equiv e^2/4\pi\hbar c$ 是“精细结构常数”, 约为 $1/137$; n 是正整数, ℓ 是以 \hbar 为单位的轨道角动量, 为一整数, 并满足 $0 \leq \ell \leq n - 1$. α^2 项与氢原子光谱的总体特征非常一致(莱曼系, 巴尔末系等), 并且, 据Dirac所说,⁶正是这种一致性引导Schrödinger最终去发展他的非相对论波动方程. 另一方面, α^4 项所给出的精细结构与Friedrich Paschen(弗里德里希·帕邢)当时已得到的精确测量结果却并不一致.¹⁰

比较Arnold Sommerfeld(阿诺德·索末菲)^{10a}与Schrödinger的结果是有意义的, Sommerfeld的结果是通过旧量子论获得的:

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (1.1.7)$$

其中 m 是电子质量. 这里的 k 是介于1和 n 之间的整数, 在Sommerfeld的理论中则是以轨道角动量 $\ell\hbar$ 的形式给定: $k = \ell + 1$. 这给出了与实验吻合的精细结构分裂: 例如, 对于 $n = 2$, 方程(1.1.7)给出了两个能级($k = 1$ 和 $k = 2$), 它们的差正是观测到的能级分裂 $\alpha^4 mc^2/32$, 即 $4.53 \times 10^{-5} \text{eV}$. 然而, Schrödinger的结果(1.1.6)给出的 $n = 2$ 的精细结构分裂是 $\alpha^4 mc^2/12$, 远大于实验值.

Schrödinger正确地意识到这个差异的根源正是他对电子自旋的忽略. 碱原子中非平方反比的电场以及弱的外磁场所造成的原子能级分裂(所谓的反常Zeeman效应)揭示出态的多重

*它们是Lorentz不变的, 这是因为 \mathbf{A} 和 ϕ 与 $c\mathbf{p}$ 和 E 有着相同的Lorentz变换性质. Schrödinger实际上将 H 和 \mathbf{p} 写成了作用量函数的偏导数形式, 但这并不与我们现在的讨论有很大差异.

性远超于Bohr-Sommerfeld理论所给出的数目；这导致了1925年George Uhlenbeck(乔治·乌伦贝)和Samuel Goudsmit(塞缪尔·古兹密特)¹¹提出电子有一个内禀角动量 $\hbar/2$ 。另外，Zeeman分裂¹²的大小允许他们进一步估计出：电子存在磁矩

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (1.1.8)$$

电子自旋应该与它的轨道角动量耦合是十分显然的，所以不能指望Schrödinger的相对论波动方程给出正确的精细结构分裂。

确实，在1927年，数位学者¹³就已经可以证明自旋-轨道耦合能够解释Schrödinger的结果(1.1.6)与实验的差异。这里其实有两个效应：一个是电子磁矩(1.1.8)与它在原子的静电场中运动时所感受到的磁场的直接耦合；另一个是由于自旋电子的圆周运动所引起的相对论“Thomas进动”¹⁴(即使没有磁矩)。这两个效应使得总角动量 $j = \ell + \frac{1}{2}$ 的能级被提高到Sommerfeld所给出的 $k = \ell + 1 = j + \frac{1}{2}$ 的能级(1.1.7)，而 $j = \ell - \frac{1}{2}$ 的能级则降至Sommerfeld所给出的 $k = \ell = j + \frac{1}{2}$ 的能级。因此，能级仅依赖于 n 和 j ，而不另外依赖于 ℓ ：

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]. \quad (1.1.9)$$

Sommerfeld的理论恰好给出氢原子能级分裂的大小($j + \frac{1}{2}$ 像 k 一样取遍从1到 n 的所有的正整数)，哪怕对于不同能级，轨道角动量值 ℓ 的指定是错误的。另外，在氢原子中，精细结构能级的简并度现在是可以预测的，对于 $j = \frac{1}{2}$ ，简并度为2，对于 $j > \frac{1}{2}$ ，简并度则是 $2(2j + 1)$ (相对应的 ℓ 取值为 $j \pm \frac{1}{2}$)，这与实验吻合。

这些理论尽管如此成功，但这并非是一个从开始就包含电子自旋的彻底的相对论理论。那样的理论直到1928年才被Paul Dirac(保罗·狄拉克)发现。然而，他开始时并没简单地做电子自旋的相对论理论；相反，他解决这一问题的方法是提出一问题，该问题今天看起来依旧十分奇怪。在他1928年论文¹⁵的开头，他问“自然为什么要为电子选择这个特殊的模型，而不满足于用点电荷模型来代替。”直到今天，这个问题就像问为什么细菌只有一个细胞一样：拥有 $\hbar/2$ 自旋是定义粒子为电子而不是现今已知的拥有各种自旋的众多其它粒子的性质之一。然而，在1928年，大家相信所有的物质可能是由电子以及某些在原子核中带正电的类似物质组成。因此，在它被提出的时代思潮中，Dirac问题可以重述为：“为什么物质的基本组成部分不得不有自旋 $\hbar/2$ ？”

对于Dirac，问题的关键是几率必须是正的这一要求。已知¹⁶非相对论Schrödinger方程的几率密度是 $|\psi|^2$ ，并且它满足如下形式的连续性方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} (|\psi|^2) - \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

所以对 $|\psi|^2$ 的空间积分，其结果是与时间无关的。另一方面，唯一的几率密度 ρ 和几率流 \mathbf{J} ，可以由相对论Schrödinger方程的解构成，并满足守恒律，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.1.10)$$

其有如下的形式：

$$\rho = N \operatorname{Im} \psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie\phi}{\hbar} \right) \psi, \quad (1.1.11)$$

$$\mathbf{J} = Nc^2 \operatorname{Im} \psi^* \left(\nabla + \frac{ie\mathbf{A}}{\hbar} \right) \psi, \quad (1.1.12)$$

其中 N 是一任意常数. 把 ρ 定义成几率密度是不可能的, 因为(无论有没有外场势 ϕ) ρ 没有确定的符号. 这里引述Dirac关于这个问题的回忆:¹⁷

我记得当我在哥本哈根时, 有一次Bohr问我正在研究什么, 我告诉他我在尝试得到一个令人满意的电子的相对论理论, 玻尔说“但是Klein和Gordon已经完成了它!” 这个答案起初对我的触动非常大. Bohr似乎对Klein的解非常满意, 但是我因为它所导致的负概率而对它并不是很满意. 我只好继续研究, 对得到一个只含有正概率的理论而烦恼不已.

根据George Gamow(乔治·伽莫夫)回忆, 在1928年的一个晚上, Dirac在凝视剑桥大学圣约翰学院里的一个壁炉时发现了这个问题答案. 他意识到Klein-Gordon方程(或者相对论Schrödinger方程)可以给出负概率的原因是因为守恒方程(1.1.10)中的 ρ 包含一个波函数对时间的偏导数. 反过来, 这是因为波函数满足的微分方程对于时间是二阶的. 于是问题变成了用另一个对时间是一阶的方程替换现在的波动方程, 例如非相对论Schrödinger方程.

假定电子自旋波函数是一个多分量的量 $\psi_n(x)$, 其满足如下形式的波动方程,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H} \psi, \quad (1.1.13)$$

其中 \mathcal{H} 是空间导数的某个矩阵函数. 由于这个方程对时间的导数是一阶的, 为了使所得到的理论有可能是Lorentz不变, 我们必须假定其对空间也是一阶的, 这使得 \mathcal{H} 采取如下的形式:

$$\mathcal{H} = -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \alpha_4 m c^2, \quad (1.1.14)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4 是常矩阵. 从(1.1.13)我们可以导出二阶方程

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \mathcal{H}^2 \psi = -\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= -i\hbar m c^3 (\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + m^2 c^4 \alpha_4^2 \psi \end{aligned}$$

(这里使用了求和简记; 在这里, i 和 j 取遍值1, 2, 3或 x, y, z .)但是这必须与相对论Schrödinger方程(1.1.4)的自由场形式一致, 这个形式恰好表达了相对论的能量关系. 因此, 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 α_4 必须满足如下的关系

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} 1, \quad (1.1.15)$$

$$\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i = 0, \quad (1.1.16)$$

$$\alpha_4^2 = 1, \quad (1.1.17)$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克符号($i = j$, 值为1; $i \neq j$, 值为0), 1是单位阵. Dirac找到一组满足这些关系

的 4×4 矩阵

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

为了证明这个公式是Lorentz不变的, Dirac给这个方程左乘 α_4 , 使得它可以采取这样的形式

$$\left[\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2 \right] \psi = 0, \quad (1.1.19)$$

其中

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv -i\alpha_4 \boldsymbol{\alpha}, \quad \gamma^0 \equiv -i\alpha_4. \quad (1.1.20)$$

(希腊指标 μ, ν 等取遍值1,2,3,0, 其中 $x^0 = ct$. Dirac使用了 $x_4 = ict$, 相应地, $\gamma_4 = \alpha_4$.) 矩阵 γ_μ 满足反对易关系

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} +1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ -1, & \mu = \nu = 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}. \quad (1.1.21)$$

Dirac注意到这些反对易关系是Lorentz不变的, 即矩阵 $\Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$, 其中 Λ_ν^μ 是任意的Lorentz变换, 他得到这样的结论 $\Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$ 必须通过一个相似变换与 γ^μ 相关:

$$\Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda).$$

这说明在Lorentz变换 $x^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu x^\nu$ 的同时, 如果波函数经历一个矩阵变换 $\psi \rightarrow S(\Lambda)\psi$, 那么波动方程保持不变. (这些事情将在第5章从一个相当不同的角度进行更加全面的讨论.)

为了研究电子在任意外电磁场下的行为, Dirac沿用了方程(1.1.4)中做代换的“通用步骤”

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \quad -i\hbar \nabla \rightarrow -i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (1.1.22)$$

那么, 波动方程(1.1.13)就会变成这样的形式

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) \psi = (-i\hbar c \nabla + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \psi + mc^2 \alpha_4 \psi. \quad (1.1.23)$$

Dirac利用这个方程证明了在中心力场, 角动量守恒采取这样的形式

$$[\mathcal{H}, -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla + \hbar \boldsymbol{\sigma} / 2] = 0, \quad (1.1.24)$$

其中, \mathcal{H} 是矩阵微分算符(1.1.14), $\boldsymbol{\sigma}$ 是由Pauli引入的自旋矩阵的 4×4 版本¹⁹

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.1.25)$$

既然 σ 的每个分量都有本征值 ± 1 , (1.1.24)中额外项的出现说明电子有内禀角动量 $\hbar/2$.

Dirac又对方程(1.1.23)进行迭代, 获得一个二阶方程, 这个方程除了在右边出现了如下额外的两项, 正好与Klein-Gordon方程有相同的形式

$$[-e\hbar c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - ie\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}] \psi. \quad (1.1.26)$$

对于低速运动的电子, 第一项占主导地位且代表了磁矩, 这个磁矩的值与Goudsmit和Uhlenbeck¹¹所发现的(1.1.8)相符. 正如Dirac所意识到的, 磁矩与这个理论的相对论性质, 保证了这个理论将会给出精细结构分裂($\alpha^4 mc^2$ 阶), 这个结果同Heisenberg, Jordan和Charles G. Darwin(查尔斯·G·达尔文)¹³的发现相符. 稍后不久, Dirac理论中氢原子能级的一个“精确”公式由Darwin²⁰和Gordon²¹导出

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\left\{ n - j - \frac{1}{2} + \left[(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2} \right)^{-1/2}. \quad (1.1.27)$$

在 α^2 的级数展开式中, 前三项与近似结果(1.1.9)相符.

这个理论达到了狄拉克的初始目的: 带有正概率的相对论公式. 由(1.1.13)我们可以导出连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.1.28)$$

其中

$$\rho = |\psi|^2, \quad \mathbf{J} = c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi, \quad (1.1.29)$$

这样, 正值 $|\psi|^2$ 可以解释为几率振幅, 总几率为 $\int |\psi|^2 d^3x$. 然而, 出现了另一个Dirac没有立即解决的困难.

对于给定动量 \mathbf{p} , 波动方程(1.1.13)给出了四个平面波解

$$\psi \propto \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et) \right]. \quad (1.1.30)$$

两个解给出能量 $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$, 对应电子的两个自旋态 $J_z = \pm \hbar/2$. 另外两个给出 $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$, 没有明显的物理解释. 正如狄拉克指出, 这一问题相对论Schrödinger方程也遇到过: 对于每一动量 \mathbf{p} , 存在两个如同(1.1.30)形式的解, 一个对应正 E , 另一个对应负 E .

当然, 即使在经典物理中, 相对论关系 $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ 有两个解, $E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$. 然而, 在经典物理中, 我们可以简单地假定物理粒子是那些能量为正 E 的. 这是因为正解有 $E > mc^2$ 而负值给出 $E < -mc^2$, 它们之间有一个有限宽度隙, 并且没有连续的步骤使得粒子从正能量到达负能量.

负能量的问题在相对论量子力学中更加麻烦. 正如Dirac在他1928年的论文¹⁵中指出的那样, 电子与辐射的相互作用可以产生跃迁, 在这个跃迁中, 电子从正能态落到负能态, 并通过两个或更多的光子带出能量. 那么之后为什么物质稳定了?

在1930年, Dirac给出了一个卓越的解决方法.²² Dirac的方案基于不相容原理, 在这里简要陈述这个原理的历史.

元素周期表和X射线光谱学分类法, 在1924年共同揭示出了原子能级的一个电子排布模型.²³ 壳层内电子的最大数目 N_n 由主量子数表征, N_n 由轨道量子态数目的二倍给定,

$$N_n = 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = 2n^2 = 2, 8, 18, \dots \quad (1.1.31)$$

在1925年, Wolfgang Pauli(沃尔夫冈·泡利)²⁴提出如果 N_n 是第 n 个壳层内所有可能的态的总数, 并且, 如果有一些奇怪的“不相容原理”禁止了多个电子占据同一态, 这个模型可以被解释. 他认为(1.1.31)中奇怪的因子2是缘于电子态的“奇怪的, 经典不可描述的二重性”, 正如我们之后所了解到的, 这正是电子的自旋.¹¹ 不相容原理回答了Bohr和Sommerfeld的旧原子论中一直灰暗的一个问题: 为什么在重核里不是所有的电子都掉到了最低能级的壳层内? 随后, 泡利的不相容原理被数位学者²⁵公式化为: 多电子系统波函数关于所有电子的坐标, 轨道以及自旋是反对称的要求. 这个原理被包含在了Enrico Fermi(恩里克·费米)²⁶和Dirac²⁷的统计力学中, 并且由于这个原因, 服从不相容原理的粒子被广泛称为“费米子”, 正如类似光子的粒子, 这种粒子的波函数是对称的并服从Bose和Einstein的统计而被称为“玻色子”. 不相容原理扮演了金属、白矮星、中子星等理论中的基础角色, 但是对于这些问题的讨论将会使我们偏离主线.

Dirac的提议是: 之所以带正能的电子不会掉落到负能态, 是因为“除了会有少量速度较小的态, 所有的负能态已经被占满了.” 这几个空的态, 或者说“空穴”, 处在负能态电子的海洋中, 其行为正像带有反量子数的粒子: 正能量和正电荷. 当时唯一知道带正电的粒子是质子, 并且正如Dirac稍后回忆到的,^{27a} “当时所有观点都趋向于反对新粒子”所以Dirac认为他的空穴就是质子; 事实上, 他1930年的论文²²标题正是“电子和质子的一个理论.”

这个空穴理论面临着很多直接的困难. 一个很明显的问题是由这种无处不在的负能电子的无限大电荷密度引起的: 它们的电场在哪? Dirac提议重新解释出现在麦克斯韦方程中的电荷密度, 将其解释为: “与正常状态世界带电量之间的差值.” 另外一个要处理的问题是观测到的电子和质子的质量和相互作用的巨大差异. Dirac希望电子间的库仑相互作用将以某种方式解释这些差异, 但是Hermann Weyl(赫尔曼·外尔)²⁸证明了空穴理论实际上对正电荷和负电荷完全是对称的. 最后, Dirac预测了一个电子-质子湮没过程的存在, 在这个过程中, 一个正能量电子对遇到了负能电子之海的一个空穴并掉入这个未被占据的能级, 发射一对 γ -光子. 就其本身而言, 这本不会为空穴理论创造困难, 甚至希望解释恒星缺失的能量之源. 然而, 不久之后Julius Robert Oppenheimer(朱利叶斯·罗伯特·奥本海默)和Igor Tamm(伊戈尔·塔姆)指出²⁹原子中电子-质子湮没过程将发生的如此之快以至于与普通物质观测到的稳定性不合. 由于这些原因, Dirac在1931年改变了他的想法, 并认定这个空穴并非以质子的形式出现, 而是以一种新形式的正电荷粒子出现, 这种粒子与电子质量相同.^{29a}

随着Carl D. Anderson(卡尔·D·安德森)³⁰发现正电子, 这些问题中的第二个和第三个被消除了, 而Anderson本人并不知道Dirac已经做出了正电子的预测. 1932年8月2日, 在一个15kG磁场中的Wilson云室观测到了一条诡异的宇宙射线轨迹. 通过观察到的轨迹弯曲的方向, 预期是由一正电荷粒子, 可是轨迹的范围却至少是质子轨迹范围期待值的十倍大! 轨迹的范围和电离比都和这是一种新粒子的假设相吻合, 这种新粒子与电子的差异仅在电荷符号, 正是Dirac空穴所期待的. (P.M.S. Blackett(P.M.S.布莱克特)更早发现了这件事情, 但是他没有立即发表. Anderson引用的宇宙射线轨迹中正电荷轻粒子的证据报告, 是由Blackett和Giuseppe Occhialini(朱塞佩·奥基亚利尼)获得的.)因此Dirac仅仅错在把这个空穴误认为质子.

或多或少的, 预言的正电子的发现, 与Dirac方程在解释电子磁矩和氢原子精细结构上的早期成功, 使得Dirac理论的威望保持了至少六十个年头. 然而, 尽管对Dirac理论能否在任何未来物理理论中以某种形式幸存抱有一点疑问, 但是有一些严格的原因使得它不满足本身最初的原始基本原理:

(i) Schrödinger相对论波动方程中负几率问题的Dirac分析, 似乎是将任何零自旋粒子的存在排除在外的. 然而, 在20世纪20年代就知道了零自旋粒子的存在——例如, 处在基态的氢原子, 以及氦核. 当然, 你可以说氢原子和 α 粒子不是基本的, 所以不需要用一个相对论波动方程来描述, 然而, 基本这个概念如何被吸收进相对论量子力学的形式体系中是不清楚的(现在依然是). 现今, 我们知道大量的零自旋粒子—— π 介子, K 介子, 等等——质子与中子并不比它们基本. 我们同样也知道一些自旋1的粒子—— W^\pm 粒子和 Z^0 粒子——它们看起来和电子以及其他粒子一样基本. 更进一步的, 将强作用效应排除在外, 对于一个束缚在原子核周围的零自旋负 π 介子或 K 介子所组成的“介子原子”, 从相对论Klein-Gordon-Schrödinger方程的定态解出发, 我们现在可以计算它的精细结构! 因此, 相对论方程对于零自旋粒子出现了一些基础性错误而迫使了Dirac方程的发展, 这一观点是很难赞同的——问题仅是电子碰巧有自旋 $\hbar/2$, 而非零.

(ii) 迄今为止, 就我们知道的每一种类的粒子, 都存在一个“反粒子”, 其质量相同, 荷相反. (一些纯中性粒子, 例如光子, 其反粒子是他们本身.) 但是对于有荷玻色子, 诸如 π^\pm 介子或 W^\pm 粒子, 我们如何将它们的反粒子解释为负能态海洋中的空穴呢? 对于根据Bose-Einstein统计规则进行量子化的粒子, 并不存在不相容原理, 因此不管负能态是否被占据, 都没有什么机制阻止正能态粒子掉落到负能态. 并且, 如果这个空穴理论对玻色反粒子并不奏效, 我们凭什么相信它对于费米子就是成立的呢? 在1972年, 我问过Dirac这一观点的看法; 他告诉我, 他并不认为诸如 π 介子或 W^\pm 粒子之类的玻色子是“重要的”. 在稍后几年的一篇文章^{27a}中, Dirac指出了对于玻色子“我们不再有一个负能态被填满的真空态的图景”, 并说, 在这种情况下“整个理论变得更复杂”. 下一节将会说明量子场论的发展如何使反粒子的空穴解释不再必要, 即使不幸的是, 它依旧在很多教科书中苟延残喘. 引用Julian Schwinger(朱利安·施温格)的话,^{30a} “负能电子的无限海洋这一图景, 最好视为一个历史古董并忘掉它.”

(iii) Dirac理论的伟大成功之一是它对电子磁矩的正确预测. 磁矩(1.1.8)是角动量为 $\hbar/2$ 的带电点粒子做轨道运动所期望磁矩值的两倍大是相当显著的; 直到Dirac理论出现, 因子2一直是个谜. 然而, 在Dirac的论述中, 真的没有什么东西明确地引出了磁矩这个特定值. 在波动方程(1.1.23)电场和磁场所代入的地方, 我们可以再加上一个“Pauli项”³¹

$$\kappa\alpha_4 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi F_{\mu\nu} \quad (1.1.32)$$

κ 为任意系数. ($F_{\mu\nu}$ 是通常的电磁场应力张量, 有 $F^{12} = B_3$, $F^{01} = E_1$ 等)通过先给自由场方程加上一正比于 $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu) \psi$ 的项, 很显然, 该项为零, 然后像之前一样做代换(1.1.22), 就可获得Pauli项. 一个更加现代的方法将简单地认为(1.1.32)项与所有可接受的不变原理一致, 这些原理中包括Lorentz不变和规范不变, 因而没有理由说明为什么这样的项不应该被包含在场方程中. (见12.3节)这一项将给出电子磁矩正比于 κ 的额外贡献, 所以除了一个纯粹为形式简单的可能需求, 没有理由期待Dirac理论中的电子磁矩有任何的特定值.

正如我们将在这本书中看到的, 通过量子场论的发展, 这些问题最终都将被解决(或者至少被阐明).

1.2 量子场论的诞生

光子是唯一一个在作为粒子之前被当成场探测的粒子. 因此发展量子场论形式体系的第一个实例与辐射相联系是十分自然的, 直到后来, 才应用到其它粒子和场.

1926年, 在矩阵力学的核心文章之一中, Born, Heisenberg和Jordan³²将他们的新方法应用到自由辐射场中. 简单起见, 他们忽视了电磁波的极化并且在一维空间中处理, 坐标 x 从0取到 L ; 如果辐射场 $u(x, t)$ 在端点处被约束从而为零, 那么它的行为和端点固定在 $x = 0$ 和 $x = L$ 弦的位移行为是相同的. 通过类比弦的情况或全电磁场的情况, 哈密顿量取成如下的形式

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx . \quad (1.2.1)$$

为了将这个表达式简化为平方和, 将场 u 展为Fourier分量的和, 并且在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处 $u = 0$:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \left(\frac{\omega_k x}{c} \right) , \quad (1.2.2)$$

$$\omega_k \equiv \frac{k\pi c}{L} , \quad (1.2.3)$$

所以

$$H = \frac{L}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \dot{q}_k^2(t) + \omega_k^2 q_k^2(t) \right\} . \quad (1.2.4)$$

因此弦或场的行为类似于角频率为 ω_k 的独立谐振子的和, 其在20年前被Paul Ehrenfest^{32a}(保罗·埃伦菲斯特)预言.

特别地, 正如粒子力学中那样, $q_k(t)$ 的正则共轭“动量” $p_k(t)$, 由 H 是否表述为 p 和 q 的函数这一条件决定, 那么

$$\dot{q}_k(t) = \frac{\partial}{\partial p_k(t)} H(p(t), q(t)) .$$

这产生“动量”

$$p_k(t) = \frac{L}{2} \dot{q}_k(t) \quad (1.2.5)$$

所以正则对易关系可以重写为

$$\left[\dot{q}_k(t), q_j(t) \right] = \frac{2}{L} \left[p_k(t), q_j(t) \right] = \frac{-2i\hbar}{L} \delta_{kj} , \quad (1.2.6)$$

$$\left[q_k(t), q_j(t) \right] = 0 . \quad (1.2.7)$$

另外, $q_k(t)$ 的时间相关性由哈密顿运动方程给定

$$\ddot{q}_k(t) = \frac{2}{L} \dot{p}_k(t) = -\frac{2}{L} \frac{\partial H}{\partial q_k(t)} = -\omega_k^2 q_k(t) . \quad (1.2.8)$$

通过之前对谐振子的工作, Born, Heisenberg和Jordan是知道方程(1.2.6)—(1.2.8)所定义的矩阵形式的. q -矩阵为

$$q_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}} \left[a_k \exp(-i\omega_k t) + a_k^\dagger \exp(+i\omega_k t) \right] \quad (1.2.9)$$

其中, a_k 是一时间无关矩阵而 a_k^\dagger 是它的厄密伴, 满足如下对易关系

$$[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}, \quad (1.2.10)$$

$$[a_k, a_j] = 0. \quad (1.2.11)$$

这些矩阵的行与列由一组正整数 n_1, n_2, \dots , 标记, 每一个整数对应于一个简正模. 矩阵元是

$$(a_k)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sqrt{n_k} \delta_{n'_k, n_k-1} \prod_{j \neq k} \delta_{n'_j, n_j}, \quad (1.2.12)$$

$$(a_k^\dagger)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sqrt{n_k + 1} \delta_{n'_k, n_k+1} \prod_{j \neq k} \delta_{n'_j, n_j}. \quad (1.2.13)$$

对于单一简正模, 这些矩阵可以显式地写出来

$$a = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(1.2.12)和(1.2.13)满足对易关系(1.2.10)和(1.2.11)的检验是直接的.

一个带有整数分量 n_1, n_2, \dots 的列矢量的物理解释是, 它代表在每个简正模 k 下有 n_k 个量子的态. 矩阵 a_k 或 a_k^\dagger 作用在这样的列矢量上将相应的降低或提升 n_k 一个单位, 但使所有 $\ell \neq k$ 的 n_ℓ 不变; 它们因此可以解释为, 第 k 个简振模下, 湮灭或产生一个量子的算符. 特别的, 所有 n_k 等于零的矢量代表真空态; 它被任意 a_k 所湮灭.

通过代入哈密顿量, 这一解释可以进一步被证实. 在(1.2.4)中使用(1.2.9)和(1.2.10)给出

$$H = \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (1.2.14)$$

那么在 n -表象中, 哈密顿量是对角的

$$(H)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sum_k \hbar \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \prod_j \delta_{n'_j, n_j}. \quad (1.2.15)$$

我们看到态的能量正是出现在态中的每个量子能量 $\hbar \omega_k$ 之和, 再加上一个无限大零点能 $E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k$. 将其应用到辐射场, 这个形式体系阐明了, 根据每个简正模中的量子数目 n_k 计数辐射态的Bose方法.

Born, Heisenberg和Jordan利用这个形式体系导出了黑体辐射中能量涨落的方均根公式. (对于这个目标, 他们实际上仅使用了对易关系(1.2.6)—(1.2.7).) 然而, 不久之后这个方法就应用到一个更加急迫的问题, 自发辐射速率的计算.

为了领会这里的困难, 往回走一点是必要的. 在矩阵力学的首批文章中的一篇, Born和Jordan³³实际上假定了, 一个原子从态 β 掉落到更低的态 α 上时, 会像一个经典带电振子那样发生辐射, 类比振子的位移为

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\beta\alpha} \exp(-2\pi i \nu t) + \mathbf{r}_{\beta\alpha}^* \exp(2\pi i \nu t), \quad (1.2.16)$$

其中

$$h\nu = E_\beta - E_\alpha \quad (1.2.17)$$

而 $\mathbf{r}_{\beta\alpha}$ 是联系电子和质子的 β, α 矩阵元. 这样一个振子的能量是

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{\mathbf{r}}^2 + (2\pi\nu)^2 \mathbf{r}^2 \right) = 8\pi^2 m\nu^2 |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2 . \quad (1.2.18)$$

一个直接的经典计算就给出了辐射能, 然后除以每个光子的能量 $h\nu$ 就给出了光子发射速率

$$A(\beta \rightarrow \alpha) = \frac{16\pi^3 e^2 \nu^3}{3hc^3} |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2 . \quad (1.2.19)$$

然而, 为什么在处理自发辐射的过程中要使用经典偶极子的辐射公式是不清楚的.

稍后, Dirac³⁴给出了一个尽管直接推导较少但更加可信的想法. 对于一个振荡的经典电磁场, 若频率(1.2.17)中其每频率间隔的能量密度为 u , 通过考察处在其中的量子化原子态行为, 他可以导出吸收与受激辐射的速率 $uB(\alpha \rightarrow \beta)$ 和 $uB(\beta \rightarrow \alpha)$ 的公式:

$$B(\alpha \rightarrow \beta) = B(\beta \rightarrow \alpha) \simeq \frac{2\pi^2 e^2}{3h^2} |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2 . \quad (1.2.20)$$

(注意到, 由于 $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ 正是 $\mathbf{r}_{\beta\alpha}^*$, 右边的表达式关于态 α 和 β 是对称的.) Einstein^{34a}在1917年已经证明在原子和黑体辐射之间的热平衡几率赋予了自发辐射速率 $A(\beta \rightarrow \alpha)$ 与受激辐射或吸收速率 uB 一个关系:

$$A(\beta \rightarrow \alpha) = \left(\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \right) B(\beta \rightarrow \alpha) . \quad (1.2.21)$$

在这个关系中使用(1.2.20)就立刻得到了Born-Jordan的自发辐射速率结果(1.2.19), 然而, 在导出仅涉及单原子过程的公式中却需要热力学讨论这一点看起来仍不让人满意.

最终, 在1927年, Dirac³⁵给出了自发辐射的一个全量子力学处理. 在这个处理中, 矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 就像在方程(1.2.2)中那样展成简正模, 并且其系数被证明满足类似(1.2.6)的对易关系. 结果, 自由辐射场的每个态由一组整数 n_k 指定, 每个整数对应于一个简正模, 并且电磁场相互作用 $e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$ 的矩阵元采取一个简正模之和的形式, 其矩阵系数正比于由方程(1.2.10)—(1.2.13)定义的矩阵 a_k 和 a_k^\dagger , 这里的关键结果是方程(1.2.13)中的因子 $\sqrt{n_k + 1}$; 简正模 k 中的光子数目从 n_k 升到 $n_k + 1$ 的跃迁几率正比于这个因子的平方, 即 $n_k + 1$. 但在一个简正模 k 中有 n_k 个光子的辐射场中, 每频率间隔内的能量密度 u 为

$$u(\nu_k) = \left(\frac{8\pi\nu_k^3}{c^3} \right) n_k \times h\nu_k ,$$

所以, 在简正模 k 中的自发辐射速率正比于

$$n_k + 1 = \frac{c^3 u(\nu_k)}{8\pi h\nu_k^3} + 1 .$$

第一项解释为受激辐射的贡献, 而第二项则解释成自发辐射的贡献, Dirac可以总结出受激辐射的速率 uB 和自发辐射速率 A 的比值由Einstein关系, 即方程(1.2.21)给定. 利用他的关于 B 的早期结果(1.2.20), Dirac因而能重新导出自发辐射速率 A 的Born-Jordan公式³³(1.2.19). 之后, 通过Victor Weisskopf(维克托·魏斯科普夫)和Eugene Wigner(尤金·魏格纳)对谱线形状所做的细致研究,^{36a}

Dirac利用类似的方法给出辐射的散射和原子激发态寿命的量子力学处理,³⁶ Dirac在他的工作中,将电磁势分为辐射场 \mathbf{A} 和一个静态库仑势 A^0 ,这个形式并不能保证经典电磁学中显然的Lorentz不变和规范不变.稍后,这些结果被Enrico Fermi(恩里科·费米)^{36b}置于了一个更加坚实的基础之上.20世纪30年代的很多物理学家从Fermi的1932年的综述文章中学会了他们的量子电动力学.

q 和 p 的对易关系或 a 和 a^\dagger 的对易关系的使用也产生了关于量子理论Lorentz不变性的问题. Jordan 和Pauli³⁷在1928年证明了,场在不同时空点的对易子实际上是Lorentz不变.(这些对易子将在第5章计算.)之后, Bohr和Leon Rosenfeld(利昂·罗森菲尔德)³⁸利用一些精巧的思想实验证明了,对于类时间隔时空点,这些对易关系表述了对我们测量场的能力的限制.

在成功量子化电磁场之后不久,这些技巧就被应用到其它场.起初,这被视为“二次量子化”;所要被量子化的场是单粒子量子力学中使用的波函数,例如电子的Dirac波函数.这个方向上的第一步似乎是Jordan在1927年作出的.³⁹ Jordan和Wigner在1928年提出了一个显著的要素.⁴⁰他们认为Pauli不相容原理阻止了电子在任意简正模 k 中的占有数 n_k (算上自旋和位置变量)取除0和1以外的任何值.因此,电子场不能展开为满足对易关系(1.2.10)和(1.2.11)的算符的叠加,这是因为这些关系要求 n_k 取从0到 ∞ 的任意整数值.他们转而认为电子场应该展开为满足如下反对易关系的算符 a_k, a_k^\dagger 的和

$$a_k a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k = \delta_{jk}, \quad (1.2.22)$$

$$a_k a_j + a_j a_k = 0. \quad (1.2.23)$$

这个关系可以被一个矩阵满足,这个矩阵由一组整数 n_1, n_2, \dots 标记,每一个整数对应一个简正模,每个整数仅取值0或1:

$$(a_k)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \begin{cases} 1 & n'_k = 0, n_k = 1, \text{ 对于 } j \neq k, n'_j = n_j \\ 0 & \text{其它,} \end{cases} \quad (1.2.24)$$

$$(a_k^\dagger)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \begin{cases} 1 & n'_k = 1, n_k = 0, \text{ 对于 } j \neq k, n'_j = n_j \\ 0 & \text{其它.} \end{cases} \quad (1.2.25)$$

例如,对于一个单一简正模,我们仅有两行两列,对应于 n' 和 n 的值0和1;矩阵 a 和 a^\dagger 的形式为

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

读者可以检查(1.2.24)和(1.2.25)确实满足对易关系(1.2.22)和(1.2.23).

由整数 n_1, n_2, \dots 所表征的列矢量的含义与玻色子相同,即在每个简正模 k 上有 n_k 个量子的态.当然,所不同的是,由于每个 n_k 仅能取值0和1,在每个简正模上最多有1个量子,这正是Pauli不相容原理所要求的.另外,如果简正模 k 上已经有一个量子, a_k 将会消灭这个量子,否则给出零;除非简正模 k 上已经有量子,否则 a^\dagger 将会产生一个量子,如果简正模上有量子则给出0.很久以后, Fierz(菲尔兹)和Pauli^{40a}证明了,选择对易关系还是选择反对易关系由粒子的自旋单独决定:对于像光子那样自旋为整数的粒子必须使用对易子,而对于像电子那样自旋为半整数的粒子则必须使用反对易子.(在第5章将会以一种不同的方式证明它.)

一般量子场的理论首次在1929年Heisenberg和Pauli的两篇综合文章中提出.⁴¹他们工作的出发点是将正则体系应用到场本身,而不是出现在场中的简正模的系数. Heisenberg和Pauli令拉格

朗日量 L 为一个定域函数的空间积分, 这个函数是场和场的时空导数的函数; 那么当场变化时作用量 $\int L dt$ 应该是稳相的这一原理决定了场方程; 而对易关系通过一个假设决定: 拉格朗日量相对于任意场的时间导数的变分导数, 其行为类似于共轭于这个场的“动量”(对于费米场, 对易关系变成反对易关系). 他们继续将这个普遍的形式体系应用到电磁场和Dirac场, 并且探讨了不同的不变性和守恒率, 包括荷的守恒, 动量的守恒与能量的守恒, 以及Lorentz不变性和规范不变性.

Heisenberg-Pauli体系显然与我们第7章所描述的是相同的, 因而现今我们将讨论限于一个例子, 这个例子在本节后面是非常有用的. 对于一自由复标量场 $\phi(x)$, 拉格朗日量取为

$$L = \int d^3x \left[\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - c^2 (\nabla \phi)^\dagger \cdot (\nabla \phi) - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \phi \right]. \quad (1.2.26)$$

如果我们使 $\phi(x)$ 有一无限小变分 $\delta\phi(x)$, 拉格朗日量的变化为

$$\begin{aligned} \delta L = \int d^3x \left[\dot{\phi}^\dagger \delta\dot{\phi} + \dot{\phi} \delta\dot{\phi}^\dagger - c^2 \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \delta\phi - c^2 \nabla \phi \cdot \nabla \delta\phi^\dagger \right. \\ \left. - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \delta\phi - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi \delta\phi^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

在使用稳相作用量原理时, 假定了场的变分应在积分的时空区域的边界处是为零的. 因此, 在计算作用量 $\int L dt$ 的变化时, 我们可以立刻使用分部积分, 得到

$$\delta \int L dt = c^2 \int d^4x \left[\delta\phi^\dagger \left(\square - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi + \delta\phi \left(\square - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi^\dagger \right].$$

因为对于任意的 $\delta\phi^\dagger$ 和 $\delta\phi$, 上式必须为零, 所以 ϕ 必须满足熟悉的相对论波动方程

$$\left[\square - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad (1.2.28)$$

以及上式的伴方程. 场 ϕ 和 ϕ^\dagger 的正则共轭“动量”由 L 相对于 $\dot{\phi}$ 和 $\dot{\phi}^\dagger$ 的变分导数决定, 我们可以从(1.2.27)看出

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad (1.2.29)$$

$$\pi^\dagger \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}. \quad (1.2.30)$$

这些场变量满足通常的正则对易关系, 不过克罗内克 δ -符号由一个 δ -函数所替代

$$\left[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t) \right] = \left[\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = -i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.2.31)$$

$$\left[\pi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = \left[\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t) \right] = 0, \quad (1.2.32)$$

$$\left[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \right] = \left[\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = \left[\pi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = 0, \quad (1.2.33)$$

$$\left[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t) \right] = \left[\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = \left[\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = 0. \quad (1.2.34)$$

这里的哈密顿量由所有的正则动量乘以相应场的时间导数之积的“和”, 再减去拉格朗日量(就像粒子力学中那样)得到:

$$H = \int d^3x \left[\pi \dot{\phi} + \pi^\dagger \dot{\phi}^\dagger \right] - L \quad (1.2.35)$$

或者, 利用(1.2.26),(1.2.29)和(1.2.30):

$$H = \int d^3x \left[\pi^\dagger \pi + c^2 (\nabla \phi)^\dagger \cdot (\nabla \phi) + \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \phi^\dagger \phi \right]. \quad (1.2.36)$$

在Heisenberg和Pauli的文章之后, 再差一个元素, 量子场论就能达到它最终的“战前”形式: 负能态问题的解. 在上一节我们看到, 在1930年Heisenberg-Pauli的文章发表的时候, Dirac已经提出了电子负能态是被填满的, 所剩的只是负能态海洋中可以观测的空穴, 而不是电子负能态本身. 1932年正电子的发现似乎巩固了Dirac的想法, 这之后, 他的“空穴理论”被用来计算几个微扰论的最低阶过程, 其中包括电子-正电子对的产生和散射.

同时, 大量的工作发展了Lorentz不变性非常显然的形式体系. 最有影响的工作是Dirac, Vladimir Fock(弗拉基米尔·福克)和Boris Podolsky(鲍里斯·波尔多斯基)⁴²的“多时(many-time)”体系, 在这个体系中, 态矢由一波函数表示, 这一波函数依赖于所有的, 无论是正能的还是负能的, 电子的时空和自旋坐标. 在这个形式体系中, 负能电子和正能电子的总数是守恒的, 例如, 一个电子-正电子对的产生被描述为负能态电子到正能态的激发, 而电子和正电子的湮灭被描述成相对应的退激发. 多时体系的优点在于显然的Lorentz不变性, 但它有一些缺点: 尤其是, 以量子化电磁场所描述的光子的处理, 与电子和正电子的处理相比有一深刻的差异. 不是所有的物理学家认为这是个缺点: 不像电磁场, 电子场并没有一个经典极限, 所以关于它的物理意义存在疑问. 另外, Dirac^{42a}确信场是我们观测粒子的方法, 所以他不希望粒子和场可以通过相同的形式描述. 尽管我不知道这在当时是否困扰了所有人, 但多时体系有一更实际的缺点: 对于类似核衰变的过程, 产生了一个电子和反中微子却没有产生相伴的正电子或中微子, 用这一体系描述是困难的. Fermi⁴³对Beta衰变中电子能量分布所做的正确计算当得上是量子场论的早期成就之一.

为了例证Dirac空穴理论与电子的量子场理论之间的等效性, 需要一个由Fock,^{43a} Wendell Furry(温德尔·弗里)和Oppenheimer(奥本海默)⁴⁴在1933-1934年所提出的重要概念. 为了从一个更现代的观点接触这一概念, 假定我们尝试建立一个电子场, 这个电子场类似于电磁场或Born-Heisenberg-Jordan场(1.2.2). 由于电子携带电荷, 我们不能将湮灭算符和产生算符混在一起, 因而我们尝试将场写为

$$\psi(x) = \sum_k u_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega_k t} a_k, \quad (1.2.37)$$

其中 $u_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega_k t}$ 是Dirac方程(1.1.13)的一个正交平面波解的完全集(k 现在标记3-动量, 自旋和能量的符号):

$$\mathcal{H} u_k = \hbar \omega_k u_k, \quad (1.2.38)$$

$$\mathcal{H} \equiv -i \hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 m c^2, \quad (1.2.39)$$

$$\int u_k^\dagger u_\ell d^3x = \delta_{k\ell}, \quad (1.2.40)$$

而 a_k 是相对应的湮灭算符, 其满足Jordan-Wigner反对易关系(1.2.22)—(1.2.23). 根据“二次量子化”或Heisenberg和Pauli的正则量子化步骤的想法, 用量子化场(1.2.37)取代“波函数”, 然后计算 \mathcal{H} 的“期望值”以得到哈密顿量

$$H = \int d^3x \psi^\dagger \mathcal{H} \psi = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (1.2.41)$$

当然,问题是,这并非一个正定算符—尽管算符 $a_k^\dagger a_k$ 仅取正的本征值1和0(见方程(1.2.24)和(1.2.25)),但 ω_k 的一半是负的.为了克服这个困难,Furry和Oppenheimer采取Dirac的想法:⁴²正电子是负能电子的缺失;反对易关系在产生和湮灭算符之间是对称的,所以,他们定义正电子的产生湮灭算符为相应的负能电子的湮灭产生算符

$$b_k^\dagger \equiv a_k, \quad b_k \equiv a_k^\dagger \quad (\text{对于 } \omega_k < 0) \quad (1.2.42)$$

其中 b 上的指标 k 代表一个正能电子模,其动量与自旋与电子模 k 的动量与自旋相反.那么,Dirac场(1.2.37)可以重写为

$$\psi(x) = \sum_k^{(+)} a_k u_k(x) + \sum_k^{(-)} b_k^\dagger u_k(x), \quad (1.2.43)$$

其中 $(+)$ 和 $(-)$ 分别代表 $\omega_k > 0$ 的简正模 k 与 $\omega_k < 0$ 的简正模 k 的和,以及 $u_k(x) \equiv u_k(\mathbf{x})e^{-i\omega_k t}$.类似地,利用 b 的反对易关系,我们将能量算符(1.2.41)重写为

$$H = \sum_k^{(+)} \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k^{(-)} \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + E_0, \quad (1.2.44)$$

其中 E_0 是无限大c-数

$$E_0 = - \sum_k^{(-)} \hbar|\omega_k|. \quad (1.2.45)$$

为了使这个重定义不仅仅是个形式,还必须将物理真空指定为不包含正能电子或正电子的态 Ψ_0 :

$$a_k \Psi_0 = 0 \quad (\omega_k > 0), \quad (1.2.46)$$

$$b_k \Psi_0 = 0 \quad (\omega_k < 0). \quad (1.2.47)$$

因此,(1.2.44)所给出的 E_0 正是真空能.如果我们测量任意相对于真空能 E_0 的能量,那么物理能量算符是 $H - E_0$;并且方程(1.2.44)证明这是一个正定的算符.

零自旋的带电粒子的负能态问题也被解决了,这一工作是由Pauli和Weisskopf⁴⁵在1934年做出的,他们的文章部分是为了挑战负能态被占满的Dirac图景.在这里,产生湮灭算符满足对易关系而非反对易关系,所以,就像费米子那样的情况,自由地交换这些算符的作用是不可能的.转而,我们必须返回到Heisenberg-Pauli正则体系⁴¹中以决定不同简正模的那个系数是产生算符还是湮灭算符.

Pauli和Weisskopf在一个空间体积 $V \equiv L^3$ 的正方体内将自由带荷标量场展成了平面波:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} q(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.2.48)$$

波数由周期性边界条件所约束,即 $j = 1, 2, 3$ 的量 $k_j L/2\pi$ 应该是一组三个正整数或负整数.类似地,正则共轭变量(1.2.29)被展为

$$\pi(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} p(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.2.49)$$

指数上放进负号是为了使(1.2.29)变成:

$$p(\mathbf{k}, t) = \dot{q}^\dagger(\mathbf{k}, t). \quad (1.2.50)$$

Fourier逆公式给出

$$q(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.2.51)$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \pi(\mathbf{x}, t) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.2.52)$$

因此, 对于 q 和 p , 正则对易关系(1.2.31)-(1.2.34)给出:

$$\left[p(\mathbf{k}, t), q(\mathbf{l}, t) \right] = \frac{-i\hbar}{V} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} = -i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \quad (1.2.53)$$

$$\begin{aligned} \left[p(\mathbf{k}, t), q^\dagger(\mathbf{l}, t) \right] &= \left[p(\mathbf{k}, t), p(\mathbf{l}, t) \right] = \left[p(\mathbf{k}, t), p^\dagger(\mathbf{l}, t) \right] \\ &= \left[q(\mathbf{k}, t), q(\mathbf{l}, t) \right] = \left[q(\mathbf{k}, t), q^\dagger(\mathbf{l}, t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.2.54)$$

以及其它的一些关系, 那些关系可以通过取上式的厄密共轭得到. 通过将(1.2.48)和(1.2.49)代入哈密顿量公式(1.2.36), 我们同样可以将这个算符写成 p 和 q 的形式:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left[p^\dagger(\mathbf{k}, t) p(\mathbf{k}, t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q^\dagger(\mathbf{k}, t) q(\mathbf{k}, t) \right], \quad (1.2.55)$$

其中

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 \equiv c^2 \mathbf{k}^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2. \quad (1.2.56)$$

那么, p 的时间导数由哈密顿方程给出

$$\dot{p}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\partial H}{\partial q(\mathbf{k}, t)} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 q^\dagger(\mathbf{k}, t) \quad (1.2.57)$$

(同时也给出了它的伴方程), 根据方程(1.2.50), 这个方程等价于Klein-Gordon-Schrödinger波动方程(1.2.28).

我们看到, 正如1926年Born, Heisenberg和Jordan⁴的模型中那样, 自由场行为类似于无限多个耦合谐振子. Pauli和Weisskopf可以构建算符 p 和 q , 通过引入两类分别对应粒子和反粒子的产生湮灭算符 $a, b, a^\dagger, b^\dagger$, 使得 p 和 q 满足对易关系(1.2.53)-(1.2.54)以及“运动方程”(1.2.50)和(1.2.57):

$$q(\mathbf{k}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) - b^\dagger(\mathbf{k}) \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t) \right] \quad (1.2.58)$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left[b(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) + a^\dagger(\mathbf{k}) \exp(+i\omega_{\mathbf{k}}t) \right] \quad (1.2.59)$$

其中

$$\left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l}) \right] = \left[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l}) \right] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \quad (1.2.60)$$

$$\left[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{l}) \right] = \left[b(\mathbf{k}), b(\mathbf{l}) \right] = 0, \quad (1.2.61)$$

$$\begin{aligned} \left[a(\mathbf{k}), b(\mathbf{l}) \right] &= \left[a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l}) \right] = \left[a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{l}) \right] \\ &= \left[a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.2.62)$$

检查这些算符是否真的满足所希望的关系(1.2.53), (1.2.54), (1.2.50), 和(1.2.57)是直接的. 场(1.2.48)可以重写为

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}}t) \right. \\ \left. - b^\dagger(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}}t) \right] \end{aligned} \quad (1.2.63)$$

并且, 哈密顿量(1.2.55)采取这样的形式

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left[b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) \right]$$

或者, 利用(1.2.60)-(1.2.62)

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left[b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \right] + E_0, \quad (1.2.64)$$

其中 E_0 是无限大c-数

$$E_0 \equiv \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}. \quad (1.2.65)$$

两类不同的算符 a 和 b , 其在哈密顿量中以精确相同形式出现, 这证明了它是一个有两种相同质量粒子的理论. 正如Pauli和Weisskopf所强调的, 这两个变量可以等价为粒子和对应的反粒子, 并且如果带荷, 则会有反荷. 因此, 正如我们之上所强调的, 零自旋的玻色子和自旋1/2的费米子可以有明显的反粒子, 不过对于玻色子, 其反粒子不能等效为负能粒子海中的空穴.

现在, 不管是 a 和 b 还是 a^\dagger 和 b^\dagger , 通过取对易关系在真空态 Ψ_0 上的期望值, 我们均可以称其为湮灭算符. 例如, 如果 $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ 是湮灭算符, 那么其作用在真空态上给出0, 所以(1.2.60)的真空期望值将给出

$$- \|a(\mathbf{k})\Psi_0\|^2 = \left(\Psi_0, \left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}) \right] \Psi_0 \right) = +1 \quad (1.2.66)$$

这与左边必须是负定的要求相矛盾. 用这种方法我们得出结论: $a_{\mathbf{k}}$ 和 $b_{\mathbf{k}}$ 才是湮灭算符, 并且因此

$$a(\mathbf{k})\Psi_0 = b(\mathbf{k})\Psi_0 = 0. \quad (1.2.67)$$

这与所有的对易关系式一致. 因此正则体系迫使场(1.2.58)中 $e^{+i\omega t}$ 的系数是一产生算符, 正如它在自旋1/2的Furry-Oppenheimer体系中所扮演的角色.

方程(1.2.64)和(1.2.67)现在告诉我们 E_0 是真空态的能量. 如果我们测量任意相对于 E_0 的能量, 那么, 物理能量算符是 $H - E_0$, 并且(1.2.64)又一次证明它是正定的.

什么问题为Dirac提供了出发点呢? 负几率问题. 正如Dirac意识到的, 唯一的几率密度量 ρ , 由Klein-Gordon-Schrödinger自由标量方程(1.2.28)的解构成, 并满足一个形式为(1.1.10)的守恒率, 必须正比于如下的量

$$\rho = 2 \operatorname{Im} \left[\phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (1.2.68)$$

因此它不一定是正定的量. 类似的, 在“二次量子化”理论中, 其中 ϕ 由方程(1.2.64)给定, ρ 不是一个正定算符. 由于这里 $\phi^\dagger(x)$ 并不与 $\dot{\phi}(x)$ 对易, 所以我们可以以不同的方式写出(1.2.68), 它们之间相差一个无限大的常数, 将其写为如下的形式被证明是方便的

$$\rho = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^\dagger - \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \phi \right]. \quad (1.2.69)$$

这个算符的空间积分是很容易被计算的

$$N \equiv \int \rho d^3x = \sum_{\mathbf{k}} \left(a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \right) \quad (1.2.70)$$

显然其有两种符号的本征值.

然而, 在某种程度上, 这个发生在自旋零量子场论中的问题也出现在自旋1/2的量子场论中, Dirac场的密度算符 $\psi^\dagger\psi$ 确实是一正定算符, 但是为了构建一个物理的密度, 我们应该扣除已满电子态的贡献. 特别的, 利用平面波分解(1.2.43), 我们可以将总密度算符写为

$$N \equiv \int d^3x \psi^\dagger\psi = \sum_{\mathbf{k}}^{(+)} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}}^{(-)} b(\mathbf{k}) b^\dagger(\mathbf{k}) .$$

b 的反对易关系允许我们将其重写为

$$N - N_0 = \sum_{\mathbf{k}}^{(+)} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}}^{(-)} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} , \quad (1.2.71)$$

其中 N_0 是无限大常数

$$N_0 = \sum_{\mathbf{k}}^{(-)} 1 . \quad (1.2.72)$$

根据方程(1.2.46)和方程(1.2.47), N_0 是真空中粒子数, 所以, Furry和Oppenheimer推断出物理的数算符应是 $N - N_0$, 并且, 现在它既有负的本征值又有正的本征值, 正如自旋零.

量子场论对于这个问题所提出的解答是: 无论是Furry和Oppenheimer的 ψ 还是Pauli和Weisskopf的 ϕ , 它们均不是必须要定义守恒正几率密度的几率振幅. 反而, 用以张开物理Hilbert空间的态, 被定义为每个模下所包含的粒子和/或反粒子的数目是确定的. 如果 Φ_n 是这样态的正交完全集, 那么在任意态 Ψ 下粒子数目的测定将会得出一个发现系统在 Φ_n 态的几率, 形式为

$$P_n = |(\Phi_n, \Psi)|^2 , \quad (1.2.73)$$

其中, (Φ_n, Ψ) 是通常的Hilbert空间标量积. 因此, 对于任何自旋, 负几率不会引出关于概率的任何问题. 波动场 ϕ , ψ 等根本不是几率密度, 而是在不同简正模下产生或湮灭粒子的算符. 如果“二次量子化”这个错误表述被永久的废除那真是一件好事.

特别的, 方程(1.2.46)和(1.2.47)的算符 N 和 $N - N_0$ 并不解释为总几率, 而是数算符: 明确一点, 是粒子与反粒子之差的数目. 对于带荷粒子, 荷的守恒迫使荷算符正比于这些数算符, 所以(1.2.70)和(1.2.71)中的负号允许我们立即推断出粒子和反粒子有相反的荷. 在这个场论的形式体系中, 相互作用对哈密顿量的贡献项是场变量的三阶, 四阶或者更高阶的项, 而不同过程的速率通过在一个时间相关微扰论下使用这些相互作用算符给定. 以上的简短评论所描述的概念性框架将充当本书中大多数工作的基础.

尽管它有如此明显的优点, 量子场论并没有立即取代空穴理论; 反而, 在一段时期内这两种观点共存, 并且场论思想和空穴理论思想的多种结合被用来计算物理反应速率. 在这个时期, 对于不同过程截面的一些计算到了最低的 e^2 阶, 例如, 1929年Klein和Nishina(仁科)所做的 $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$; 1930年Dirac所做的 $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$; 1932年Møller(穆勒)所做的 $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$; 1934年Bethe(贝特)和Heitler(海特勒)所做的 $e^- + Z \rightarrow e^- + \gamma + Z$ 和 $\gamma + Z \rightarrow e^+ + e^- + Z$ (其

中 Z 代表重原子的库仑场); 1936年Bhabha(巴巴)所做的 $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$. (这样过程的计算过程被放在了第8章, 并且在那里对于电子-光子散射过程进行了详细的求解.) 这些最低阶的计算给出了有限的结果, 与实验数据基本相合.

然而, 对量子场论普遍不满意的感觉(无论是否以空穴理论的形式)持续了整个20世纪30年代. 其原因之一是量子电动力学对宇宙射线簇射中带荷粒子贯穿能力的明显的错误解释, 这一事实在1936年由Oppenheimer和Franklin Carlson(富兰克林·卡尔森)注意到. 与第一个相比, 不满意的原因表现为新粒子和新相互作用的连续发现. 我们已经提到的有: 电子, 光子, 正电子, 中微子, 当然, 以及氢原子的核——质子. 贯穿20世纪20年代始终, 大家普遍相信重核是由质子和电子构成的, 但是很难明白一个类似电子的轻粒子是如何被禁闭在核内的. 这一图景的又一严重困难是在1931年由Ehrenfest和Oppenheimer指出的: 对于普通氮元素的核 N^{14} , 为了使其有原子数7和原子重量14, 则氮核将必须由14个质子和7个电子构成, 并且因而不得不是一个费米子, 这与 N^{14} 是玻色子的分子光谱实验结果相矛盾. 这个问题(以及其他问题)在1932年因为中子的发现, 以及Heisenberg随后的核是由质子和中子构成而非质子和电子这一提议而被解决. 一个强的非电磁的短距力作用在中子和质子之上以使核聚在一起是显然的.

在Beta衰变的Fermi理论成功之后, 几个作者推测核力可以解释为由于电子和中微子交换的理论. 几年后, 在1935年, Hideki Yukawa(汤川秀树)提出一个相当不同的核力的量子场论. 在一个著名的经典计算中, 他发现带核(质子或中子)标量场的相互作用将会产生一个中子-中子势, 依赖于核间距 r , 由如下方程给定

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \exp(-\lambda r) \quad (1.2.74)$$

而非电子场所产生的 $1/r$ 的库仑势. 在Yukawa的标量场方程中, λ 作为一个参量而被引入, 并且当这个方程被量子化之后, Yukawa发现它描述了质量为 $\hbar\lambda/c$ 的粒子. 根据核内强相互作用的观测范围, Yukawa估计 $\hbar\lambda/c$ 的量级是电子质量的200倍. 在1937年, 这样的“介子”在云室中被Seth Neddermeyer(赛斯·尼德迈尔)和Anderson以及Jabez Curry Street(杰贝兹·柯里·斯特里特)和Edward Carl Stevenson(爱德华·卡尔·史蒂文森)发现, 并且普遍认为它们正是Yukawa的假设粒子.

介子的发现显示宇宙射线簇射中的带电粒子并不全是电子, 并且因此解决了这些簇射中困扰Oppenheimer和Carlson的问题. Lothar Nordheim(洛塔尔·诺德海姆)在1939年指出, 通过相同的强相互作用, 介子在高海拔中大量的产生(Yukawa理论的要求)本应导致大气层中介子的吸收, 这与它们在低海拔处大量出现的结果相矛盾. 在1947年, Marcello Conversi(马尔塞洛·孔韦尔西), Ettore Pancini(埃托雷·潘西尼)和Oreste Piccioni(奥雷斯特·皮西奥尼)的一个实验中证明, 在低海拔处, 在宇宙射线中占主导地位的介子实际上与核子的相互作用非常弱, 因而不能与Yukawa粒子等同. 这个谜题被一个理论提议, 以及随后它的实验所证实, 这个实验由Cesare Lattes(凯撒·拉特斯), Occhialini(奥基亚利尼)和Cecil Powel(塞西尔·鲍威尔)所做——有两类介子, 它们的质量存在轻微的差异: 重的(现在称为 π 介子)有强相互作用并在核力中扮演Yukawa所想象的角色; 轻的(现在称为 μ 介子或 μ 子)仅有弱作用和电磁作用, 并且在海平面处的宇宙射线中占主导地位, 在 π 介子的衰变产生. 在同一年, 1947年, 宇宙射线中的新粒子(现在知道是 K 介子和超子)被George Rochester(乔治·罗切斯特)和Clifford Butler(克利福德·巴特勒)全部发现. 从1947年起直到现在, 粒子不断地被发现, 其种类令人眩晕, 但是去追溯它们的来历将会使我们脱离目前所研究的范围. 这些发现显然的证明了任何被限制在光子, 电子和正电子的概念框架太过于狭窄, 以至于不能严格地作为一个基础理论. 但是一个更加重要的障碍被一个纯理论问题——无限大的问题展示出来.

1.3 无限大的问题

量子场论所处理的场 $\psi(x)$ 在时空点 x 消灭或产生粒子. 经典电子论的早期经验提供了一个警示: 一个点电子将会有无限大的电磁自质量; 对于电荷分布在半径为 a 的球面上的电子, 这个质量是 $e^2/6\pi ac^2$, 因此当 $a \rightarrow 0$ 时奇异. 令人失望的是, 这个问题在量子场论的早期更加严重的出现了, 尽管在这个理论随后的发展中, 它被极大地改善了, 但依旧留存至今.

量子场论中的无限大问题第一次被注意到, 是在Pauli和Heisenberg1929-1930年的文章中. 不久之后, 无限大的出现在Oppenheimer的束缚电子的电磁自能计算中被证实了, 对于自由电子, 则是IvarWaller(伊瓦尔·沃勒)发现的. 他们使用了普通的二阶微扰论, 不过这个微扰论中含有一个由电子和光子组成的中间态: 例如在氢原子的第 n 个能级中的电子, 它对能量 E_n 偏移为

$$\Delta E_n = \sum_{m,\lambda} \int d^3k \frac{|\langle m; \mathbf{k}, \lambda | H' | n \rangle|^2}{E_n - E_m - |\mathbf{k}|c}, \quad (1.3.1)$$

其中求和与积分取遍所有的中间电子态 m , 光子螺度 λ 和光子动量 \mathbf{k} , 而 H' 是哈密顿量中表示辐射与电子相互作用的项. 这个计算所给出的自能是形式上发散的; 更进一步; 如果通过扔掉那些光子波数大于 $1/a$ 的中间态以去掉发散, 那么自能行为当 $a \rightarrow 0$ 时类似于 $1/a^2$. 这类无限大通常被称为紫外发散, 这是因为它们是由那些包含波长非常短的粒子的中间态引起的.

这些处理电子的计算, 所依照的规则是负能态没有被填满的原始Dirac理论. 几年后, Weisskopf在新的空穴论中重复计算了电子自质量的计算. 在这个情况下, 又一新的项出现在二阶微扰论中, 这一项以非空穴理论语言可以描述为, 产生于电子在它的末态中与光子, 正电子第一次从真空中出现的过程, 这个正电子随后与初始的电子湮灭掉了. 最初, Weisskopf发现一个关于光子波数截断 $1/a$ 的一个 $1/a^2$ 的依赖关系. 在那时, Carlson和Furry(在Pauli的建议下)实现了相同的计算. 在看到Weisskopf的结果后, Furry意识到尽管Weisskopf引入了他和Carlson所忽视的静电项, Weisskopf却在磁性自能的计算中犯了一个新错误. 从Furry那里听到这件事之后, Weisskopf纠正了自己的错误, 然后他发现在总质量偏移中的 $1/a^2$ 项被抵消了! 然而, 尽管这个无穷大被抵消了, 另一无穷大留了下来: 在波数截断 $1/a$ 下, 自质量被发现为

$$m_{em} = \frac{3\alpha}{2\pi} m \ln \left(\frac{\hbar}{mca} \right), \quad (1.3.2)$$

与经典的 $1/a$ 关系或者早期量子的 $1/a^2$ 关系相比, $\ln a$ 对于截断的依赖变弱了, 在那时是有点鼓舞人心的, 稍后, 在重整化理论的发展中, 这变得极其重要.

一个相当不同的无限大显然是由Dirac在1933年发现的. 他考察一个静态近均匀外电荷密度 $\varepsilon(\mathbf{x})$ 在真空上的效应, 这里的真空指的是用于填满空穴理论中负能级的电子. $\varepsilon(\mathbf{x})$ 与负能电子的电荷密度之间的库仑作用产生了一个“真空极化”, 其感应电荷密度为

$$\delta\varepsilon = A\varepsilon + B \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \nabla^2 \varepsilon + \dots \quad (1.3.3)$$

常数 B 是有限的, 并且为 α 量级. 另一方面, A 是对数发散的, 量级为 $\alpha \ln a$, 其中 $1/a$ 是波数截断.

无限大似乎也出现在一个相关的问题上, 即光与光的散射. Hans Euler(汉斯·欧拉), Bernard Kockel(伯纳德·库卡尔)和Heisenberg在1938-1939年证明了, 通过使用Dirac和Heisenberg早期所建

议的多少有点任意的方案, 这些无穷大可以被消除. 他们针对由虚电子-正电子对产生的非线性电磁效应计算了有限拉格朗日量密度:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{e^4 \hbar}{360\pi^2 m_e^2 c^7} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] + \dots, \quad (1.3.4)$$

上式适用的频率 $\nu \ll m_e c^2 / \hbar$. 不久之后, Nicholas Kemmer(尼古拉斯·克默尔)和Weisskopf展示了一个讨论: 在这种情况下, 无限大是假的, 并且在没有任何削减方案下可以导出(1.3.4)

与无限大的斗争中, 一个闪光点是红外发散的成功处理, 这些发散来自于积分区域的低能部分而非高能部分. 在1937年, Felix Bloch(费利克斯·布鲁赫)和Arne Nordsieck(阿恩·诺德西克)证明了在提供一个可以有任意数目的低能光子产生的过程后, 这些发散会被抵消. 这些将在第13章以一个现代的形式讨论.

另一无限大出现在1939年, Sidney Michael Dancoff(西德尼·迈克尔·丹科夫)所做的电子在一个原子的静库仑场散射的辐射修正计算. 这个计算包含一个错误(有一项被省略了), 但直到后来才被意识到.

贯穿20世纪30年代, 所看到的不同的无穷大不仅仅是一个特定运算的失败. 而是, 标明了在更基础的层面上理解相对论量子场论的一个沟壑, 利用上节的宇宙射线方法, 一个观点被这个问题加强了.

这些令人不快的悲观症状之一是对候选形式体系的持续探索贯穿了20世纪的30年代和40年代. 正如Julian Schwinger(朱利安·施温格)稍后回忆到, “大多数领域内的物理学家的当务之急不是分析并仔细的应用已知的电子和电磁场耦合的相对论理论, 而是改变它.” 因此, 在1938年Heisenberg提议存在一个基本长度 L , 类似于基本作用量 \hbar 和基本速度 c , 场论被认为仅适用于远大于 L 的尺度, 这使得所有的发散积分将有效地在 L 或者动量 \hbar/L 处截断. 几个具体的提议是赋予场论非定域结构. 一些理论家开始怀疑态矢和量子场的形式体系应该被一仅基于可观测量的体系所替代, 例如由John Archibald Wheeler在1937年和Heisenberg在1943年引入的 S -矩阵, 它的矩阵元是不同过程的散射振幅. 正如我们将看到的, S -矩阵的概念现在已经变成了现代量子场论的一个至关重要的部分, 并且对于一些理论家, 一个纯 S -矩阵理论变成一个理想的典范, 尤其是作为强相互作用问题的一个可能解. 在另一方向, Wheeler和Richard Feynman(理查德·费曼)在1945年尝试消除电磁场, 而是以一种距离作用的形式导出电磁相互作用. 他们能够证明一个纯推迟(或纯提前)势可以通过, 不仅将源于检验电荷的之间的相互作用, 以及将这些电荷与宇宙中其他电荷的相互作用考虑在内而获得. 虽然, 这个时期所建议的量子力学的最彻底修正, 是由用以抵消态求和中的无穷大的负几率Dirac态引入的. Hilbert空间中的“不定度规”这一观点, 尽管不是以原先提出的形式, 却也在量子场论中繁荣起来.

在20世纪30年代, 处理无限大的一个更加保守的观点在20世纪30年代也是悬而未决的. 尽管这些无限大可以全被吸收进一个重定义, 即理论参量的“重整化”. 例如, 已知在所有的Lorentz不变的经典理论中, 电子的电磁自能和自动量必须采取电子质量修正的形式; 因此, 这些量中的无限大可以被电子的“裸”非电磁质量中的负无限大所抵消. 另外, 方程(1.3.3)证明了真空极化改变了电子电荷, 将 $e \equiv \int d^3x \varepsilon$, 改为

$$e_{\text{TOTAL}} = \int d^3x (\varepsilon + \delta\varepsilon) = (1 + A) e. \quad (1.3.5)$$

如果类似散射截面的可观测量为 e_{TOTAL} 而非 e 的形式表达, 那么真空极化在最低阶给出有限的结果. 问题, 量子场论中的所有无限大是否都可以以这种方式处理. 在1936年, Weisskopf认为量子场

论正是这种情况,并且在几个简单的计算中证明了已知的无穷大可以通过物理参量的重整化来消除.然而,将这个计算技巧用以说明无穷大总是可以以这种方式消除是不可能的,并且Dancoff的计算似乎证明了这一点.

无穷大出现的又一影响是倾向认为在量子场论中表现为无穷大的任何效应实际上根本不存在.尤其是,1928年Dirac理论已经预言了氢原子 $2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$ 能级的完全简并性是直到 α 的任意阶的;任何这两个能级分裂的量子电动力学计算的尝试都遇到了束缚电子的无穷大自能这一问题;因此这种分裂的存在不能认为是严格的.稍后Bethe回忆到,“在所有现存的理论中这个偏移结果是无限大,并且因而总是被忽视的.”这个态度甚至坚持到了20世纪30年代的后半期,当时光谱实验开始表明一个量级为1000MHz的 $2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$ 分裂的出现.一个值得注意的例外是Edwin Albrecht Uehling(埃德温·阿尔布雷克特·尤林),他意识到早先提到的真空极化效应将会产生一个 $2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$ 分裂;不幸的是,正如我们将在第14章看到的,对分裂的这个贡献远小于1000MHz,并且有一个符号错误.

二战开始不久之后,围绕在量子场论周围的灰暗开始消散.在1947年6月1-4日,纽约牛尾州(Shelter Island)所召开的题为“量子力学的基础”(Foundation of Quantum Mechanics)将在整个20世纪30年代从事量子场论无限大问题的理论物理学家,在战争中开始科学工作的年青一代的理论家以及——关键重要的——几个实验物理学家聚集起来.讨论的领头者是Hans Kramers(汉斯·克拉默斯),Oppenheimer和Weisskopf.实验者中的一个(更准确的说,转为实验者的理论家),Willis Lamb(威利斯·兰姆),描述了一个氢原子中 $2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$ 偏移的明确测量.炉中的一束氢原子,它们中大多是 $2s$ 和 $2p$ 态,被瞄向了一个仅对处在激发态的原子敏感的探测器.处在 $2p$ 态的原子通过单光子发射(Lyman α)快速的衰减到 $1s$ 基态,而 $2s$ 态只能通过双光子发射非常慢地衰减,所以事实上,探测器所探测到仅测量的是在亚稳 $2s$ 态上原子的数目.原子束会通过一个磁场,这将在任何自然出现的 $2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$ 分裂之外增加一个已知的Zeeman(塞曼)分裂.这束原子同样也处在一个微波电磁场的影响之下,其有一个固定频率 $\nu \sim 10\text{GHz}$.在一定磁场强度下,所观测到的探测器信号是瞬息的,这表明微波场产生了从亚稳 $2s$ 态到 $2p$ 态的一个共振跃迁,然后通过一个快速的Lyman α 光子发射到达基态.在这个磁场强度之下,总的(Zeeman加内禀) $2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$ 分裂将不得不不是 $h\nu$,从中可以推断出内禀分裂.所公布的初始值是1000MHz,这与早期光谱学实验是一致的.这个发现的影响可以总结为1954年,我在哥本哈根做研究生时那里所流行的一句话:“仅因为它是无限大并不意味着它是零!(Just because something is infinite does not mean it is zero!)”

Lamb位移的发现引起了牛尾州上的理论家强烈的兴趣,他们中的很多人已经开始致力于改善量子电动力学的形式体系.Kramers描述了他的一个扩展电子的经典电动力学中的质量重整化工作,这证明了,如果理论的重新表述使得体系中的质量参量等于实验测量电子质量的值,那么在半径为零的极限下与自能发散相联系的困难并不显式地出现.Schwinger和Weisskopf(已经听说了关于Lamb结果的传闻,并在去往牛尾州的旅途上讨论了这件事)认为既然中间态的包含物包括使能级偏移中的发散从 $1/a^2$ 变为 $\ln a$ 的正电子,把中间态考虑进去后,也许在原子能级中这个偏移的差异会表现得有限.(事实上,在1946年,在他听闻Lamb的实验之前,Weisskopf将这个问题指派了给一个研究生,Bruce French(布鲁斯·弗伦奇).)在会议之后几乎是立刻的,在一趟去往斯克内克塔迪(Schenectady)的火车上,Hans Bethe(汉斯·贝特)进行了一个非相对论运算,依旧没有引入包含正电子中间态的效应,却使用了在虚光子在动量量级为 $m_e c^2$ 处一个简单的截断以消除无限大.他得到了令人振奋的近似值——1040MHz.用以消除无穷大的全相对论计算使用了重整化思想,不久之后被数位著者实现了,与实验精确的一致.

另一在牛尾州上激动人心的结果是由Isidor I. Rabi(伊西多·艾萨克·拉比)报告的. 在他的实验室中, 氢和氘的精细结构的测量认为电子磁矩比Dirac值 $e\hbar/2mc$ 大一个约为1.0013的因子, 并且随后钠和镓的测量给出一个精密值

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} [1.00118 \pm 0.00003] .$$

了解到这些结果, Gregory Breit(格雷戈里·布赖特)提出它们产生于一个对电子磁矩的 α 阶辐射修正. 在牛尾州上, Breit和Schwinger都描述了他们对这个修正的努力计算. 这个会议不久之后, Schwinger完成了对电子反常磁矩的成功计算

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right] = \frac{e\hbar}{2mc} [1.001162]$$

这与实验结果完美的一致. 这个结果与Breit关于Lamb位移的计算, 至少使物理学家确信了辐射修正的真实.

这个时期所使用的数学方法展示了各种各样使人困惑的概念和形式体系. 由Schwinger所发展的方法基于算符方法以及作用量原理, 并且在1948年牛尾州会议的后续会议波克诺庄园会议上做了展示. 另一个更早的Lorentz不变算符体系是由在日本的Sin-Itiro Tomonaga(朝永振一郎)和他的合作者所发展, 但是他们的工作没有首先被西方知道. 在20世纪30年代, Tomonaga已经抓住了Yukawa介子理论中的无穷大了. 直到1947年, 他和他的小组仍然在学术交流圈之外; 他们从News week(新闻周刊)上的一篇文章知道了Lamb位移.

一个显然相当不同的方法由Feynman发明, 并且他在波克诺会议做了简洁的描述. 代替引入量子场算符, Feynman将 S -矩阵表示成 $\exp(iW)$ 的一个泛函积分, 其中 W 是一组与经典电磁场相互作用的Dirac粒子的作用量积分, 对所有Dirac粒子轨道的积分在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时满足一定的初态条件和末态条件. Feynman工作中一个具有重大实际意义的结果是一组图形规则, 这个规则可以用来计算到微扰论任意阶的 S -矩阵元. 不像20世纪20年代和30年代的老微扰论, 这些Feynman规则自动的将粒子产生和反粒子湮灭过程混合在一起, 从而在任何场合下给出的结果都是Lorentz不变的. 我们已经在Weisskopf的早期的电子自能计算中看到, 在这样的计算中, 即同等资格的包含粒子和反粒子, 无限大的性质变得透明.

最终, 在1949年的一篇文章上, Freeman Dyson(弗里曼·戴森)证明了Schwinger和Tomonaga的算符体系将会得出与Feynman发现相同的图形规则. Dyson也对一般Feynman图中的无限大进行了分析, 并且概述了一个证明: 这些无穷大精确地总是那类可以被重整化去除的无穷大. 从Dyson的分析中得出的最显著结果之一是决定量子场论是否“可重整”的判据, 就这个意义而言, 所有的无限大都可以吸收进个数有限的质量和耦合常数的重定义中. 尤其是, 像Pauli项(1.1.32)的相互作用, 其本要改变电子磁矩的预测值, 却将损坏量子电动力学的可重整性. 随着Dyson文章的公布, 至少有一个普遍且系统的形式体系供物理学家轻松的学习, 并且为对物理问题随后的量子场论应用提供了一个通常的语言.

我不能就这样留下无穷大而不谈谈这个故事一个让人迷惑的方面. Oppenheimer在1930年已经发现当取两个原子能级偏移之差时, 束缚电子自能中的大多数紫外发散都可以被消除, 并且Weisskopf在1936年已经发现当引入一个包含正电子的中间态时, 自由电子自能中的大多数发散都可以消除. 即使在1934年, 猜测引入正电子中间态并且扣除成对原子态的能量偏移, 这是非

常自然的用其消除它们相对能量偏移中的无穷大。^{*}甚至对于 $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ 能级分裂我们有一个量级为1000MHz的实验证据。为什么在1947年之前没有人对这个能量差异进行一个数值估计呢？

严格来说，在1939年有过这样的尝试，但是它集中于问题的错误部分，质子的荷半径，其在氢原子能级上仅有一个微弱的效应。这个计算所给出的结果与早期实验粗略一致。在1939年被Lamb证明是一个错误。

在20世纪30年代，可能已经尝试过使用旧的非相对论微扰论，以进行引入含有正电子中间态的Lamb位移的全相对论计算。只要保持所有项到一个给定阶，旧形式的非相对论微扰论将给出与Feynman, Schwinger和Tomonaga明显是相对论的形式体系相同的结果。事实上，在Bethe的工作之后，在美国的第一个Lamb位移的精确计算正是由French, Weisskopf, Norman Kroll(诺曼·克罗尔)和Lamb以这种方式完成的，尽管日本的Tomonoga小组已经使用了协变方法解决了这个问题以及其他问题。

一个缺失的要素是将重整化作为处理无限大方法的信心。正如我们所看到的，在20世纪30年代后期重整化被广泛讨论。但是在30年代它已经变成了公认的智慧，并且Oppenheimer讨论过一个观点，即量子电动力学在能量超过100MeV时不能严格的处理，所以它的问题的解只能在非常冒险的新想法中找到。

在牛尾州上发生的几件事改变了这个期望。一个是上节所讨论的考察宇宙射线的问题被重新解决了；Robert Marshak(罗伯特·马夏克)提出假设存在两种质量相近的“介子”； μ 子实际上已经被观测到了，而 π 介子则用于核力。更重要的是，现在Lamb位移有了可信的实验值而反常磁矩迫使物理学家仔细思考辐射修正。可能同等重要的是这个会议将各自在以自己方式工作的理论家聚集在一起以思考重整化是否是无限大问题的解答。当在40年代后期革命来临时，这场革命大部分是由虽然年轻却扮演了保守的角色的物理学家构成，使得他们从前辈们的研究转向了根本的解答。

参考文献

- [1] L. de Broglie, *Comptes Rendus* **177**, 507, 548, 630 (1923); *Nature* **112**, 540 (1923); Thèse de doctorat (Masson et Cie, Paris, 1924); *Annales de Physique* **3**, 22 (1925) [英语再印为 *Wave Mechanics*, G. Ludwig编辑, (Pergamon Press, New York, 1968)]; *Phil. Mag.* **47**, 446 (1924).
- [2] W. Elsasser, *Naturwiss.* **13**, 711 (1925).
- [3] C. J. Davisson and L. H. Germer, *Phys. Rev.* **30**, 705 (1927).
- [4] W. Heisenberg, *A. Phys.* **33**, 879 (1925); M. Born and P. Jordan, *Z. f. Phys.* **34**, 858 (1925); P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A109**, 642 (1925); M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, *Z. f. Phys.* **35**, 557 (1926); W. Pauli, *Z. f. Phys.* **36**, 336 (1926). 这些文献被再印于 *Sources of Quantum Mechanics*, 由B. L. van der Waerden编辑(Dover Publications, Inc., New York, 1968).

^{*}事实上，这个猜测本来是错的。正如在14.3节所看到的，对电子质量的辐射修正对原子能级的影响不仅是通过电子自能的偏移，这个偏移对于所有原子能级都是相同的，也通过电子动能的一个改变，这个改变在各个能级是不同的。

- [5] E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109 (1926). 这些论文以英语再印于 *Wave Mechanics*, 不过有部分删节, Ref. 1. 另见 *Collected Papers on Wave Mechanics*, J. F. Schearer and W. M. Deans 译 (Blackie and Son, London, 1928).
- [6] 参看 P. A. M. Dirac, *The Development of Quantum Theory* (Gordon and Breach, New York, 1971). 另见 Dirac 为 Schrödinger 所写的讣告, *Nature* **189**, 355 (1961), 以及他在 *Scientific American* **208**, 45 (1963) 上的文章.
- [7] O. Klein, *Z. f. Phys.* **37**, 895 (1926). 另见 V. Fock, *Z. f. Phys.* **38**, 242 (1926); *ibid.*, **39**, 226 (1926).
- [8] W. Gordon, *Z. f. Phys.* **40**, 117 (1926).
- [9] 这个计算的细节, 参看 L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edn, (McGraw-Hill, Inc. New York, 1968): Section 51.
- [10] F. Paschen, *Ann. Phys.* **50**, 901 (1916). 这些实验实际上是用 He^+ 实现的, 这是因为它的精细结构分裂是氢原子的 16 倍大, 谱线的精细结构是由 A. A. Michelson 首次用干涉测量法发现的, *Phil. Mag.* **31**, 338 (1891); *ibid.*, **34**, 280 (1892).
- [10a] A. Sommerfeld, *Münchener Berichte* 1915, pp. 425, 429; *Ann. Phys.* **51**, 1, 125 (1916). 另见 W. Wilson, *Phil. Mag.* **29**, 145 (1915).
- [11] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Naturwiss.* **13**, 953 (1925); *Nature.* **117**, 264 (1926). 电子自旋由于其它原因由 A. H. Compton 更早地提出, *J. Frank. Inst.* **192**, 145 (1921).
- [12] 单电子原子中 Zeeman 分裂的普遍公式是由 A. Landé 以经验方法得到的, *Z. f. Phys.* **5**, 231 (1921); *ibid.*, **7**, 398 (1921); *ibid.*, **15**, 189 (1923); *ibid.*, **19**, 112 (1923). 当时, 这个公式中出现的额外非轨道角动量被认为是原子“核心”的角动量; A. Sommerfeld, *Ann. Phys.* **63**, 221 (1920); *ibid.*, **70**, 32 (1923). 稍后不久就意识到额外的角动量, 像 Ref. 11 中说的那样, 是源于电子自旋.
- [13] W. Heisenberg and P. Jordan, *Z. f. Phys.* **37**, 263 (1926); C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.* **A116**, 227 (1927). Darwin 说当时有其他几位学者也做了这个工作, 但 Dirac 只引用了 Darwin 的工作.
- [14] L. H. Thomas, *Nature* **117**, 514 (1926). 另见 S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, New York, 1972): Section 5.1.
- [15] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A117**, 514 (1926). 这个理论在计算 Zeeman 效应和 Paschen-Back 效应, 以及精细结构中多重谱线之间的相对强度中的应用, 可参看见 Dirac, *ibid.*, **A118**, 351 (1928).
- [16] 非相对论量子力学的几率解释, 可参看 M. Born, *Z. f. Phys.* **37**, 863 (1926); *ibid.*, **38**, 803 (1926) (再印于有删节的英语版本 *Wave Mechanics*, Ref. 1); G. Wentzel, *Z. f. Phys.* **40**, 590 (1926); W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **43**, 172 (1927). N. Bohr, *Nature* **121**, 580 (1928);

- Naturwissenschaften **17**, 483 (1929); *Electrons et Photons - Rapports et Discussion du V^e Conseil de Physique Solvay* (Gauthier-Villars, Paris, 1928).
- [17] 1969年3月28日,Dirac与J. Mehra之间的对话,被Mehra引用于*Aspects of Quantum Theory*, A. Salam and E. P. Wigner编辑(Cambridge University Press, Cambridge, 1972).
- [18] G. Gamow, *Thirty Years that Shook Physics*, (Doubleday and Co., Garden City, NY, 1966): p.125.
- [19] W. Pauli, *Z. f. Phys.* **37**, 263 (1926); **43**, 601 (1927).
- [20] C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.* **A118**, 654 (1928); *ibid.*, **A120**, 621 (1928).
- [21] W. Gordon, *Z. f. Phys.* **48**, 11 (1928).
- [22] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A126**, 360 (1930); 另见Ref. 47.
- [23] E. C. Stoner, *Phil. Mag.* **48**, 719 (1924).
- [24] W. Pauli, *Z. f. Phys.* **31**, 765 (1925).
- [25] W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **38**, 411 (1926); *ibid.*, **39**, 499 (1926); P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A112**, 661 (1926); W. Pauli, *Z. f. Phys.* **41**, 81 (1927); J. C. Slater, *Phys. Rev.* **34**, 1293 (1929).
- [26] E. Fermi, *Z. f. Phys.* **36**, 902 (1926); *Rend. Accad. Lincei* **3**, 145 (1926)
- [27] P. A. M. Dirac, Ref. 25.
- [27a] P. A. M. Dirac, 密歇根大学里的首次W. R. Crane讲演,1978年4月17日,未发表.
- [28] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, 由H. P. Robertson翻译自德文第二版(Dover Publications, Inc., New York): Chapter IV, Section 12. 另见P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A133**, 61 (1931).
- [29] J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35**, 562 (1930); I. Tamm, *Z. f. Phys.* **62**, 545 (1930).
- [29a] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **133**, 60 (1931).
- [30] C. D. Anderson, *Science* **76**, 238 (1932); *Phys. Rev.* **43**, 491 (1933). 后一篇文章再印于*Foundations of Nuclear Physics*, R. T. Beyer编辑(Dover Publications, Inc., New York, 1949).
- [30a] J. Schwinger, 'A Report on Quantum Electrodynamics,' in *The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, Dordrecht, 1973): p.415.
- [31] W. Pauli, *Handbuch der Physik* (Julius Springer, Berlin, 1932-1933); *Rev. Mod. Phys.* **13**, 203 (1941).
- [32] Born, Heisenberg, and Jordan, Ref. 4, Section 3.

- [32a] P. Ehrenfest, *Phys. Z.* **7**, 528 (1906).
- [33] Born and Jordan, Ref. 4. 不幸的是这个论文的相关部分没有包含进Ref. 4所引用的重印集*Sources of Quantum Mechanics*中.
- [34] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A112**, 661 (1926): Section 5. 一个更易理解的推导可参看L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edn. (McGraw-Hill Book Company, New York, 1968): Section 44.
- [34a] A. Einstein, *Phys. Z.* **18**, 121 (1917); 在van der Waerden, Ref 4.中再印为英文.
- [35] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A114**, 243 (1927); 再印于Quantum Electrodynamics, J. Schwinger编辑(Dover Publications, Inc., New York, 1958).
- [36] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A114**, 710 (1927).
- [36a] V. F. Weisskopf and E. Wigner, *Z. f. Phys.* **63**, 54 (1930).
- [36b] E. Fermi, *Lincei Rend.* **9**, 881 (1929); **12**, 431 (1930); *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87 (1932).
- [37] P. Jordan and W. Pauli, *Z. f. Phys.* **47**, 151 (1928).
- [38] N. Bohr and L. Rosenfeld, *Kon. dansk. vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd.* **XII**, No. 8 (1933) (译文在*Selected Papers of Leon Rosenfeld*, R. S. Cohen and J. Stachel编辑(Reidel, Dordrecht, 1979)); *Phys. Rev.* **78**, 794 (1950).
- [39] P. Jordan, *Z. f. Phys.* **44**, 473 (1927). 另见P. Jordan and O. Klein, *Z. f. Phys.* **45**, 751 (1929); P. Jordan, *Phys. Zeit.* **30**, 700 (1929).
- [40] P. Jordan and E. Wigner, *Z. f. Phys.* **47**, 631 (1928). 这个文章再印于*Quantum Electrodynamics*, Ref. 35.
- [40a] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12**, (1939); W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940); W. Pauli and F. J. Belinfante, *Physica* **7**, 177 (1940).
- [41] W. Heisenberg and W. Pauli, *Z. f. Phys.* **56**, 1 (1929); *ibid.*, **59**, 168 (1930).
- [42] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A136** 453 (1932); P. A. M. Dirac, V. A. Fock, and B. Podolsky, *Phys. Zeit. der Sowjetunion* **3**, 64 (1933). 后两篇文献重印于*Quantum Electrodynamics*, Ref. 35, pp. 29 and 312. 另见L. Rosenfeld, *Z. f. Phys.* **76**, 729 (1932).
- [42a] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London* **A136** 453 (1932).
- [43] E. Fermi, *Z. f. Phys.* **88**, 161 (1934). Fermi引用了Pauli未发表的工作——在 β -衰变中伴随着电子还发射出一个不可观测的中性粒子. 这个粒子为了与当时发现的中子(neutron)区分而被称为中微子(neutrino).
- [43a] V. Fock, *C. R. Leningrad* 1933, p. 267.

-
- [44] W. H. Furry and J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **45**, 245 (1934). 这篇论文使用了P. A. M. Dirac, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **30**, 150 (1934)中所发展的密度矩阵体系. 另见R. E. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* **146**, 420 (1934); W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **90**, 209 (1934); L. Rosenfeld, *Z. f. Phys.* **76**, 729 (1932).
- [45] W. Pauli and V. Weisskopf, *Helv. Phys. Acta* **7**, 709 (1934), 再印成英语, A. I. Miller翻译, *Early Quantum Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994). 另见W. Pauli, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **6**, 137 (1936).

第 2 章 相对论量子力学

这本书的观点是量子场论是方法，这是因为（在一定条件下）这是协调量子力学和相对论的唯一方法。因此我们的首个任务是研究类似Lorentz不变性的对称性如何出现在一个量子集合中。

2.1 量子力学

首先是一些好消息：量子场论基于由Schrödinger, Heisenberg, Pauli, Born和其他人在1925-1926年所发明的相同的量子力学，这个量子力学直到今日依然在原子，分子，核和凝聚态物理中使用。假定读者是熟悉量子力学的；这节仅是以Dirac的推广版本来提供量子力学最简单的总结¹。

(i) 物理态被Hilbert空间中的射线表示。Hilbert空间是一种复矢量空间；即如果 Φ 和 Ψ 是空间中的矢量（通常称为“态矢”），那么对于任意的复数 ξ, η ， $\xi\Phi + \eta\Psi$ 也是这个空间中的矢量。它有一个范数*：对于任意一对矢量，存在一个复数 (Φ, Ψ) ，满足

$$(\Phi, \Psi) = (\Psi, \Phi)^* , \quad (2.1.1)$$

$$(\Phi, \xi_1\Psi_1 + \xi_2\Psi_2) = \xi_1(\Phi, \Psi_1) + \xi_2(\Phi, \Psi_2) , \quad (2.1.2)$$

$$(\eta_1\Phi_1 + \eta_2\Phi_2, \Psi) = \eta_1^*(\Phi_1, \Psi) + \eta_2^*(\Phi_2, \Psi) . \quad (2.1.3)$$

范数 (Ψ, Ψ) 也满足一个正定条件： $(\Psi, \Psi) \geq 0$ ，并且仅当 $\Psi = 0$ 时为0。（也有一些技巧性的假定允许我们对Hilbert空间中的矢量取极限。）一个射线是归一化矢量（即， $(\Psi, \Psi) = 1$ ）的一个集合，即如果 $\Psi' = \xi\Psi$ ，则 Ψ 和 Ψ' 属于同一射线，其中 ξ 是一满足 $|\xi| = 1$ 的任意复数。

(ii) 可观测量由厄密算符表示，这些算符是Hilbert空间到自身的映射 $\Psi \rightarrow A\Psi$ ，在这个意义下是线性的

$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi \quad (2.1.4)$$

并满足实条件 $A^\dagger = A$ ，其中对于任意的线性算符 A ，其共轭算符 A^\dagger 定义为

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^* . \quad (2.1.5)$$

（这里也有关于 $A\Psi$ 连续性的技巧性假定使其作为 Ψ 的函数。）如果属于这个射线的矢量 Ψ 是 A 的本征值为 α 的本征矢，那么射线所表示的态对于算符 A 所表示的可观测量有一确定值：

$$A\Psi = \alpha\Psi \quad \text{对于属于}\mathcal{R}\text{的}\Psi. \quad (2.1.6)$$

一个基本定理告诉我们对于厄密算符 A ， α 是实的，并且 α 不同的本征矢是正交的。

*我们也经常使用Dirac左矢-右矢记号：取代 (Ψ_1, Ψ_2) ，我们可以写成 $\langle 1|2\rangle$ 。

(iii) 如果系统处在由射线 \mathcal{R} 所表示的态中，并且做一个实验以检验它是否处在由互相正交的射线 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ 所表示的不同态中（例如，通过一个或多个可观测量）那么发现它处在由 \mathcal{R}_n 所表示的态中概率为

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2, \quad (2.1.7)$$

其中 Ψ 和 Ψ_n 是分别属于射线 \mathcal{R} 和 \mathcal{R}_n 的任意矢量。（如果来自两个射线的态矢有一归零标量积，则称这对射线是正交的。）如果态矢 Ψ_n 构成完全集，另一基本定理给出总几率1：

$$\sum_n P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = 1. \quad (2.1.8)$$

2.2 对称性

一个对称变换是改变视角却不改变可能实验的结果。如果一个观测者 O 看到一个系统，处在由射线 \mathcal{R} 或 \mathcal{R}_1 或 \mathcal{R}_2, \dots 所表示的态中，那么看到相同的系统的一个等价观测者会看到这个系统处在一个不同的态中，分别由射线 \mathcal{R}' 或 \mathcal{R}'_1 或 \mathcal{R}'_2, \dots 表示，但是两个观测者必得到相同的几率

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n). \quad (2.2.1)$$

（这仅是射线变换是对称的一个必要条件；进一步的条件在下一章讨论。）Wigner²在20世纪30年代早期所证明的一个重要定理告诉我们，对于任意这样的射线变换 $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ ，我们可以定义Hilbert空间上的一个算符 U ，使得如果 Ψ 在射线 \mathcal{R} 中，那么 $U\Psi$ 在射线 \mathcal{R}' 中，则 U 要么是么正且线性的

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi), \quad (2.2.2)$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi \quad (2.2.3)$$

要么是反么正且反线性的

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^*, \quad (2.2.4)$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi. \quad (2.2.5)$$

Wigner的证明省略了一些步骤。一个更加完整的证明在本章末尾的附录A中。

正如已经提到的，线性算符 L 的共轭定义为

$$(\Phi, L^\dagger\Psi) \equiv (L\Phi, \Psi). \quad (2.2.6)$$

对于反线性算符，这个条件是无法满足的，因为在这种情况下，方程(2.2.6)的右边对于 Φ 是线性的，而左边对于 Φ 是反线性的。反而一个反线性算符 A 的共轭定义为

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^* = (\Psi, A\Phi). \quad (2.2.7)$$

在这个定义下，么正或反么正的条件均采取以下形式

$$U^\dagger = U^{-1}. \quad (2.2.8)$$

总有一个平庸的对称变换 $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ，由单位算符 $U = 1$ 表示。当然，这个算符是么正且线性的。那么连续性要求任何对称性（像旋转变换或平移变换或 Lorentz 变换）可以通过某些参量（像角，距离或速度）的连续改变平庸的构成，那么这个对称性必须由一个线性么正或反线性反么正的算符 U 表示。（由反线性反么正算符表示的对称性在物理中是不那么显著的；它们总涉及一个时间流方向的逆转。见 2.6 节。）

特别的，一个无限小的接近于平庸的对称变换可以表示为一个线性么正算符，其无限接近于单位算符：

$$U = 1 + i\epsilon t \quad (2.2.9)$$

ϵ 是一个实的无限小参量。由于 U 是么正且线性的， t 必须是厄密且线性的，所以它是可观测量的一个候选者。确实，大多数（也许是全部）物理的可观测量，诸如角动量或动量，从对称变换中诞生。

这组对称变换有一些性质可以将其定义为群。如果 T_1 是一变换使射线 \mathcal{R}_n 变为 \mathcal{R}'_n ， T_2 是另一变换使射线 \mathcal{R}'_n 变为 \mathcal{R}''_n ，那么进行两个变换的结果是另一对称变换，我们可以写为 $T_2 T_1$ ，使 \mathcal{R}_n 变为 \mathcal{R}''_n 。另外，一个使射线 \mathcal{R}_n 变为 \mathcal{R}'_n 的对称变换 T 有逆，写为 T^{-1} ，使射线 \mathcal{R}'_n 变为 \mathcal{R}_n ，并且总存在一个单位变换， $T = 1$ ，其保持射线不变。

么正或反么正算符 $U(T)$ 所对应的对称变换有反映群结构的性质，但是却更加复杂，这是因为不像对称变换本身，算符 $U(T)$ 是作用在 Hilbert 空间中的矢量上，而不是射线上。如果 T_1 使 \mathcal{R}_n 变为 \mathcal{R}'_n ，那么作用在射线 \mathcal{R}_n 中的一个矢量 Ψ_n 上， $U(T_1)$ 必须得到一个处在射线 \mathcal{R}'_n 上的矢量 $U(T_1)\Psi_n$ ，并且如果 T_2 使这个射线变成 \mathcal{R}''_n ，那么作用在 $U(T_1)\Psi_n$ 上，它必得出处在射线 \mathcal{R}''_n 上的矢量 $U(T_2)U(T_1)\Psi_n$ 。但是 $U(T_2 T_1)\Psi_n$ 也在这个射线上，所以这些矢量仅能相差一个相位 $\phi_n(T_2, T_1)$

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n = e^{i\phi_n(T_2, T_1)}U(T_2 T_1)\Psi_n \quad (2.2.10)$$

更进一步，在一个意义重大的期望下， $U(T)$ 的线性（或反线性）告诉我们这些相位独立于态 Ψ_n 。这有一个证明。考察任意两个不同的矢量 Ψ_A, Ψ_B ，二者不成比例。那么应用方程 (2.2.10) 于态 $\Psi_{AB} \equiv \Psi_A + \Psi_B$ 上，我们得到

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{AB}}U(T_2 T_1)(\Psi_A + \Psi_B) &= U(T_2)U(T_1)(\Psi_A + \Psi_B) \\ &= U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B \\ &= e^{i\phi_A}U(T_2 T_1)\Psi_A + e^{i\phi_B}U(T_2 T_1)\Psi_B \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

任意的么正或反么正算符有一逆（它的共轭），其也是么正或反么正的。给 (2.2.11) 左乘 $U^{-1}(T_2 T_1)$ ，那么我们得到

$$e^{\pm i\phi_{AB}}(\Psi_A + \Psi_B) = e^{\pm i\phi_A}\Psi_A + e^{\pm i\phi_B}\Psi_B \quad (2.2.12)$$

正号和负号分别指代 $U(T_2 T_1)$ 是么正还是反么正的。由于 Ψ_A 和 Ψ_B 线性独立，因而只有一种可能

$$e^{i\phi_{AB}} = e^{i\phi_A} = e^{i\phi_B} \quad (2.2.13)$$

正如所希望的，方程 (2.2.10) 中的相位是独立于态矢 Ψ_n 的，并且这可以写为一个算符关系

$$U(T_2)U(T_1) = e^{i\phi(T_2, T_1)}U(T_2 T_1) \quad (2.2.14)$$

对于 $\phi = 0$ ，这将视为 $U(T)$ 提供了对称变换一个群表示。对于一般相位 $\phi(T_2, T_1)$ ，我们有所谓的投影表示，或者“相位决定 (up to a phase)”表示。这个Lie群不能通过自身的结构告诉我们物理态矢是否提供一个普通表示或一个投影表示，但是正如我们将看到的，它可以告诉我们这个群到底有没有任何内禀的投影表示。

导出方程(2.2.14)的讨论的例外是，未必能够在 $\Psi_A + \Psi_B$ 所表示的态上安置一个系统。例如，众所周知的是，两个态，其总角动量分别是整数和半整数，在它们的叠加态上安置系统是不可能的。在这种情况下，我们称在两类态之间存在一个“叠加规则”³，并且相位 $\phi(T_2, T_1)$ 也许依赖于算符 $U(T_2)U(T_1)$ 和 $U(T_2T_1)$ 作用的态的种类。在2.7节，我们将会进一步讨论这些相位和投影表示。正如我们在那里所看到的，任何有投影表示的对称群总能以这样的方式扩张（而不用改变它的物理意义），它的表示总能定义为 $\phi = 0$ 的非投影表示。直到2.7节，我们都将假定这个扩张已经做了，并在方程(2.2.14)中令 $\phi = 0$ 。

有一类群，称为连通Lie群，在物理中有特殊的重要性。它们是变换 $T(\theta)$ 的群，由实连续参量 θ^a 的一个有限集描述，这个群的每个元素通过群内的一个路径与单位元相连。那么，这个群的乘法规则采取这样的形式

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)) \quad (2.2.15)$$

其中 $f^a(\bar{\theta}, \theta)$ 是 $\bar{\theta}$ 和 θ 的函数。令 $\theta^a = 0$ 为其单位元的坐标，我们必须有

$$f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = \theta^a. \quad (2.2.16)$$

正如已经提到的，这类连续群的变换必须通过一个么正（或者反么正）算符 $U(T(\theta))$ 表示在物理Hilbert空间上。对于一个Lie群，这些算符至少在其单位元的有限邻域内通过一幂级数表示

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \dots, \quad (2.2.17)$$

其中 $t_a, t_{bc} = t_{cb}$ 等，是独立于 θ 的算符，且 t_a 厄密。假定 $U(T(\theta))$ 构成这个转换群的一个普通（即非投影的）表示，即，

$$U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar{\theta}, \theta))). \quad (2.2.18)$$

让我们看看当被展为 θ^a 和 $\bar{\theta}^a$ 的幂级数时，这个条件像什么。根据方程(2.2.16)， $f^a(\bar{\theta}, \theta)$ 到二阶的展开必须采取如下的形式

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{bc} \bar{\theta}^b \theta^c + \dots \quad (2.2.19)$$

系数 f^a_{bc} 为实数。（任何 θ^2 或 $\bar{\theta}^2$ 的项的出现将违反方程(2.2.16)）那么方程(2.2.18)变为

$$\begin{aligned} & \left[1 + i\bar{\theta}^a t_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b \bar{\theta}^c t_{bc} + \dots \right] \times \left[1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \dots \right] \\ & = 1 + i \left(\theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{bc} \bar{\theta}^b \theta^c + \dots \right) t_a \\ & \quad + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + \dots)(\theta^c + \bar{\theta}^c + \dots)t_{bc} + \dots \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

1, $\theta, \bar{\theta}, \theta^2$ 和 $\bar{\theta}^2$ 的项自动的在方程(2.2.20)两边匹配，但从 $\bar{\theta}\theta$ 项开始，我们得到一个不平庸的条件

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f^a_{bc} t_a. \quad (2.2.21)$$

这说明如果我们给定群的结构，即，函数 $f(\bar{\theta}, \theta)$ ，以及因而所得到的二次项系数 f_{bc}^a ，我们可以从出现在一阶项中的生成元 t_a 得到 $U(T(\theta))$ 中的二阶项。然而，这里有一个一致性条件：算符 t_{bc} 关于 b 和 c 是对称的（因为它是 $U(T(\theta))$ 相对于 θ^b 和 θ^c 的二阶导数），所以方程(2.2.21)要求

$$[t_b, t_c] = iC_{bc}^a t_a, \quad (2.2.22)$$

其中， C_{bc}^a 是一组实常数，称为结构常数

$$C_{bc}^a \equiv -f_{bc}^a + f_{cb}^a. \quad (2.2.23)$$

这种类型的对易关系称为Lie代数。在2.7节，我们将证明对易关系(2.2.22)实际上是确定这个过程能为连续所需的单一条件：假定我们知道一阶项，生成元 t_a ， $U(T(\theta))$ 完整的幂级数可以从类似方程(2.2.21)的无限序列关系中计算出来。这不一定意味着如果我们知道 t_a ，那么算符 $U(T(\theta))$ 对于所有的 θ^a 唯一地决定，但是它却意味着至少在本身坐标 $\theta^a = 0$ 的邻域内， $U(T(\theta))$ 以这样的方式被唯一的确定：如果 $\theta, \bar{\theta}$ 和 $f(\bar{\theta}, \theta)$ 处在这个邻域内，方程(2.2.15)被满足。到所有 θ^a 的扩张将在2.7节讨论。

这里有一些重要的特殊情况，我们会一次又一次的遇到。假定函数 $f(\theta, \bar{\theta})$ （也许仅针对于坐标 θ^a 的某些子集）是简单地叠加

$$f^a(\theta, \bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a. \quad (2.2.24)$$

这个情况针对于时空中的平移，或者是关于任意固定轴的旋转（却不是同时关于两者）。那么方程(2.2.19)中坐标 f_{bc}^a 为零，并且因此结构常数(2.2.23)也为零。那么所有的生成元都交换

$$[t_b, t_c] = 0. \quad (2.2.25)$$

这样的群被称为是阿贝尔的。在这种情况下，对于所有的 θ^a 计算 $U(T(\theta))$ 是不困难的。从方程(2.2.18)和(2.2.24)，对于任意的整数 N ，我们有

$$U(T(\theta)) = \left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right) \right]^N.$$

令 $N \rightarrow \infty$ ，仅保持 $U(T(\theta/N))$ 中的一阶项，那么我们有

$$U(T(\theta)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{i}{N} \theta^a t_a \right]^N$$

因而

$$U(T(\theta)) = \exp(it_a \theta^a). \quad (2.2.26)$$

2.3 量子Lorentz变换

Einstein的相对性原理陈述了某些“惯性”参考系的等价性。它通过连接不同惯性系的坐标系的变换与服从牛顿力学的伽利略相对性原理相区分。如果 x^μ 是某个惯性系的坐标（ x^1, x^2, x^3 是笛卡尔空间坐标， $x^0 = t$ 是时间坐标，光速被设置为1）那么在任意其它的坐标系中，坐标 x'^μ 必须满足

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.3.1)$$

或等价的

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \eta_{\rho\sigma} . \quad (2.3.2)$$

这里 $\eta_{\mu\nu}$ 是对角矩阵，矩阵元为

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1, \quad \eta_{00} = -1 \quad (2.3.3)$$

并且求和约定是生效的：我们对出现在方程(2.3.2)中，类似 μ 和 ν 这样的，在同一项中出现两次，一次在上一次在下的任何指标进行求和。这些变换有一特殊性质，即在所有惯性系中光速是相同的（在我们的单位制中，光速等于1）；*一个光波以满足 $|d\mathbf{x}/dt| = 1$ 的单位速度传播，或者换句话说 $\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = d\mathbf{x}^2 - dt^2 = 0$ ，从中得出 $\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = 0$ ，因而 $|d\mathbf{x}'/dt'| = 1$ 。

任何满足方程(2.3.2)的坐标变换 $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$ 是线性的^{3a}

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (2.3.4)$$

其中 a^{μ} 是任意常数，而 Λ^{μ}_{ν} 是一个常矩阵，其满足如下条件

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} . \quad (2.3.5)$$

由于某些原因，将Lorentz变换写成一种不同的形式是有用的。矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 有一逆，写为 $\eta^{\mu\nu}$ ，它与 $\eta_{\mu\nu}$ 由相同的分量：它是对角的，且 $\eta^{00} = -1, \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1$ 。给方程(2.3.5)两边乘上 $\eta^{\sigma\tau} \Lambda^{\kappa}_{\tau}$ ，并合理地插入括号，我们得到

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} (\Lambda^{\nu}_{\sigma} \Lambda^{\kappa}_{\tau} \eta^{\sigma\tau}) = \Lambda^{\kappa}_{\rho} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\kappa} \Lambda^{\mu}_{\rho} .$$

再乘以矩阵 $\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho}$ 的逆，那么给出

$$\Lambda^{\nu}_{\sigma} \Lambda^{\kappa}_{\tau} \eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa} . \quad (2.3.6)$$

这些变换构成一个群。如果我们首先进行一个Lorentz变换(2.3.4)，然后再进行第二个Lorentz变换 $x'^{\mu} \rightarrow x''^{\mu}$ ，得到

$$x''^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} x'^{\rho} + \bar{a}^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} (\Lambda^{\rho}_{\nu} x^{\nu} + a^{\rho}) + \bar{a}^{\mu}$$

那么这个效应与 $x^{\mu} \rightarrow x''^{\mu}$ 的Lorentz变换是相同的，具体为

$$x''^{\mu} = (\bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu}) x^{\nu} + (\bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} a^{\rho} + \bar{a}^{\mu}) . \quad (2.3.7)$$

（注意到，如果 Λ^{μ}_{ν} 和 $\bar{\Lambda}^{\mu}_{\nu}$ 均满足方程(2.3.5)，那么 $\bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu}$ 也满足这个方程，所以这是一个Lorentz变换。这里用到的上横是为了将两个Lorentz变换区分开。）基于物理态的变换 $T(\Lambda, a)$

因而满足合成规则

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a}) T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}) . \quad (2.3.8)$$

取方程(2.3.5)的行列式，给出

$$(\text{Det } \Lambda)^2 = 1 \quad (2.3.9)$$

*有一大类坐标变换，称为共形变换，使得 $\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}$ 正比于但一般不等于 $\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ ，并且因此也是光速不变，二维中的共形变换在弦论和统计力学中是非常重要的，但是这些共形变换在四维中的物理相关性依旧是不清楚的。

所以 Λ^μ_ν 有一逆 $(\Lambda^{-1})^\nu_\rho$, 从方程(2.3.5)看出其有如下形式

$$(\Lambda^{-1})^\rho_\nu = \Lambda_\nu^\rho \equiv \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu_\sigma. \quad (2.3.10)$$

从方程(2.3.8)看到, 变换 $T(\Lambda, a)$ 的逆变换是 $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, 并且, 显然单位变换是 $T(1, 0)$ 。

为了与之前章节的讨论一致, 变换 $T(\Lambda, a)$ 引出物理Hilbert空间中矢量上的一个么正线性变换

$$\Psi \rightarrow U(\Lambda, a)\Psi.$$

算符 U 满足合成规则

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \quad (2.3.11)$$

(正如已经提到的, 一般而言, 为了避免在方程(2.3.11)的右边出现一个相位因子, 扩张Lorentz群是必要的。恰当的扩张将在2.7节展开论述。)

变换 $T(\Lambda, a)$ 的整个群被合适的称为非齐次Lorentz群, 或Poincaré群。它有一些重要的子群。首先, $a^\mu = 0$ 时的变换显然构成一个子群, 具体为

$$T(\bar{\Lambda}, 0)T(\Lambda, 0) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, 0), \quad (2.3.12)$$

这称为齐次Lorentz群。另外, 我们注意到由方程(2.3.9)得到: 要么 $\text{Det } \Lambda = +1$, 要么 $\text{det } \Lambda = -1$; 那些 $\text{Det } \Lambda = +1$ 的变换显然构成齐次或非齐次Lorentz群的子群。更近一步地, 从方程(2.3.5)和(2.3.6)的00分量, 我们得到

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \Lambda^i_0\Lambda^i_0 = 1 + \Lambda^0_i\Lambda^0_i. \quad (2.3.13)$$

其中 i 对值1, 2和3求和。我们看到 $\Lambda^0_0 \geq +1$ 或 $\Lambda^0_0 \leq -1$ 。那些 $\Lambda^0_0 \geq +1$ 的变换构成一个子群。注意到如果 Λ^μ_ν 和 $\bar{\Lambda}^\mu_\nu$ 是两个这样的 Λ , 那么

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 = \bar{\Lambda}^0_0\Lambda^0_0 + \bar{\Lambda}^1_0\Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^2_0\Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^3_0\Lambda^3_0;$$

但是方程(2.3.13)证明了三矢 $(\Lambda^1_0, \Lambda^2_0, \Lambda^3_0)$ 的长度为 $\sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1}$, 类似地, 三矢 $(\bar{\Lambda}^1_0, \bar{\Lambda}^2_0, \bar{\Lambda}^3_0)$ 的长度为 $\sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1}$, 所以这连个三矢的标量积是被束缚的

$$|\bar{\Lambda}^1_0\Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^2_0\Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^3_0\Lambda^3_0| \leq \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1}, \quad (2.3.14)$$

从而

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 \geq \bar{\Lambda}^0_0\Lambda^0_0 - \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1} \geq 1.$$

$\text{Det } \Lambda = +1$ 且 $\Lambda^0_0 \geq +1$ 的Lorentz变换的子群被称为固有正时Lorentz群。因为通过一个参量的连续改变是不可能从 $\text{Det } \Lambda = +1$ 跳到 $\text{Det } \Lambda = -1$, 或者从 $\Lambda^0_0 \geq +1$ 跳到 $\Lambda^0_0 \leq -1$, 任何一个通过参量的连续改变从恒等变换得到的Lorentz变换, 它的 $\text{Det } \Lambda$ 和 Λ^0_0 必须与恒等变换同号, 从而属于固有正时Lorentz群。

任何Lorentz变化要么是固有且正时的, 要么可以写成固有正时Lorentz群中的元素与离散变换 \mathcal{P} 或 \mathcal{T} 或 \mathcal{PT} 其中一个的乘积。其中 \mathcal{P} 是空间反演变换, 它的非零元素是

$$\mathcal{P}^0 = 1, \quad \mathcal{P}^1 = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^3 = -1, \quad (2.3.15)$$

而 \mathcal{T} 是时间反演矩阵，它的非零元素是

$$\mathcal{T}_0^0 = -1, \quad \mathcal{T}_1^1 = \mathcal{T}_2^2 = \mathcal{T}_3^3 = 1. \quad (2.3.16)$$

因此全体Lorentz群的研究退化成固有正时子群的研究，再加上空间反演和时间反演。在2.6节我们将会分别考虑空间反演和时间反演。在那之前，我们仅处理齐次或非齐次固有正时Lorentz群。

2.4 Poincaré代数

正如我们在2.2节看到，大部分关于任意Lee对称群的信息被包含在单位元附近的群元的性质中。对于非齐次Lorentz群，单位元是变换 $\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$ ， $a^\mu = 0$ ，所以我们想研究的那些变换是

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu, \quad (2.4.1)$$

ω_ν^μ 和 ϵ^μ 均取为无限小。Lorentz条件(2.3.5)现在变成

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}(\delta_\rho^\mu + \omega_\rho^\mu)(\delta_\sigma^\nu + \omega_\sigma^\nu) \\ &= \eta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2). \end{aligned}$$

我们在这里所使用的约定，将贯穿本书的始终，指标可以通过与 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $\eta^{\mu\nu}$ 收缩来升降指标

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma\rho} &\equiv \eta_{\mu\sigma}\omega_\rho^\mu \\ \omega_\rho^\mu &\equiv \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}. \end{aligned}$$

仅在Lorentz条件(2.3.5)中保留 ω 的一阶项，我们看到这个条件现在退化成 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (2.4.2)$$

四维中的反对称性二阶张量有 $(4 \times 3) / 2 = 6$ 个独立分量，所以再加上 ϵ^μ 的四个分量，一个非齐次Lorentz变换是由 $6 + 4 = 10$ 个参量描述。

由于 $U(1, 0)$ 将任何射线转换为它本身，所以它必须正比于单位算符^{*}，并可以通过相位选择来等于单位算符。对于一个无限小Lorentz变换(2.4.1)，那么 $U(1 + \omega, \epsilon)$ 必须等于1加上 $\omega_{\rho\sigma}$ 的线性项和 ϵ_ρ 的线性项。我们可以将其写为

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho + \dots \quad (2.4.3)$$

这里 $J^{\rho\sigma}$ 和 P^ρ 分别是 ω 无关和 ϵ 无关算符，而省略号代表 ω 和/或 ϵ 的高阶项。为了使 $U(1 + \omega, \epsilon)$ 是幺正的，算符 $J^{\rho\sigma}$ 和 P^ρ 必须是厄密的

$$J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\rho\sigma}, \quad P^{\rho\dagger} = P^\rho \quad (2.4.4)$$

^{*}在没有超选择定则的情况下，比例因子可能依赖于 $U(1, 0)$ 所作用的态的可能性被排除掉了，其原因与我们在2.2节中排除掉对称群的投影表述中的相位可能依赖于对称操作所作用的态的可能性是一样的。一旦应用超选择定则，通过相位因子重定义 $U(1, 0)$ 可能是必须的，而相位因子依赖于它所作用的扇形区域。

由于 $\omega_{\rho\sigma}$ 是反对称的，我们可以将它的系数 $J^{\rho\sigma}$ 也取为反对称的

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho} . \quad (2.4.5)$$

正如我们将看到的， P^1, P^2 和 P^3 是动量算符的分量， J^{23}, J^{31} 和 J^{12} 是角动量算符的分量，而 P^0 是能量算符，或者说哈密顿量^{**}。我们现在检查 $J^{\rho\sigma}$ 和 P^ρ 的Lorentz变换性质。考虑乘积

$$U(\Lambda, a) U(1 + \omega, \epsilon) U^{-1}(\Lambda, a) ,$$

其中 Λ^μ_ν 和 a^μ 在这里是新变换的参量，与 ω 和 ϵ 无关。根据方程(2.3.11) $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a)$ 等于 $U(1, 0)$ ，所以 $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ 是 $U(\Lambda, a)$ 的逆。那么从(2.3.11)得到

$$U(\Lambda, a) U(1 + \omega, \epsilon) U^{-1}(\Lambda, a) = U\left(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a\right). \quad (2.4.6)$$

到 ω 和 ϵ 的第一阶，我们就有

$$U(\Lambda, a) \left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho \right] U^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu. \quad (2.4.7)$$

方程两边 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ϵ_ρ 的系数是相等的（并利用(2.3.10)），我们得到

$$U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu) , \quad (2.4.8)$$

$$U(\Lambda, a) P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu^\rho P^\mu . \quad (2.4.9)$$

对于齐次Lorentz变换（ $a^\mu = 0$ ），这些变换简单的说明了 $J^{\mu\nu}$ 是个张量而 P^μ 是个矢量。对于纯平移（ $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ ），它们告诉我们 P^ρ 是平移不变的，但是 $J^{\rho\sigma}$ 不是。特别地，在一个空间变换下 $J^{\rho\sigma}$ 的空间-空间分量的改变正是，与角动量计算相关的原点改变下角动量的改变。

接下来，将规则(2.4.8)，(2.4.9)应用到本身是无限小的变换，即， $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$ 且 $a^\mu = \epsilon^\mu$ ，无限小量 ω^μ_ν 和 ϵ^μ 与之前的 ω 和 ϵ 无关。利用方程(2.4.3)，并仅保持 ω^μ_ν 和 ϵ^μ 中的一阶项，方程(2.4.8)和(2.4.9)现在变成

$$i \left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma} \right] = \omega_\mu^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu^\sigma J^{\rho\nu} - \epsilon^\rho P^\sigma + \epsilon^\sigma P^\rho , \quad (2.4.10)$$

$$i \left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho \right] = \omega_\mu^\rho P^\mu . \quad (2.4.11)$$

由于两边的 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ϵ_μ 的系数是相等的，我们发现了这个对易规则

$$i [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} , \quad (2.4.12)$$

$$i [P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho , \quad (2.4.13)$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0 . \quad (2.4.14)$$

^{**}我们将会看到，由于 $J^{\mu\nu}$ 的反对易关系，我们加强了角动量生成元的等价性。另一方面，对易关系不允许我们能够区分 P^μ 和 $-P^\mu$ ，所以(2.4.3)中 $\epsilon_\rho P^\rho$ 项的符号是一个约定。(2.4.3)中的选择与哈密顿量 P^0 定义的一致性将在3.1节进行证明。

这是Poincaré群的Lie代数。

在量子力学中，一个特殊的角色由那些是守恒的，即与能量算符 $H = P^0$ 对易的算符扮演。对方程(2.4.13)和(2.4.14)的考察说明了这是动量三矢

$$\mathbf{P} = \{P^1, P^2, P^3\} \quad (2.4.15)$$

以及角动量三矢

$$\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} \quad (2.4.16)$$

当然，还有能量 P^0 本身。剩下的生成元形成所谓的“推动”（boost）三矢

$$\mathbf{K} = \{J^{01}, J^{02}, J^{03}\}. \quad (2.4.17)$$

这些是不守恒的，这是为什么我们不使用 \mathbf{K} 的本征值标记物理态的原因。在一个三维标记下，对易关系(2.4.12)、(2.4.13)、(2.4.14)可以重写为

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (2.4.18)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad (2.4.19)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (2.4.20)$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \quad (2.4.21)$$

$$[K_i, P_j] = -iH\delta_{ij}, \quad (2.4.22)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0, \quad (2.4.23)$$

$$[K_i, H] = -iP_i, \quad (2.4.24)$$

其中 i, j, k 等取遍值1,2和3，并且 ϵ_{ijk} 是全反对称量，并有 $\epsilon_{123} = +1$ 。对易关系(2.4.18)将被认为是角动量算符的对易关系。

纯平移 $T(1, a)$ 构成非齐次Lorentz群的子群，它的群乘积规则由(2.3.8)给定

$$T(1, \bar{a})T(1, a) = T(1, \bar{a} + a). \quad (2.4.25)$$

这是与(2.2.24)意义上相同的额外物，所以通过利用(2.4.3)并重复导出(2.2.26)的步骤，我们发现有限平移可以在Hilbert空间上被表示为

$$U(1, a) = \exp(-iP^\mu a_\mu). \quad (2.4.26)$$

以精确相同的方式，我们可以证明一个沿 $\boldsymbol{\theta}$ 方向，角度为 $|\boldsymbol{\theta}|$ 的旋转 $R_{\boldsymbol{\theta}}$ 在Hilbert空间上被表示为

$$U(R_{\boldsymbol{\theta}}, 0) = \exp(i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (2.4.27)$$

将Poincaré代数与牛顿力学的对称群，伽利略群的Lie代数进行比较是有趣的。通过从伽利略群的变换法则出发，然后跟随这里所使用的导出Poincaré代数的步骤，我们可以导出这个代数。然而，既然我们已经有了方程(2.4.18)—(2.4.24)，通过所谓的Inönü-Wigner收缩^{4, 5}，很容易获得作为Poincaré代数的低速近似的伽利略代数。对于典型质量为 m ，典型速度为 v 的粒子系统，动量和反动量算符被期待是 $\mathbf{J} \sim 1, \mathbf{P} \sim mv$ 阶的。另一方面，能量算符为 $H = M + W$ ，

其总质量为 M ，而非质量能量为 W （动能+势能），被期待是 $M \sim m, W \sim mv^2$ 阶的。对方程(2.4.18)—(2.4.24)的考察证明了对易关系在 $v \ll 1$ 的极限下形式为

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, & [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k, & [K_i, K_j] &= 0, \\ [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k, & [K_i, P_j] &= -iM\delta_{ij}, \\ [J_i, W] &= [P_i, W] = 0, & [K_i, W] &= -iP_i, \\ [J_i, M] &= [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{K} 是 $1/v$ 阶的。注意到平移 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ 与一个“推动” $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ 的乘积本应是变换 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}$ ，但是，对于Hilbert空间上的算符，这个作用不是正确的：

$$\exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) = \exp(iM\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}/2) \exp(-i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{a})) .$$

相位因子 $\exp(iM\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}/2)$ 的出现证明了这是一个投影表示，其有一个超选择定则以禁止不同质量态的叠加。从这个方面看，Poincaré群的数学是比伽利略群简单的。然而，没有什么阻止我们通过给伽利略群的李代数增加一个生成元来形式上的扩张伽利略群，这个生成元与其他生成元对易且它的本征值是不同态的质量。在这种情况下，物理态给这个扩张对称群提供了一个普通而非投影表示。所出现的不同仅是某种记号，除了伽利略群的这个重新解释，质量的超选择定则是不需要的。

2.5 单粒子态

我们现在考察根据单粒子态在非齐次Lorentz群下的变换，对它们进行分类。

能动量四矢的分量全部互相对易，所以将物理态矢表达为四动量本征矢的形式是自然地。引入标号 σ 用以标记所有其它的自由度，因此我们考察的态矢 Ψ 满足

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma} . \quad (2.5.1)$$

对于一般态，例如由几个非束缚粒子所构成的态，标号 σ 将不得不包括连续标号和离散标号。我们将此作为单粒子态定义的一部分，即标号 σ 是纯离散的，并且在这里我们将限制在这种情况下。（然而，两个或多个粒子的特定束缚态，例如氢原子的最低态，将被认为是一个单粒子态。它不是一个基本粒子，但是复合粒子与基本粒子的区别在这里是不相关的。）

方程(2.5.1)和(2.4.26)告诉我们在平移下态 $\Psi_{p,\sigma}$ 怎样变换：

$$U(1, \mathbf{a}) \Psi_{p,\sigma} = e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}} \Psi_{p,\sigma} .$$

我们现在必须考察这些态在齐次Lorentz变换下如何变换。

利用(2.4.9)，我们看到一个带有量子齐次Lorentz变换 $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$ 的算符作用在 $\Psi_{p,\sigma}$ 上的效应是产生四动量本征值为 Λp 的本征矢

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda) \left[U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) \right] \Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda) ((\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho P^\rho) \Psi_{p,\sigma} \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} . \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

因此, $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ 必须是态矢 $\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$ 的线性组合:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'} . \quad (2.5.3)$$

一般而言, 通过使用 $\Psi_{p,\sigma}$ 合适的线性组合, 有可能选择 σ 标号使得矩阵 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ 是分块对角的; 换句话说, 使得 $\Psi_{p,\sigma}$ 中的 σ 在任何一个块中, 通过它们自身构建非齐次 Lorentz 群的表示。将特定粒子类型的态与非齐次 Lorentz 群表示的不可约分量等同起来是自然地, 在这种意义上, 不能以这种方式进一步的分解。^{*} 现在, 我们的任务是在非齐次 Lorentz 群的不可约表示下得出系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ 的结构。

由于这个目的, 注意到 p^μ 在所有固有正时 Lorentz 变换 Λ^μ_ν 下保持不变的唯一函数是不变平方 $p^2 \equiv \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$, 以及当 $p^2 \leq 0$ 时 p^0 的符号。因此, 对于每一 p^2 的值, 以及 ($p^2 \leq 0$ 时) p^0 的每一符号, 我们可以选择一个“标准”四矢, 记为 k^μ , 并将这类中的任何一个 p^μ 表示为

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu , \quad (2.5.4)$$

其中 L^μ_ν 是某些标准 Lorentz 变换, 其依赖于 p^μ 且暗中依赖于我们对标准 k^μ 的选择。那么, 我们可以将动量 p 的态 $\Psi_{p,\sigma}$ 定义为

$$\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma} , \quad (2.5.5)$$

其中 $N(p)$ 是一个数值归一化因子, 稍后进行选择。到目前为止, 对于不同动量, σ 标号是怎样关联的, 我们没有进行任何说明; 现在方程(2.5.5)填补了这一空隙。

用一任意齐次 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用在(2.5.5)上, 我们发现

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} \\ &= N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} . \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

最后一步的关键点是 Lorentz 变换 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 使 k 变为 $L(p)k = p$, 然后到 Λp , 然后再回到 k , 所以它属于齐次 Lorentz 群的子群, 该群由使 k^μ 不变的 Lorentz 变换 W^μ_ν 组成:

$$W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu . \quad (2.5.7)$$

这个子群被称为小群。对于满足方程(2.5.7)的任意 W , 我们有

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'} . \quad (2.5.8)$$

系数 $D_{\sigma'\sigma}$ 构成这个小群的一个表示; 即, 对于任意的元素 \bar{W} 和 W , 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma'} &= U(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma} = U(\bar{W})U(W)\Psi_{k,\sigma} \\ &= U(\bar{W})\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma''} = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})\Psi_{k,\sigma'} \end{aligned}$$

^{*}当然, 不同的粒子种类可以对应于同构的表示, 即, 存在多个矩阵 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$, 它们要么是等价的, 要么通过一个相似变换等价。在某些情况下, 将粒子类型定义为较大群的不可约表示是方便的, 而这个较大群将非齐次固有正时 Lorentz 群作为子群包含在内; 例如, 正如我们将看到的, 对于无质量粒子, 其相互作用反应空间反演对称性, 则通常是将包含空间反演的非齐次 Lorentz 群的不可约表示的全分量视为单个粒子类型。

因而

$$D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})D_{\sigma''\sigma}(W) . \quad (2.5.9)$$

特别的，我们可以将方程(2.5.8)应用于小群变换

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) \quad (2.5.10)$$

那么方程(2.5.6)采取这样的形式

$$U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} = N(p) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) U(L(\Lambda p)) \Psi_{k,\sigma'} ,$$

或者，回顾定义(2.5.5):

$$U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} = \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \right) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma'} . \quad (2.5.11)$$

除了归一化的问题，在变换规则(2.5.3)中决定系数 $C_{\sigma'\sigma}$ 的问题已经退化成为寻找小群表示的问题。这种从小群表示中导出一个群例如非齐次Lorentz群的表示的方法，称为诱导表示法⁶。

表2.1给出了标准动量 k^μ 一个方便的选择以及不同四动量类下相对应的小群。

表 2.1 针对不同类四动量的标准动量和相对应的小群。这里 κ 是一正的任意能量，选为1eV。这个小群几乎是相当显然的： $SO(3)$ 是三维中的普通旋转群（剔除了空间反演），这是因为旋转是唯一一个使零动量粒子保持静止的固有正时Lorentz变换，而 $SO(2,1)$ 和 $SO(3,1)$ 分别是 $(2+1)$ 维和 $(3+1)$ 维中的Lorentz群。群 $ISO(2)$ 是欧几里得几何的群，由两维中的旋转和平移组成。对于之后将要解释的 $p^2 = 0$ ，这作为一个子群出现

	标准 k^μ	小群
(a) $p^2 = -M^2 < 0, p^0 > 0$	$(0, 0, 0, M)$	$SO(3)$
(b) $p^2 = -M^2 < 0, p^0 < 0$	$(0, 0, 0, -M)$	$SO(3)$
(c) $p^2 = 0, p^0 > 0$	$(0, 0, \kappa, \kappa)$	$ISO(2)$
(d) $p^2 = 0, p^0 < 0$	$(0, 0, \kappa, -\kappa)$	$ISO(2)$
(e) $p^2 = N^2 > 0$	$(0, 0, N, 0)$	$SO(2,1)$
(f) $p^\mu = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$SO(3,1)$

这六类四动量中，仅有(a), (c)和(f)有已知的物理态解释。对于情况(f)— $p^\mu = 0$ ，无需多言；它描述了真空，在 $U(\Lambda)$ 下显然是不变的。在下文中，我们仅考虑情况(a)和(c)，其分别对应质量 $M > 0$ 和零质量的粒子。

在这里停顿一下，而谈一谈这些态的归一化是很好的。通过量子力学中通常的正交归一化步骤，我们可以选择这些带有标准动量 k^μ 的态是正交的，在这个意义下

$$(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta_{\sigma'\sigma} . \quad (2.5.12)$$

（这里出现 δ -函数是因为 $\Psi_{k,\sigma}$ 和 $\Psi_{k',\sigma'}$ 是一厄密算符本征值分别为 \mathbf{k} 和 \mathbf{k}' 的本征态。）这有一个显然的结果，即在方程(2.5.8)和(2.5.11)中的小群表示必须是幺正的**

$$D^\dagger(W) = D^{-1}(W) . \quad (2.5.13)$$

**对于 $p^2 > 0$ 和 $p^\mu = 0$ 的小群 $SO(2,1)$ 和 $SO(3,1)$ 没有不平凡的有限维幺正表示，因而，如果存在任何动量 p^μ 给定为 $p^2 > 0$ 和 $p^\mu = 0$ 的态在一个小群下有非平凡的变换，这些态的数目将不得不是无限个。

现在，对于任意的动量，标量积是什么呢？利用方程(2.5.5)和(2.5.11)中算符 $U(\Lambda)$ 的么正性，对于标量积，我们发现：

$$\begin{aligned} (\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) &= N(p) \left(U^{-1}(L(p)) \Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma} \right) \\ &= N(p) N^*(p') D \left(W(L^{-1}(p), p') \right)_{\sigma\sigma'}^* \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \end{aligned}$$

其中 $k' \equiv L^{-1}(p) p'$ 。又因为 $k \equiv L^{-1}(p) p$ ，所以 δ -函数 $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ 正比于 $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ 。对于 $p' = p$ ，这里的小群变换是平庸的， $W(L^{-1}(p), p) = 1$ ，因而标量积是

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (2.5.14)$$

将 $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ 与 $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ 关联起来的比例因子留待解决。注意到任意标量函数 $f(p)$ 在四动量满足 $-p^2 = M^2 \geq 0$ 以及 $p^0 > 0$ （即情况(a)或(c)）上的Lorentz不变积分可以写为

$$\begin{aligned} &\int d^4p \delta(p^2 + M^2) \theta(p^0) f(p) \\ &= \int d^3\mathbf{p} dp^0 \delta((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - M^2) \theta(p^0) f(\mathbf{p}, p^0) \\ &= \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}} \end{aligned}$$

($\theta(p^0)$ 是阶跃函数： $x \geq 0$ 时 $\theta(x) = 1$ ， $x < 0$ 时 $\theta(x) = 0$ 。)我们看到当在“质量壳” $p^2 + M^2 = 0$ 上积分时，不变体积元是

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}}. \quad (2.5.15)$$

δ -函数定义为

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= \int F(\mathbf{p}') \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') d^3\mathbf{p}' \\ &= \int F(\mathbf{p}') \left[\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right] \frac{d^3\mathbf{p}'}{\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}} \end{aligned}$$

所以我们看到不变 δ -函数是

$$\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.16)$$

因为 p' 和 p 分别通过一个Lorentz变换 $L(p)$ 与 k' 和 k 相关，那么我们有

$$p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = k^0 \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$$

因而

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \left(\frac{p^0}{k^0} \right) \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.17)$$

归一化因子 $N(p)$ 有时就选择为 $N(p) = 1$ ，但是之后，我们需要在标量积中保持 p^0/k^0 的痕迹。反而，我在这里将采取更加普遍的约定

$$N(p) = \sqrt{k^0/p^0} \quad (2.5.18)$$

这样

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.19)$$

我们现在考虑两种物理感兴趣的情况：质量 $M > 0$ 的粒子，以及零质量粒子。

正定质量

这里的小群是三维旋转群。它的么正表示可以分解为 $2j + 1$ 维不可约表示⁷ $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(R)$ 的直和，其中 $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ 。这些表示可以通过无限小旋转 $R_{ik} = \delta_{ik} + \Theta_{ik}$ 的标准矩阵进行构建，其中 $\Theta_{ik} = -\Theta_{ki}$ 是无限小量：

$$D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(1 + \Theta) = \delta_{\sigma'\sigma} + \frac{i}{2}\Theta_{ik}(J_{ik}^{(j)})_{\sigma'\sigma}, \quad (2.5.20)$$

$$\begin{aligned} (J_{23}^{(j)} \pm iJ_{31}^{(j)})_{\sigma'\sigma} &= (J_1^{(j)} \pm iJ_2^{(j)})_{\sigma'\sigma} \\ &= \delta_{\sigma', \sigma \pm 1} \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}, \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

$$(J_{12}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_3^{(j)})_{\sigma'\sigma} = \sigma \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (2.5.22)$$

其中 σ 取遍值 $j, j-1, \dots, -j$ 。对于质量 $M > 0$ ，自旋为 j 的粒子，方程(2.5.11)现在变成

$$U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma'}, \quad (2.5.23)$$

其中小群元素 $W(\Lambda, p)$ （Wigner旋转）由方程(2.5.10)给定：

$$W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p).$$

为了计算这个旋转，我们需要选择一个“标准推动” $L(p)$ ，其使四动量 $k^\mu = (0, 0, 0, M)$ 变为 p^μ 。一个方便的选择如下

$$\begin{aligned} L_k^i(p) &= \delta_{ik} + (\gamma - 1) \hat{p}_i \hat{p}_k \\ L_0^i(p) &= L_i^0(p) = \hat{p}_i \sqrt{\gamma^2 - 1}, \\ L_0^0(p) &= \gamma, \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

其中

$$\hat{p}_i \equiv \frac{p_i}{|\mathbf{p}|}, \quad \gamma \equiv \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}}{M}.$$

当 Λ_ν^μ 是一个任意的三维旋转 \mathcal{R} 是非常重要的，Wigner旋转 $W(\Lambda, p)$ 对于所有的 p 与 \mathcal{R} 是相同的。为了看到这一点，注意到推动(2.5.24)可以表达为

$$L(p) = R(\hat{\mathbf{p}}) B(|\mathbf{p}|) R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}),$$

其中 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 是一个旋转（之后将以一个标准的方式定义，见方程(2.5.47)）使得第3坐标轴朝向 \mathbf{p} 的方向，并且

$$B(|\mathbf{p}|) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2 - 1} & \gamma \end{bmatrix}.$$

那么对于一个任意的旋转 \mathcal{R}

$$W(\mathcal{R}, p) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}}) B^{-1}(|\mathbf{p}|) R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}}) \mathcal{R} R(\hat{\mathbf{p}}) B(|\mathbf{p}|) R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}).$$

但是旋转 $R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}R(\hat{\mathbf{p}})$ 是第3轴朝向 $\hat{\mathbf{p}}$ 方向，然后朝向 $\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}}$ 方向，然后再回到第3轴，所以，它必须是绕第3轴角度为 θ 的一个旋转

$$R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}R(\hat{\mathbf{p}}) = R(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于 $R(\theta)$ 与 $B(|\mathbf{p}|)$ 对易，这现在给出

$$W(\mathcal{R}, p) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R(\theta)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})R(\theta)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})$$

因而

$$W(\mathcal{R}, p) = \mathcal{R}$$

正如所要证明的。因此，一个有质量运动粒子的态（以及通过扩张所得到的多粒子态）在旋转下像在非相对论量子力学中那样有相同的变换。这是另一条好消息——球谐振子的全部设置，Clebsch-Gordon系数等等，可以成批量的从非相对论量子力学迁移到相对论量子力学。

零质量

首先，我们必须得到小群群元的结构。考察一个任意的小群元 W^μ_ν ，并有 $W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu$ ，其中 k^μ 是该情况下的标准四矢， $k^\mu = (0, 0, 1, 1)$ 。作用在一个类时四矢 $t^\mu = (0, 0, 0, 1)$ 上的这类Lorentz变换必须得出一个四矢 Wt ，其长度以及与 $Wk = k$ 的标量积必须与 t 的长度以及 t 与 k 的标量积是相同的：

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = -1, \\ (Wt)^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu = -1.$$

任何满足第二个条件的四矢可以写为

$$(Wt)^\mu = (\alpha, \beta, \zeta, 1 + \zeta)$$

那么第一个条件得出如下的关系

$$\zeta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) / 2. \quad (2.5.25)$$

由此得出， W^μ_ν 在 t^ν 上的效应与如下Lorentz变换是相同的

$$S^\mu_\nu(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1 + \zeta \end{bmatrix}. \quad (2.5.26)$$

这并不意味着 W 等于 $S(\alpha, \beta)$ ，但是它却意味着 $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ 是一保持类时四矢 $(0, 0, 0, 1)$ 不变的Lorentz变换，因而是一个纯旋转。另外， S^μ_ν 像 W^μ_ν 那样保持类光四矢 $(0, 0, 1, 1)$ 不变，所以 $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ 必须是绕第3轴角度为 θ 的一个旋转

$$S^{-1}(\alpha, \beta)W = R(\theta), \quad (2.5.27)$$

其中

$$R_{\nu}^{\mu}(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

因而，小群最普遍生成元的形式是

$$W(\theta, \alpha, \beta) = S(\alpha, \beta) R(\theta) . \quad (2.5.28)$$

这是什么群呢？我们注意到 $\theta = 0$ 或 $\alpha = \beta = 0$ 的变换构成子群：

$$S(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) S(\alpha, \beta) = S(\bar{\alpha} + \alpha, \bar{\beta} + \beta) \quad (2.5.29)$$

$$R(\bar{\theta}) R(\theta) = R(\bar{\theta} + \theta) . \quad (2.5.30)$$

这些子群是阿贝尔的——即它们的全部群元互相对易。更进一步， $\theta = 0$ 的子群是不变的，这是说，它的元素通过这个群的任何一个成员变换为相同子群的另一元素

$$R(\theta) S(\alpha, \beta) R^{-1}(\theta) = S(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta, -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) . \quad (2.5.31)$$

通过方程(2.5.29)—(2.5.31)我们可以得到任意群元的乘积。读者将意识到，这些是群 $ISO(2)$ 的乘积规则，该群由二维中平移（通过矢量 (α, β) ）和旋转（通过角度 θ ）组成。

没有不变阿贝尔子群的群有一些简单的性质，并且因为这个原因被称为是半单的。正如我们已经看到的，小群 $ISO(2)$ 像非齐次Lorentz群一样不是半单的，这导致了有趣的复杂性。首先，先看一下 $ISO(2)$ 的Lie代数。对于无限小的 θ, α, β ，一般群元是

$$W(\theta, \alpha, \beta)_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu} ,$$

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

通过(2.4.3)，我们看到相对应的Hilbert空间算符是

$$U(W(\theta, \alpha, \beta)) = 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3 , \quad (2.5.32)$$

其中 A 和 B 是厄密算符

$$A = -J^{13} + J^{10} = J_2 + K_1 , \quad (2.5.33)$$

$$B = -J^{23} + J^{20} = -J_1 + K_2 , \quad (2.5.34)$$

并且，像以前一样， $J_3 = J_{12}$ 。无论是通过(2.4.18)—(2.4.20)，还是直接从方程(2.5.29)—(2.5.31)，我们看到这些生成元有如下的对易子

$$[J_3, A] = +iB , \quad (2.5.35)$$

$$[J_3, B] = -iA , \quad (2.5.36)$$

$$[A, B] = 0 . \quad (2.5.37)$$

由于 A 和 B 是对易的厄密算符，所以它们（类似于非齐次Lorentz群的动量生成元）可以同时被态 $\Psi_{k,a,b}$ 对角化

$$\begin{aligned} A\Psi_{k,a,b} &= a\Psi_{k,a,b}, \\ B\Psi_{k,a,b} &= b\Psi_{k,a,b}. \end{aligned}$$

问题是如果我们发现 A, B 的这样一组非零本征值，那么我们就找到了一个全连续统。通过方程(2.5.31)，我们有

$$\begin{aligned} U(R(\theta))AU^{-1}(R(\theta)) &= A \cos \theta - B \sin \theta, \\ U(R(\theta))BU^{-1}(R(\theta)) &= A \sin \theta + B \cos \theta, \end{aligned}$$

因而，对于任意的 θ ，

$$\begin{aligned} A\Psi_{k,a,b}^\theta &= (a \cos \theta - b \sin \theta) \Psi_{k,a,b}^\theta, \\ B\Psi_{k,a,b}^\theta &= (a \sin \theta + b \cos \theta) \Psi_{k,a,b}^\theta, \end{aligned}$$

其中

$$\Psi_{k,a,b}^\theta \equiv U^{-1}(R(\theta)) \Psi_{k,a,b}.$$

无质量粒子没有被观测到有任何像 θ 一样的连续自由度；为了避免这类的连续态，我们必须要求物理态（现在称为 $\Psi_{k,\sigma}$ ）是 A 和 B 的 $a = b = 0$ 的本征矢量：

$$A\Psi_{k,\sigma} = B\Psi_{k,\sigma} = 0. \quad (2.5.38)$$

那么，这些态通过剩余生成元的本征值进行区分

$$J_3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}. \quad (2.5.39)$$

因为动量 k 在第3方向上， σ 给出角动量在运动方向上的分量，或者说，螺度。

我们现在准备就绪去计算一般无质量粒子态的Lorentz变换性质。首先，注意到通过2.2节的普遍讨论，对于有限的 α 和 β ，方程(2.5.32)推广为

$$U(S(\alpha, \beta)) = \exp(i\alpha A + i\beta B) \quad (2.5.40)$$

对于有限的 θ ，则是

$$U(R(\theta)) = \exp(iJ_3\theta). \quad (2.5.41)$$

小群的任意一个元素 W 可以写为(2.5.28)的形式，所以

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\alpha A + i\beta B)\exp(i\theta J_3)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\theta\sigma)\Psi_{k,\sigma}$$

因而，方程(2.5.8)给出

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma},$$

其中， θ 是通过将 W 按方程(2.5.28)那样表达所定义的角度。对于螺度任意的无质量粒子，其Lorentz变换规则现在由方程(2.5.11)和(2.5.18)给出

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma} \quad (2.5.42)$$

其中 $\theta(\Lambda, p)$ 定义为

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) \equiv S(\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p)) R(\theta(\Lambda, p)) . \quad (2.5.43)$$

在5.9节我们将看到电磁规范不变性源于由 α 和 β 参量化的小群部分。

到现在为止，我们还没有遇到什么理由阻止无质量粒子的螺度 σ 取任意的实数。正如我们将在2.7节将看到的，正如有质量粒子一样，存在一些拓扑考虑约束 σ 的允许值为整数或半整数。

为了计算 Λ 和 p 给定的小群元素(2.5.43)，（并使得我们能够在下一节计算时间反演或空间反演在这些态上的效应）对于使 $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ 变到 p^μ 的标准Lorentz变换，我们需要固定一个约定。这个变换被选为如下的形式将是方便的

$$L(p) = R(\hat{\mathbf{p}}) B(|\mathbf{p}|/\kappa) \quad (2.5.44)$$

其中， $B(u)$ 是沿第3方向上的纯推动：

$$B(u) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u^2 + 1)/2u & (u^2 - 1)/2u \\ 0 & 0 & (u^2 - 1)/2u & (u^2 + 1)/2u \end{bmatrix} \quad (2.5.45)$$

而 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 是一个使第3轴转向单位矢量 $\hat{\mathbf{p}}$ 的方向的纯旋转。例如，假定我们令 $\hat{\mathbf{p}}$ 有极角 θ 和方位角 ϕ ：

$$\hat{\mathbf{p}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) . \quad (2.5.46)$$

那么，我们可以取 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 为一个绕第2轴角度为 θ 的旋转，其使 $(0, 0, 1)$ 变为 $(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ ，再跟着一个绕第3轴角度为 ϕ 的旋转：

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})) = \exp(-i\phi J_3) \exp(-i\theta J_2) , \quad (2.5.47)$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi$ ， $0 \leq \phi < 2\pi$ 。（我们给出 $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$ 而不是 $R(\hat{\mathbf{p}})$ ，以及 ϕ 和 θ 范围的指定，是因为 θ 或 ϕ 的 2π 偏移将会给出相同的旋转 $R(\hat{\mathbf{p}})$ ，但是对于 $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$ ，当其作用在一个半整数自旋态上，将会产生一个符号差异。）由于(2.5.47)是一个旋转，并使第3轴转向方向(2.5.46)，所以这类 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 的其他选择与这个选择至多相差一个绕第3轴的初始旋转，其仅对应于单粒子态的一个相位重定义。

注意到螺度是Lorentz不变的；一个螺度 σ 给定的无质量粒子在所有惯性系中看起来是相同的（除了它的动量）。确实，将不同螺度的无质量粒子视为不同类型的粒子将被证明是合理的。然而，正如我们将在下一节看到的，螺度相反的粒子通过空间反演对称性相关联。因此，由于电磁力和引力是服从空间反演对称性的，与电磁现象相联系的螺度为 ± 1 的无质量粒子都被称为光子，而螺度为 ± 2 的，被认为与引力相联系的无质量粒子都被称为引力子。另一方面，在核 β 衰变中放射的螺度为 $\pm 1/2$ 的可能无质量粒子（除了引力）没有反应空间反演对称性的相互作用，所以这些粒子被赋予了不同的名字：对于螺度 $-1/2$ 的粒子，称为中微子，对于螺度 $+1/2$ 的粒子，则被称为反中微子。

即使无质量粒子的螺度是Lorentz不变的，态本身却不是的。特别的，由于方程(2.5.42)中的螺度相关因子 $\exp(i\sigma\theta)$ ，相反螺度的单粒子态线性叠加所形成的态通过一个Lorentz变换将会变

成一个不同的叠加。例如，一个普通的四动量为 p 的单光子态可以写为

$$\Psi_{p;\alpha} = \alpha_+ \Psi_{p,+1} + \alpha_- \Psi_{p,-1},$$

其中

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1.$$

这个一般情况是椭圆偏振中的一个，其中 $|\alpha_{\pm}|$ 非零且不相等。圆偏振是 α_+ 和 α_- 有一个为零的极端情况，而线偏振是一种相反的极端情况，有 $|\alpha_+| = |\alpha_-|$ 。 α_+ 和 α_- 的总相位没有物理意义，并对于线性偏振可以调整使得 $\alpha_- = \alpha_+^*$ ，但是相对相位仍然是重要的。确实，对于 $\alpha_- = \alpha_+^*$ 的线性偏振， α_+ 的相位可以等价于偏振面间与某些垂直于 \mathbf{p} 的固定参考方向之间的角度。方程(2.5.42)证明了在一个Lorentz变换 Λ_{ν}^{μ} 下，这个角度旋转了 $\theta(\Lambda, p)$ 。面偏振引力子可以以一种类似的方式定义，而在这里方程(2.5.42)有这样的结果：Lorentz变换 Λ 将偏振面旋转了角度 $2\theta(\Lambda, p)$ 。

2.6 空间反演和时间反演

在2.3节我们看到，任何齐次Lorentz变换即是固有的又是正时的（即， $\text{Det } \Lambda = +1$ 且 $\Lambda_0^0 \geq +1$ ）其它的则等价于一个固有正时变换乘以 \mathcal{P} 或 \mathcal{T} 或 \mathcal{PT} ，其中 \mathcal{P} 和 \mathcal{T} 是空间反演变换和时间反演变换

$$\mathcal{P}_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poincaré群的基本乘积规则曾被认为是不言而喻的

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \Lambda a + \bar{a})$$

即使 Λ 和/或 $\bar{\Lambda}$ 涉及 \mathcal{P} 或 \mathcal{T} 或 \mathcal{PT} 的因子，这也是适用的。特别的，我们相信存在对应于 \mathcal{P} 和 \mathcal{T} 本身的算符：

$$\mathbf{P} \equiv U(\mathcal{P}, 0) \quad \mathbf{T} \equiv U(\mathcal{T}, 0)$$

使得对于任意的固有正时Lorentz变换 Λ_{ν}^{μ} 和平移 a^{μ} 有

$$\mathbf{P}U(\Lambda, a)\mathbf{P}^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a), \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{T}U(\Lambda, a)\mathbf{T}^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a). \quad (2.6.2)$$

这些变换规则包含我们称 \mathcal{P} 或 \mathcal{T} 是“守恒”时的大部分意义。

在1956-1957年，仅在弱作用效应可以忽略的近似下，例如那些产生核 β 衰变的过程，对于 \mathbf{P} 这是正确的变得可以理解⁸。时间反演幸存了一段时间，但是在1964年，出现了一些间接的证据⁹证明 \mathbf{T} 的这些性质也仅是近似的满足。（见3.3节。）在下文中，我们将假装满足方程(2.6.1)和(2.6.2)的算符 \mathbf{P} 和 \mathbf{T} 实际上存在，但是应该铭记于心这仅是一个近似。

让我们将方程(2.6.1)和(2.6.2)应用于无限小变换的情况，即，

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu} \quad a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$$

其中 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ 和 ϵ_μ 均是无限小的。利用(2.4.3)，以及方程(2.6.1)和(2.6.2)中 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ϵ_ρ 的系数相等，我们获得了Poincaré生成元的P和T的变换性质

$$PiJ^{\rho\sigma}P^{-1} = i\mathcal{P}_\mu^\rho \mathcal{P}_\nu^\sigma J^{\mu\nu}, \quad (2.6.3)$$

$$PiP^\rho P^{-1} = i\mathcal{P}_\mu^\rho P^\mu, \quad (2.6.4)$$

$$TiJ^{\rho\sigma}T^{-1} = i\mathcal{T}_\mu^\rho \mathcal{T}_\nu^\sigma J^{\mu\nu}, \quad (2.6.5)$$

$$TiP^\rho T^{-1} = i\mathcal{T}_\mu^\rho P^\mu. \quad (2.6.6)$$

这与方程(2.4.8)和(2.4.9)很像，除了我们没有消掉方程两边的*i*因子，这是因为到现在，我们还没有决定P和T是线性和么正的还是反线性和反么正的。

这个判断是一个简单的判断。在方程(2.6.4)中令 $\rho = 0$ 给出

$$PiHP^{-1} = iH,$$

其中 $H \equiv P^0$ 是能量算符。如果P是反线性和反么正的，那么它将与*i*反对易，所以 $PHP^{-1} = -H$ 。然而对于任意能量 $E > 0$ 的态 Ψ ，将不得不存在能量为 $-E < 0$ 的另一态 $P^{-1}\Psi$ 。由于不存在负能态（能量小于真空的态），所以我们被迫选择其他的可能性：P是线性和么正的，并且与*H*对易而非反对易。

另一方面，在方程(2.6.6)中令 $\rho = 0$ 得出

$$TiHT^{-1} = -iH.$$

如果我们假定T是线性和么正的，那么我们将简单的消掉*i*，并得到 $THT^{-1} = -H$ ，这是又一灾难性的结果，对于任何能量为*E*的态 Ψ ，总存在另一态 $T^{-1}\Psi$ ，其能量为 $-E$ 。为了避免这个，我们不得不在这里得出结论：T是反线性和反么正的。

既然，我们已经确定了P是线性的而T是反线性的，我们可以用生成元(2.4.15)—(2.4.17)三维记法的形式方便地重写方程(2.6.3)—(2.6.6)

$$PJP^{-1} = +\mathbf{J}, \quad (2.6.7)$$

$$PKP^{-1} = -\mathbf{K}, \quad (2.6.8)$$

$$PPP^{-1} = -\mathbf{P}, \quad (2.6.9)$$

$$TJT^{-1} = -\mathbf{J}, \quad (2.6.10)$$

$$TKT^{-1} = +\mathbf{K}, \quad (2.6.11)$$

$$TPT^{-1} = -\mathbf{P}, \quad (2.6.12)$$

以及，正如之前所证明的，

$$PHP^{-1} = THT^{-1} = H. \quad (2.6.13)$$

P应该保持 \mathbf{J} 的符号在物理上是合理的，这是因为至少轨道部分是两个矢量的矢量积 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ，在空间坐标系的一个反演下，这两个均改变符号。另一方面，T翻转 \mathbf{J} ，这是因为在时间反演下，观察者将会看到所有物体以相反方向旋转。另外，注意到方程(2.6.10)与角动量对易关系 $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}$ 相容，这是因为T不仅翻转 \mathbf{J} ，也翻转*i*。读者可以轻松的证明方程(2.6.7)—(2.6.13)与所有的对易关系(2.4.18)—(2.4.24)相容。

现在，我们来考察P和T对单粒子态做了什么：

P : $M > 0$

单粒子态 $\Psi_{k,\sigma}$ 定义为 \mathbf{P} 、 H 和 J_3 本征值分别为0、 M 和 σ 的本征矢。从方程(2.6.7)、(2.6.9)和(2.6.13)，我们看到这对于态 $\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma}$ 必须是正确的，因而（除非简并）这些态仅相差一个相位

$$\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma \Psi_{k,\sigma}$$

其相位因子 ($|\eta| = 1$) 可能与自旋相关，也可能与自旋无关。为了看到 η_σ 是 σ 独立的，从(2.5.8)、(2.5.20)和(2.5.21)，我们看到

$$(J_1 \pm iJ_2) \Psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} \Psi_{k,\sigma \pm 1}, \quad (2.6.14)$$

其中 j 是粒子自旋。在其两边用 \mathbf{P} 作用，我们发现

$$\eta_\sigma = \eta_{\sigma \pm 1}$$

因而， η_σ 实际上是与 σ 独立的。我们因此写出

$$\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta \Psi_{k,\sigma} \quad (2.6.15)$$

其中 η 是一相位，被称为内禀宇称，仅依赖于 \mathbf{P} 所作用的粒子种类。

为了得到有限动量态，我们必须使用对应于“推动”(2.5.24)的么正算符 $U(L(p))$ ：

$$\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0} U(L(p)) \Psi_{k,\sigma}.$$

我们注意到

$$\begin{aligned} \mathcal{P}L(p) \mathcal{P}^{-1} &= L(\mathcal{P}p) \\ \mathcal{P}p &= (-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}) \end{aligned}$$

所以，利用方程(2.6.1)和(2.6.15)，我们有

$$\mathbf{P}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0} U(L(\mathcal{P}p)) \eta \Psi_{k,\sigma}$$

或者，换种形式

$$\mathbf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}. \quad (2.6.16)$$

T : $M > 0$

从方程(2.6.10)、(2.6.12)和(2.6.13)中，我们看到T在零动量单粒子态 $\Psi_{k,\sigma}$ 的效应是得到一个态，其有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T\Psi_{k,\sigma}) &= 0, \\ H(T\Psi_{k,\sigma}) &= M(T\Psi_{k,\sigma}), \\ J_3(T\Psi_{k,\sigma}) &= -\sigma(T\Psi_{k,\sigma}), \end{aligned}$$

因而

$$\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma},$$

其中, ζ_σ 是一个相位因子。将算符 \mathbf{T} 应用到(2.6.14), 而 \mathbf{T} 又是与 \mathbf{J} 和 i 反对易的, 我们得到

$$(-J_1 \pm iJ_2) \zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} \zeta_{\sigma \pm 1} \Psi_{k,-\sigma \mp 1}.$$

再一次在方程左边使用方程(2.6.14), 我们看到平方根因子抵消了, 因而

$$-\zeta_\sigma = \zeta_{\sigma \pm 1}.$$

我们将这个解写为 $\zeta_\sigma = \zeta (-)^{j-\sigma}$, 其中 ζ 是另一仅依赖于粒子种类的相位:

$$\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta (-)^{j-\sigma} \Psi_{k,-\sigma}. \quad (2.6.17)$$

然而, 时间反演相位 ζ 不像“内禀宇称” η 那样, 它是没有物理意义的。这是因为我们可以通过一个相位改变来重定义单粒子态

$$\Psi_{k,\sigma} \rightarrow \Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{1/2} \Psi_{k,\sigma}.$$

在这样的形式下, 相位 ζ 从变换规则中被消除了

$$\mathbf{T}\Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{*1/2} \mathbf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta^{*1/2} \zeta (-)^{j-\sigma} \Psi_{k,-\sigma} = (-)^{j-\sigma} \Psi'_{k,-\sigma}.$$

在下文中, 我们将在方程(2.6.17)中保留相位任意的 ζ , 仅是为了在选择单粒子态相位时慎重的作出决定, 但应该记住相位不是真正重要的。

为了处理有限动量态, 我们再一次的使用“推动”(2.5.24)。注意到

$$\begin{aligned} \mathcal{T}L(p) \mathcal{T}^{-1} &= L(\mathcal{P}p), \\ \mathcal{P}p &= \left(-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} \right). \end{aligned}$$

(即, 在 L^μ_ν 中改变带有奇数个时间指标元素的符号与改变带有奇数个空间指标元素的符号是相同的。) 利用方程(2.6.2)和(2.5.5), 那么我们有

$$\mathbf{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta (-)^{j-\sigma} \Psi_{p,-\sigma}. \quad (2.6.18)$$

$\mathbf{P} : \mathbf{M} = 0$

态 $\Psi_{k,\sigma}$, 定义为 P^μ 本征值为 $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ 以及 J_3 本征值为 σ 的本征矢, 当宇称算符 \mathbf{P} 作用在这个态上, 其所产生的态, 四动量为 $(\mathcal{P}k)^\mu = (0, 0, -\kappa, \kappa)$ 而 J_3 则等于 σ 。因此, 它使一个螺度(自旋在运动方向上的投影) σ 的态变为螺度为 $-\sigma$ 的态。正如之前提到的, 这证明了空间反演对称性的存在要求任何种类的螺度非零的无质量粒子都必须伴随着另一螺度相反的粒子种类。由于 \mathbf{P} 并不保持标准动量不变, 考察算符 $U(R_2^{-1})\mathbf{P}$ 反而是方便的, 其中 R_2 是一也使 k 变为 $\mathcal{P}k$ 的旋转, 可以方便的选为绕第2轴的 180° 旋转

$$U(R_2) = \exp(i\pi J_2). \quad (2.6.19)$$

既然 $U(R_2^{-1})$ 反转了 J_3 的符号, 我们有

$$U(R_2^{-1})\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma\Psi_{k,-\sigma} \quad (2.6.20)$$

其中, η_σ 是一相位因子。现在 $R_2^{-1}\mathcal{P}$ 与Lorentz“推动”(2.5.45)对易, 并且 \mathcal{P} 与使第3轴朝向 \mathbf{p} 方向的旋转 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 对易, 所以, 通过用 \mathbf{P} 作用于(2.5.5), 我们发现了, 对于一般四动量 p^μ

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)U(R_2^{-1})\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma}. \end{aligned}$$

注意到 $R(\hat{\mathbf{p}})R_2$ 是使第3轴朝向 $-\hat{\mathbf{p}}$ 方向的旋转, 但是 $U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2)$ 并不等于 $U(R(-\hat{\mathbf{p}}))$ 。根据(2.5.47),

$$U(R(-\hat{\mathbf{p}})) = \exp\left(-i(\phi \pm \pi)J_3\right)\exp\left(-i(\pi - \theta)J_2\right)$$

其中, 根据 $0 \leq \phi < \pi$ 还是 $\pi \leq \phi < 2\pi$, 将轴向角选为 $\phi + \pi$ 或 $\phi - \pi$, 使得轴向角保持在0到 2π 的范围内。那么

$$\begin{aligned} U^{-1}\left(R(-\hat{\mathbf{p}})\right)U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2\right) &= \exp\left(i(\pi - \theta)J_2\right) \\ &\quad \times \exp\left(i(\phi \pm \pi)J_3\right)\exp(-i\phi J_3)\exp(-i\theta J_2)\exp(i\pi J_2) \\ &= \exp\left(i(\pi - \theta)J_2\right)\exp(\pm i\pi J_3)\exp\left(i(\pi - \theta)J_2\right). \end{aligned}$$

但是一个绕第3轴的 $\pm 180^\circ$ 的旋转反转了 J_2 的符号, 所以

$$U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2\right) = U\left(R(-\hat{\mathbf{p}})\right)\exp(\pm i\pi J_3). \quad (2.6.21)$$

另外, $R(-\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\kappa)$ 正是 $\mathcal{P}p = (-\mathbf{p}, p^0)$ 方向上的标准推动 $L(\mathcal{P}p)$ 。那么, 我们最终有

$$\mathbf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} \quad (2.6.22)$$

其中, 根据 \mathbf{p} 的第二个分量是正的还是负的, 相位分别为 $-\pi\sigma$ 或 $+\pi\sigma$ 。对于半整数自旋的无质量粒子, 宇称算符中符号的特殊改变是因为, 对于曾被用于定义动量任意的无质量粒子态的旋转, 方程(2.5.47)中所采取的约定。因为旋转群不是单连通的, 一些这样的不连续性是不可避免的。

$\mathbf{T} : \mathbf{M} = \mathbf{0}$

态 $\Psi_{k,\sigma}$ 对于算符 P^μ 和 J_3 有本征值 $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ 和 σ , 当时间反演算符 \mathbf{T} 作用其上时, 所得出的态对于 P^μ 和 J_3 有本征值 $(\mathcal{P}k)^\mu = (0, 0, -\kappa, \kappa)$ 和 $-\sigma$ 。因此, \mathbf{T} 并不改变螺度 $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{k}}$, 并且也没有说明螺度为 σ 的无质量粒子是否有螺度为 $-\sigma$ 的其他粒子伴随。因为 \mathbf{T} 像 \mathbf{P} 一样并不使标准四动量 k 不变, 考察生成元 $U(R_2^{-1})\mathbf{T}$ 是方便的, 其中 R_2 是旋转(2.6.19), 其也使 k 变为 $\mathcal{P}k$ 。这个生成元与 J_3 对易, 所以

$$U(R_2^{-1})\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma\Psi_{k,\sigma} \quad (2.6.23)$$

其中 ζ_σ 是另一相位。因为 $R_2^{-1}\mathcal{S}$ 与“推动”(2.5.45)对易, 而 \mathcal{S} 与旋转 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 对易, 当其与 \mathbf{T} 一起作用在态(2.5.5)上时给出

$$\mathbf{T}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left[R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right]\zeta_\sigma\Psi_{k,\sigma}. \quad (2.6.24)$$

利用方程(2.6.21), 最终得出

$$\mathbf{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}. \quad (2.6.25)$$

再一次的, 正负号分别对应于 \mathbf{p} 的第2分量是正的还是负的。

* * *

一个非常有趣的事情是，时间反演算符的平方 T^2 在有质量单粒子态和无质量单粒子态上的作用都是非常简单的。利用方程(2.6.18)，以及 T 是反么正的，我们看到对于有质量单粒子态：

$$T^2\Psi_{p,\sigma} = T\zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} = \zeta^*(-)^{j-\sigma}\zeta(-)^{j+\sigma}\Psi_{p,\sigma}$$

或者

$$T^2\Psi_{p,\sigma} = (-)^{2j}\Psi_{p,\sigma} . \quad (2.6.26)$$

对于无质量粒子我们会得到相同的结果。如果 \mathbf{p} 的第2分量是正的，那么 $\mathcal{P}\mathbf{p}$ 的第二分量是负的，反之亦然。所以，方程(2.6.25)给出

$$\begin{aligned} T^2\Psi_{p,\sigma} &= T\zeta_{\sigma}\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} = \zeta_{\sigma}^*\exp(\mp i\pi\sigma)\zeta_{\sigma}\exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma} \\ &= \exp(\mp 2i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma} . \end{aligned}$$

只要 σ 是整数或半整数，这可以重写为

$$T^2\Psi_{p,\sigma} = (-)^{2|\sigma|}\Psi_{p,\sigma} . \quad (2.6.27)$$

我们通常认为无质量粒子螺度的绝对值是它的“自旋”，所以方程(2.6.27)与方程(2.6.26)是相同的。

这个结果有个很有趣的推论。当 T^2 作用在无相互作用粒子系统的任意态 Ψ 上时，无论是有质量的还是无质量的，对于每一粒子都会产生因子 $(-)^{2j}$ 或 $(-)^{2|\sigma|}$ 。因此，如果这个态包含奇数个自旋或螺度为半整数的粒子（加上任意个自旋或螺度为整数的粒子），我们将得到一个总的符号改变

$$T^2\Psi = -\Psi . \quad (2.6.28)$$

如果我们现在“打开”各种相互作用，假定这些相互作用在时间反演下不变，即使它们不遵守旋转不变性，这个结果也将会保留。（例如，即使我们系统处在任意的静引力场和静电场，这些讨论可以应用。）现在，假定态 Ψ 是哈密顿量的本征态。由于 T 与哈密顿量对易， $T\Psi$ 也将是这个哈密顿量的本征态。它们是同一个态吗？如果是，那么 $T\Psi$ 与 Ψ 的差异仅是一个相位

$$T\Psi = \zeta\Psi ,$$

但是

$$T^2\Psi = T(\zeta\Psi) = \zeta^*T\Psi = |\zeta|^2\Psi = \Psi ,$$

这与方程(2.6.28)矛盾。我们看到任何满足方程(2.6.28)的能量本征态都与另一相同能量的本征态简并。这是所谓的“Kramers（克拉莫斯）简并性”¹⁰。当然，如果系统处在旋转不变的环境下，这个结论是平庸的，这是因为这个系统的任何态，其总角动量将不得不是半整数的，因而将有 $2j + 1 = 2, 4, \dots$ 个简并态。一个令人惊奇的结果是，即使旋转不变性被诸如静电场的外场扰动了，只要这些场在 T 下不变，二度简并性起码会保留下来。特别的，如果粒子有电偶极矩或引力偶极矩，那么在静电场和静引力场中，它的 $2j + 1$ 个自旋态的简并性将整体地被消除。使得这样的偶极矩被时间反演不变性所禁止。

为了完整，本应提及 P 和 T 对质量相同的粒子多重态会有更加复杂的效应。这种可能性将在本章的附录C进行考察。不过还没有已知的物理相关的例子。

2.7 投影表示*

我们现在回到2.2节所提到的那个可能性，一个对称群可以投影表示到物理态上；即，对称群的元素 T, \bar{T} 等可以通过么正算符 $U(T), U(\bar{T})$ 等被表示在物理Hilbert空间上，而这些算符满足如下的合成规则

$$U(T)U(\bar{T}) = \exp\left(i\phi(T, \bar{T})\right)U(T, \bar{T}) \quad (2.7.1)$$

其中 ϕ 是一实相位。（这里所使用的上划线仅是为了区分不同的对称算符。）方程(2.7.1)中相位所满足的基本要求是结合律

$$U(T_3)(U(T_2)U(T_1)) = (U(T_3)U(T_2))U(T_1) ,$$

强加于 ϕ 的对应条件是

$$\phi(T_2, T_1) + \phi(T_3, T_2T_1) = \phi(T_3, T_2) + \phi(T_3T_2, T_1) . \quad (2.7.2)$$

当然，任何形式如下的相位都将自动满足方程(2.7.2)

$$\phi(T, \bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T}) \quad (2.7.3)$$

通过对 $U(T)$ 做如下的替换，一个带有这样相位的投影表示可以被替换为普通表示

$$\tilde{U}(T) \equiv U(T) \exp\left(i\alpha(T)\right)$$

使得

$$\tilde{U}(T)\tilde{U}(\bar{T}) = \tilde{U}(T\bar{T}) .$$

满足方程(2.7.2)的函数 $\phi(T, \bar{T})$ 的任何集合，以及相差形式为(2.7.3)的函数 $\Delta\phi(T, \bar{T})$ ，被称为“2-闭上链”（two-cocycle）。一个平庸的闭上链是包含函数 $\phi = 0$ 的那个，因而由形式为(2.7.3)的函数构成，其可以通过 $U(T)$ 的重定义而被消除。这里我们所感兴趣的是：是否一个对称群允许任何非平庸的2-闭上链；即，是否在物理Hilbert空间上有一个表示是内禀投影的，在这个意义下，相位 $\phi(T, \bar{T})$ 不能以这种方式被消除。

为了回答这个问题，首先考察方程(2.7.11)中相位 ϕ 在无限小旋转的生成元对易关系上的效应是有用的。当 \bar{T} 或 T 是单位算符，相位 ϕ 很明显为零

$$\phi(T; 1) = \phi(1, \bar{T}) = 0 . \quad (2.7.4)$$

当 \bar{T} 和 T 很接近单位算符时，相位必须很小。用坐标 θ^a 来参数化群元（正如2.2节中所做的），并有 $T(0) \equiv 1$ ，方程(2.7.4)告诉我们 $\phi(T(\theta), T(\bar{\theta}))$ 在 $\theta = \bar{\theta} = 0$ 附近的展开是必须从 $\theta\bar{\theta}$ 阶项开始：

$$\phi(T(\theta), T(\bar{\theta})) = f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b + \dots , \quad (2.7.5)$$

其中 f_{ab} 是实常数。将这个展开式代入方程(2.7.1)的级数展开式，并重复导出(2.2.22)的步骤，我们现在有

$$[t_b, t_c] = iC^a{}_{bc}t_a + iC_{bc}1 , \quad (2.7.6)$$

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外，可以在第一次阅读时省略。

其中 C_{bc} 是反对称系数

$$C_{bc} = -f_{bc} + f_{cb} . \quad (2.7.7)$$

对易关系右边出现的正比于单位元的项（所谓的中心荷）是对应于群的投影表示中有相位出现的Lie代数。

常数 C_{bc} 和 C_{bc}^a 服从一个重要约束，这一约束缘于Jacobi等式。取(2.7.6)与 t_d 的对易子，并加上将 b, c, d 替换为 c, d, b 和 d, b, c 后相同的表达式，左边三个双重对易子的和恒等为零，因而

$$C_{bc}^a C_{ad}^e + C_{cd}^a C_{ab}^e + C_{db}^a C_{ac}^e = 0 \quad (2.7.8)$$

以及

$$C_{bc}^a C_{ad} + C_{cd}^a C_{ab} + C_{db}^a C_{ac} = 0 . \quad (2.7.9)$$

方程(2.7.9)对于 C_{ab} 有一类显然的非零解：

$$C_{ab} = C_{ab}^e \phi_e , \quad (2.7.10)$$

其中 ϕ_e 是任意一组实常数。对于这些解，我们可以通过生成元重定义从方程(2.7.6)中消除中心荷

$$t_a \rightarrow \tilde{t}_a \equiv t_a + \phi_a . \quad (2.7.11)$$

那么新的生成元满足没有中心荷的对易关系

$$[\tilde{t}_b, \tilde{t}_c] = i C_{bc}^a \tilde{t}_a . \quad (2.7.12)$$

一个给定的Lie代数可能也可能不允许除了方程(2.7.10)之外方程(2.7.9)有其它的解。

现在，我们可以陈述控制内禀投影表示是否出现的关键定理。一个给定群的任意表示 $U(T)$ 的相位可以进行选择使得方程(2.7.1)中的 $\phi = 0$ ，如果以下两个条件被满足：

(a) 在这表示中，群的生成元可以重定义（像方程(2.7.11)中那样），使得可以消除Lie代数中所有的中心荷。

(b) 群是单连通的，即，任意两个群元可以被处在群内的一条路径连接，并且任意两个这样的路径可以连续的变换到彼此。（一个等价的表述是开始并结束于同一群元的圈可以连续地收缩至一个点。）

这个定理在该章的附录B中进行证明，它也提供了群是否是单连通的一个判断。它证明了仅有两种方式（不独有的）会使内禀投影表示产生：一种是代数的，因为投影表示的群非常接近单位元，一种是拓扑的，因为这个群不是单连通的，因而从1到 T 的路径和从 T 到 \bar{T} 的路径不能连续的变形成从1到 $T\bar{T}$ 的其它某个路径。在后一种情况下，方程(2.7.1)中的相位 ϕ 依赖于标准路径的选择，使得从原点到达不同的群元，这被用来定义对应的 U 算符。

现在，针对非齐次Lorentz群的特殊情况，依次考察这些可能性

(A) 代数

有中心荷的情况下，取代方程(2.4.12)—(2.4.14)非齐次Lorentz群生成元的对易关系将是

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} + C^{\rho\sigma, \mu\nu}, \quad (2.7.13)$$

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho + C^{\rho\sigma, \mu}, \quad (2.7.14)$$

$$i[J^{\mu\nu}, P^\rho] = \eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu + C^{\rho, \mu\nu}, \quad (2.7.15)$$

$$i[P^\mu, P^\rho] = C^{\rho, \mu} \quad (2.7.16)$$

我们看到，这些 C 也满足反对称条件

$$C^{\rho\sigma, \mu\nu} = -C^{\mu\nu, \rho\sigma}, \quad (2.7.17)$$

$$C^{\rho\sigma, \mu} = -C^{\mu, \rho\sigma}, \quad (2.7.18)$$

$$C^{\rho, \mu} = -C^{\mu, \rho}. \quad (2.7.19)$$

我们现在要证明所有这些有额外代数性质的常数允许它们通过将 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 偏移一个常数项被消除掉。（这对应于算符 $U(\Lambda, a)$ 相位的重定义。）为了导出这些性质，我们使用Jacobi等式

$$[J^{\mu\nu}, [P^\rho, P^\sigma]] + [P^\sigma, [J^{\mu\nu}, P^\rho]] + [P^\rho, [P^\sigma, J^{\mu\nu}]] = 0, \quad (2.7.20)$$

$$[J^{\lambda\eta}, [J^{\mu\nu}, P^\rho]] + [P^\rho, [J^{\lambda\eta}, J^{\mu\nu}]] + [J^{\mu\nu}, [P^\rho, J^{\lambda\eta}]] = 0, \quad (2.7.21)$$

$$[J^{\lambda\eta}, [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]] + [J^{\rho\sigma}, [J^{\lambda\eta}, J^{\mu\nu}]] + [J^{\mu\nu}, [J^{\rho\sigma}, J^{\lambda\eta}]] = 0. \quad (2.7.22)$$

（包含三个 P 的Jacobi等式是自动满足的，因而没有产生进一步的信息。）在方程(2.7.20)—(2.7.22)中使用方程(2.7.13)—(2.7.16)，我们获得对 C 的代数条件

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu, \sigma} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu, \sigma} - \eta^{\nu\sigma} C^{\mu, \rho} + \eta^{\mu\sigma} C^{\nu, \rho}, \quad (2.7.23)$$

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu, \lambda\eta} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu, \lambda\eta} - \eta^{\mu\eta} C^{\rho, \lambda\nu} + \eta^{\lambda\mu} C^{\rho, \eta\nu} + \eta^{\lambda\nu} C^{\rho, \mu\eta} - \eta^{\eta\nu} C^{\rho, \mu\lambda} + \eta^{\rho\lambda} C^{\eta, \mu\nu} - \eta^{\rho\eta} C^{\lambda, \mu\nu}, \quad (2.7.24)$$

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu\sigma, \lambda\eta} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu\sigma, \lambda\eta} - \eta^{\sigma\mu} C^{\rho\nu, \lambda\eta} + \eta^{\sigma\nu} C^{\rho\mu, \lambda\eta} + \eta^{\eta\mu} C^{\lambda\nu, \rho\sigma} - \eta^{\lambda\mu} C^{\eta\nu, \rho\sigma} - \eta^{\nu\lambda} C^{\mu\eta, \rho\sigma} + \eta^{\nu\eta} C^{\mu\lambda, \rho\sigma} + \eta^{\sigma\lambda} C^{\rho\eta, \mu\nu} - \eta^{\rho\lambda} C^{\sigma\eta, \mu\nu} - \eta^{\eta\rho} C^{\lambda\sigma, \mu\nu} + \eta^{\eta\sigma} C^{\lambda\rho, \mu\nu}. \quad (2.7.25)$$

用 $\eta_{\nu\rho}$ 收缩方程(2.7.23)给出

$$C^{\mu, \sigma} = 0. \quad (2.7.26)$$

另一方面，常数 $C^{\mu, \lambda\eta}$ 和 $C^{\rho\sigma, \mu\nu}$ 不必须是零，但是它们的代数结构足够简单以至于通过分别偏移 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$ 的定义可以消除它们。用 $\eta_{\nu\rho}$ 收缩方程(2.7.24)给出

$$C^{\mu, \lambda\eta} = \eta^{\mu\eta} C^\lambda - \eta^{\mu\lambda} C^\eta, \quad (2.7.27)$$

$$C^\lambda \equiv \frac{1}{3} \eta_{\rho\nu} C^{\rho, \lambda\nu}. \quad (2.7.28)$$

另外, 用 $\eta_{\nu\rho}$ 收缩方程(2.7.25)给出

$$C^{\mu\sigma,\lambda\eta} = \eta^{\eta\mu} C^{\lambda\sigma} - \eta^{\lambda\mu} C^{\eta\sigma} + \eta^{\sigma\lambda} C^{\eta\mu} - \eta^{\eta\sigma} C^{\lambda\mu}, \quad (2.7.29)$$

$$C^{\lambda\sigma} \equiv \frac{1}{2} \eta_{\nu\rho} C^{\lambda\nu,\sigma\rho}. \quad (2.7.30)$$

(这些表达式自动满足方程(2.7.24)和(2.7.25), 所以这里没有从Jacobi等式得到进一步的信息。) 我们现在看到如果这些 C 不为零, 通过定义新的生成元, 它们可以被消除

$$\tilde{P}^\mu \equiv P^\mu + C^\mu, \quad (2.7.31)$$

$$\tilde{J}^{\mu\sigma} \equiv J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma}, \quad (2.7.32)$$

那么它们的对易关系将是针对一个普通表示的对易关系

$$i [\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} \tilde{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \tilde{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} \tilde{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} \tilde{J}^{\rho\mu}, \quad (2.7.33)$$

$$i [\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{P}^\rho] = \eta^{\nu\rho} \tilde{P}^\mu - \eta^{\mu\rho} \tilde{P}^\nu, \quad (2.7.34)$$

$$i [\tilde{P}^\mu, \tilde{P}^\rho] = 0. \quad (2.7.35)$$

对易关系将总被取为方程(2.7.33)–(2.7.35)的形式, 但是上面的波浪符被去掉了。

顺便地提一下, $J^{\mu\nu}$ 的代数没有中心荷这个性质本可以立即从这类代数式“半单”的这个事实推论出来。(半单Lie代数是那些没有“不变阿贝尔”的子代数, 由那些互相对易的生成元组成, 同时它与其它生成元的对易子也属于这个子代数) 这儿有一个普遍定理: 半单Lie代数中的任何中心荷总可以通过生成元的重定义被移除, 正如方程(2.7.32)中所做的。另一方面, 由 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 所张开的全Poincaré代数不是半单的 (P^μ 构成一个不变的阿贝尔子代数), 因而我们需要一个特定的讨论来证明它的中心荷也可以以这种方式被消除。诚然, 2.4节所讨论的非半单伽利略代数确实允许一个中心荷, 即质量 M 。

我们看到满足两个条件中第一个的非齐次Lorentz群需要将内禀投影表示排除在外。那么第二个呢?

(B) 拓扑

为了研究非齐次Lorentz群的拓扑, 将齐次Lorentz变换表示为 2×2 复矩阵是非常方便的。任何一个实四矢 V^μ 可以被用来构建一个厄密 2×2 矩阵

$$v \equiv (V^\mu \sigma_\mu) = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}, \quad (2.7.36)$$

其中 σ_μ 是通常的Pauli矩阵, 其中 $\sigma_0 \equiv 1$ 。相反地, 任何 2×2 厄密矩阵可以写为这种形式, 因而定义了一个实的四矢 V^μ 。

在如下变换下, 厄密性质将会保留

$$v \rightarrow \lambda v \lambda^\dagger \quad (2.7.37)$$

其中 λ 是任意的复 2×2 矩阵。更进一步, 四矢的协变平方是

$$V_\mu V^\mu = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 - (V^0)^2 = -\text{Det } v \quad (2.7.38)$$

并且通过假定

$$|\text{Det } \lambda| = 1 \quad (2.7.39)$$

可以保证这个行列式不变。每个满足方程(2.7.39)的复 2×2 矩阵因而定义了一个使方程(2.7.38)不变的 V^μ 的线性变换，即，一个齐次Lorentz变换 $\Lambda(\lambda)$ ：

$$\lambda V^\mu \sigma_\mu \lambda^\dagger = (\Lambda^\mu_\nu(\lambda) V^\nu) \sigma_\mu . \quad (2.7.40)$$

更进一步，对于两个这样的矩阵 λ 和 $\bar{\lambda}$ ，我们有

$$\begin{aligned} (\lambda \bar{\lambda}) V^\mu \sigma_\mu (\lambda \bar{\lambda})^\dagger &= \lambda (\bar{\lambda} V^\mu \sigma_\mu \bar{\lambda}^\dagger) \lambda^\dagger \\ &= \lambda \Lambda^\mu_\nu(\bar{\lambda}) V^\nu \sigma_\mu \lambda^\dagger = \Lambda^\mu_\rho(\lambda) \Lambda^\rho_\nu(\bar{\lambda}) V^\nu \sigma_\mu \end{aligned}$$

因而

$$\Lambda(\lambda \bar{\lambda}) = \Lambda(\lambda) \Lambda(\bar{\lambda}) . \quad (2.7.41)$$

然而，仅差一个总相位的两个 λ 对于方程(2.7.37)中的 v 有着相同的效应。因而调整 λ 的相位，使得

$$\text{Det } \lambda = 1 \quad (2.7.42)$$

是方便的，这与方程(2.7.41)是一致的。这个行列式为1的复 2×2 矩阵构成一个群，称为 $SL(2, C)$ 。

(SL 代表“特殊线性 (special linear)”，“特殊”是指行列式为1，而 C 代表“复数”。) 群元依赖 $4 - 1 = 3$ 个复参量，或者说6个实参量，这与Lorentz群独立参量的个数是相同的。然而， $SL(2, C)$ 与Lorentz群不是同一个群；如果 λ 是 $SL(2, C)$ 中的一个矩阵，那么 $-\lambda$ 也是，并且 λ 和 $-\lambda$ 在方程(2.7.37)中产生同一个Lorentz变换。确实，很容易看到矩阵

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

所产生的Lorentz变换 $\Lambda(\lambda(\theta))$ 仅是一个绕第3轴角度为 θ 的旋转，因而 $\lambda = -1$ 产生一个角度为 2π 的旋转。Lorentz群与 $SL(2, C)$ 不是相同的，却与 $SL(2, C)/Z_2$ 是相同的，其是一个行列式为1且 λ 与 $-\lambda$ 等价的复 2×2 矩阵。

现在，Lorentz群的拓扑是什么？通过极分解定理，任何非奇异复矩阵 λ 可以写成如下的形式

$$\lambda = u e^h,$$

其中 u 是么正的， h 是厄密的

$$u^\dagger u = 1, \quad h^\dagger = h .$$

因为 $\text{Det } u$ 是相位因子，并且 $\text{Det } \exp h = \exp \text{Tr } h$ 是正实的，条件(2.7.42)要求

$$\text{Det } u = 1 ,$$

$$\text{Tr } h = 0 .$$

**群 Z_2 仅由元素+1和-1构成。一般而言，当我们写出 G/H ，其中 H 是 G 的不变子群，意味着在群 G 中，如果 $g \in G$ 且 $h \in H$ ，那么 g 和 gh 相等。子群 Z_2 是平庸不变的，因为它的元素与 $SL(2, C)$ 的所有元素对易。

(因子 u 提供了Lorentz群的旋转子群; 如果 u 是么正的, 那么 $\text{Tr}(uvu^\dagger) = \text{Tr} v$, 所以 $V^0 = \frac{1}{2} \text{Tr} v$ 在变换 $\Lambda(u)$ 下不变。) 更进一步, 这个分解是唯一的, 所以从拓扑上讲, $SL(2, C)$ 仅是全体 u 的空间和全体 h 的空间的直积(即, 成对点的集合)。任意的无迹 2×2 矩阵 h 可以表示为

$$h = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix}$$

其中除了 a, b, c 是实的之外没有其他其它约束, 所以全体 h 的空间在拓扑上与普通三维平坦空间 R_3 是相同的。另一方面, 行列式为1的任意 2×2 矩阵可以表示为

$$u = \begin{pmatrix} d + ie & f + ig \\ -f + ig & d - ie \end{pmatrix}$$

其中 d, e, f, g 服从于一个非线性约束

$$d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1,$$

所见全体 u 的空间 $SU(2)$ 拓扑上与四维球的三维表面 S_3 相同。因此 $SL(2, C)$ 在拓扑上与直积 $R_3 \times S_3$ 相同。这是单连通的: 连接 R_3 或 S_3 中两点的任意曲线可以变换到彼此, 对于直积同样是成立的。(除了圆 S_1 以外的全体球 S_n 是单连通的。) 然而, 我们所感兴趣的是 $SL(2, C)/Z_2$, 不是 $SL(2, C)$ 。 λ 与 $-\lambda$ 的等同就是么正因子 u 和 $-u$ 的等同(因为 e^h 总是正的), 所以Lorentz群有 $R_3 \times S_3/Z_2$ 的拓扑, 其中 S_3/Z_2 是将相反点等同后的三维球面。这不是单连通的; 例如, S_3 上从 u 到 u' 的路径不能连续变换成从 u 到 $-u'$ 的路径, 尽管这两个路径连接的是 S_3/Z_2 上的相同点。事实上, S_3/Z_2 是双连通的; 两点间的路径分为两类, 其依赖于它们是否包含反演 $u \rightarrow -u$, 每一类中的路径是可以互相连续变换的。一个等价表述是双圈, 即沿着相同路径走两次将从任意一个元素回到它本身, 可以被连续地收缩到一个点。(正如附录B所讨论的, 这被数学地总结在 S_3/Z_2 的基本群或者说第一同伦群是 Z_2 这一陈述中。) 类似地, 非齐次Lorentz群与 $R_4 \times R_3 \times S_3/Z_2$ 有相同的拓扑, 因而也是双连通的。

因为Lorentz群(齐次或非齐次的)不是单连通的, 它没有内禀的投影表示。然而, 由于从1到 Λ 再到 $\Lambda\bar{\Lambda}$ 走两次的双圈能被收缩至一个点, 我们必须有

$$\left[U(\Lambda) U(\bar{\Lambda}) U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda}) \right]^2 = 1$$

因而相位 $e^{i\phi(\Lambda, \bar{\Lambda})}$ 仅是一个符号

$$U(\Lambda) U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}). \quad (2.7.43)$$

同样, 对于非齐次Lorentz群

$$U(\Lambda, a) U(\bar{\Lambda}, \bar{a}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{a} + a). \quad (2.7.44)$$

这些“相当于符号的表示”是熟悉地; 对于整数自旋态, 方程(2.7.43)和(2.7.44)中的符号总是+1, 对于半整数自旋态, 这些符号会根据从1到 Λ 到 $\Lambda\bar{\Lambda}$ 再回到1的路径是否收缩成一个点而是+1或-1。这个差异产生的原因是, 绕第3轴角度为 2π 的旋转作用在第3角动量分量为 σ 的态上会产生一个相位 $e^{2i\pi\sigma}$, 因而对整数自旋态没有效应, 而作用在半整数自旋态上会产生一个符号差异。(这两种情况对应于第一同伦群 Z_2 的两个不可约表示。) 因此, 方程(2.7.43)或方程(2.7.44)强加了一个超选择定则: 我们无法混合整数自旋态和半整数自旋态。

对于有限质量，整数或半整数自旋的限制是精确地从一纯代数方法，即小群生成元的表示中导出的，在这里正是角动量矩阵 $\vec{J}^{(j)}$ ， j 为整数或半整数。另一方面，对于零质量，小群在物理单粒子态上的作用正是绕动量方向的旋转，并且这里没有代数的原因去限制螺度为整数或半整数。但是，这里有一个拓扑的原因：一个绕动量方向角度为 4π 的旋转可以连续的变换成一点旋转也没有，所以因子 $\exp(4\pi i\sigma)$ 必须为1，因而 σ 必须是整数或半整数。

取代用投影表示研究并强加超选择定则，我们也可以扩张Lorentz群，将其取做 $SL(2, C)$ 本身，而不是像往常一样为 $SL(2, C)/Z_2$ 。普通的旋转不变性禁止了总自旋为整数的态和总自旋为半整数态之间的跃迁，所以唯一的差异是现在的群是单连通的，因而它仅有普通表示，没有投影表示，使得我们无法推断出超选择定则。这并不意味着，我们真的可以准备由整数自旋态和半整数自旋态线性组合成的物理系统，只是说明可观测Lorentz不变性不能用来证明这样的叠加是可能的。

类似的论述适用于任何对称群。如果它的Lie代数包含中心荷，那么我们总是能够扩张这个代数使其包含与一切对易的生成元，并且该生成元的本征值正是中心荷，正如我们在2.4节的末尾给伽利略群的Lie代数加上质量算符。那么，这个扩张Lie代数当然是无中心荷的，所以单位元附近的群部分只有普通表示，而无法要求任何超选择定则。同样，即便一个Lie群不是单连通的，它总可以表示为 C/H ，其中 C 是单连通群，称为 G 的“通用覆盖群”，而 H 是 G 的一个不变子群[†]。一般而言，我们也可以取对称群为 C 而非 G ，这是因为除了 G 暗含了超选择定则而 C 没有以外，它们的结果没有差异。简言之，超选择定则的命题有点无关紧要；它可能也可能不准备处在任意叠加态中的物理系统，但是不能通过参考对称原理来解决问题，因为无论我们认为自然对称群可以是什么，总有另外一个群，其结果除了没有超选择定则以外与原先的是相同的。

附录A 对称表示定理

这个附录呈现Wigner基本定理的证明，即任何对称变换可以表示为物理态的Hilbert空间上的算符，该算符要么是线性且幺正的，要么是反线性且反幺正的。由于我们现在的目的，我们主要依赖的对称变换的性质是它们是保跃迁几率的射线变换 T ，在这个意义上，如果 Ψ_1 和 Ψ_2 是属于射线 \mathcal{R}_1 和 \mathcal{R}_2 的态矢，那么属于变换射线 $T\mathcal{R}_1$ 和 $T\mathcal{R}_2$ 的态矢 Ψ'_1 和 Ψ'_2 满足

$$|(\Psi'_1, \Psi'_2)|^2 = |(\Psi_1, \Psi_2)|^2 . \quad (2.A.1)$$

我们同样要求对称变换应该有一逆，以同样的方式保跃迁几率。

首先，考察属于射线 \mathcal{R}_k 的某些态矢的正交完全集 Ψ_k ，并有

$$(\Psi_k, \Psi_l) = \delta_{kl} , \quad (2.A.2)$$

并令 Ψ'_k 为属于射线 $T\mathcal{R}_k$ 的某些任意选择的态矢。从方程(2.A.1)，我们有

$$|(\Psi'_k, \Psi'_l)|^2 = |(\Psi_k, \Psi_l)|^2 = \delta_{kl} .$$

[†] C/H 的第一同伦群是 H 。我们已经看到齐次Lorentz群的覆盖群是 $SL(2, C)$ ，而三维旋转群的覆盖群是 $SU(2)$ 。对于三维、四维或六维情况 SL 和 SU 群之间的联系是特殊的；对于一般的维数 d ， $SO(d)$ 的覆盖群被赋予了特殊的名字，“ $Spin(d)$ ”

但是 (Ψ'_k, Ψ'_k) 自动为实且正的，所以这个要求它应该有值1，因而

$$(\Psi'_k, \Psi'_l) = \delta_{kl} . \quad (2.A.3)$$

容易看到这些变换后的态 Ψ'_k 也构成一个完全集，对于那些，如果存在任意的非零态矢 Ψ' 正交于所有的 Ψ'_k ，那么 Ψ' 所属射线的逆变换将有非零态矢 Ψ'' 构成，其对于所有的 k 有：

$$|(\Psi_k, \Psi'')|^2 = |(\Psi'_k, \Psi')|^2 = 0 ,$$

这是不可能的，因为假定了 Ψ_k 构成完全集。

我们现在必须建立态 Ψ'_k 的相位约定。由于这个原因，我们挑出 Ψ_k 中的一个，称为 Ψ_1 ，并考察态矢

$$\Upsilon_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_1 + \Psi_k] \quad (2.A.4)$$

这个态矢属于某个射线 \mathcal{S}_k ，并有 $k \neq 1$ 。任何属于变换射线 $T\mathcal{S}_k$ 的态矢 Υ'_k 可以以态矢 Ψ'_l 展开，

$$\Upsilon'_k = \sum_l c_{kl} \Psi'_l .$$

由方程(2.A.1)，我们有

$$|c_{kk}| = |c_{kl}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

并且对于 $l \neq k$ 和 $l \neq 1$ ：

$$c_{kl} = 0 .$$

对于任意给定的 k ，通过两个态矢 Υ'_k 和 Ψ'_k 合理的相位选择，我们显然可以调整两个非零系数 c_{kk} 和 c_{k1} 的相位，使得两个系数恰是 $1/\sqrt{2}$ 。从现在起，以这种方式选择的态矢 Υ'_k 和 Ψ'_k 将被记为态矢 $U\Upsilon'_k$ 和 $U\Psi_k$ ，正如我们已经看到的，

$$U \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_k + \Psi_1] = U\Upsilon_k = \frac{1}{\sqrt{2}} [U\Psi_k + U\Psi_1] . \quad (2.A.5)$$

然而，对于一般的态矢 Ψ ， $U\Psi$ 仍有待定义。

现在考察属于一个任意射线 \mathcal{R} 的一个任意态矢 Ψ ，并将其展为 Ψ_k ：

$$\Psi = \sum_k C_k \Psi_k . \quad (2.A.6)$$

任何属于变换射线 $T\mathcal{R}$ 的任意态矢 Ψ' 可以类似地以正交完全集 $U\Psi_k$ 展开：

$$\Psi' = \sum_k C'_k U\Psi_k . \quad (2.A.7)$$

$|(\Psi_k, \Psi)|^2$ 与 $|(U\Psi_k, \Psi')|^2$ 的相等告诉我们，对于所有的 k （包括 $k = 1$ ）：

$$|C_k|^2 = |C'_k|^2 , \quad (2.A.8)$$

而 $|(\Upsilon_k, \Psi)|^2$ 与 $|(U\Upsilon_k, \Psi')|^2$ 的相等告诉我们对于所有的 $k \neq 1$ ：

$$|C_k + C_1|^2 = |C'_k + C'_1|^2 . \quad (2.A.9)$$

方程(2.A.9)和(2.A.8)的比给出公式

$$\operatorname{Re}(C_k/C_1) = \operatorname{Re}(C'_k/C'_1) \quad (2.A.10)$$

而方程(2.A.8)又要求

$$\operatorname{Im}(C_k/C_1) = \pm \operatorname{Im}(C'_k/C'_1) \quad (2.A.11)$$

因而要么

$$C_k/C_1 = C'_k/C'_1, \quad (2.A.12)$$

要么

$$C_k/C_1 = (C'_k/C'_1)^* . \quad (2.A.13)$$

更进一步, 我们能够证明对于每一 k 都必须做出相同的选择。(证明中的这个步骤被Wigner省略了。) 为了看到这一点, 假定对于某些 k , 我们有 $C_k/C_1 = C'_k/C'_1$, 而对某些 $l \neq k$, 我们反而有 $C_k/C_1 = (C'_k/C'_1)^*$ 。又假定两个比值都是复数, 使得这真是一个不同的情况。(这附带的要求 $k \neq 1$, $l \neq 1$ 以及 $k \neq l$ 。) 我们将证明这是不可能的。

定义一个态矢 $\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}[\Psi_1 + \Psi_k + \Psi_l]$ 。由于这个态矢中所有系数的比值是实的, 在属于变换射线的任意态矢 Φ' 中我们必须得到相同的系数:

$$\Phi' = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}[U\Psi_1 + U\Psi_k + U\Psi_l],$$

其中 α 是一相位因子, 并有 $|\alpha| = 1$ 。然后, 跃迁几率 $|(\Phi, \Psi)|$ 和 $|(\Phi', \Psi')|$ 相等要求

$$\left| 1 + \frac{C'_k}{C'_1} + \frac{C'_l}{C'_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2$$

因而

$$\left| 1 + \frac{C'_k}{C'_1} + \frac{C'_l}{C_1^*} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2$$

上式成立, 仅当

$$\operatorname{Re}\left(\frac{C_k C_l^*}{C_1 C_1^*}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{C_k C_l}{C_1 C_1}\right)$$

或者, 换句话说,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{C_l}{C_1}\right) = 0 .$$

因此, 对于任意 k, l 对的 C_k/C_1 和 C_l/C_1 必须是实的, 这与我们的假定是矛盾的。那么, 我们看到对于作用在给定态矢 $\sum_k C_k U_k$ 上的一个给定的对称变换 T , 对于所有的 k , 我们要么有方程(2.A.12), 要么有方程(2.A.13)。

Wigner去掉了第二个可能性, 方程(2.A.13), 因为正如他所证明的, 任何实现这个可能性的对称群将不得不在时间坐标上引入一个反号, 并且在他所提供的证明中, 他仅考虑了类似旋转那样的不反应时间方向的对称性。这里我们仅认为涉及时间反演的对称性像其它对称性一样基本, 所以我们将不得不考虑, 对于每一对称性 T 以及态矢 $\sum_k C_k \Psi_k$, 方程(2.A.12)或(2.A.13)都可以使用。依赖于实现那一种可能性, 我们将定义 $U\Psi$ 为属于射线 $T\mathcal{R}$ 的态矢 Ψ' 中的一个, 选择其相位使得 $C_1 = C'_1$ 或 $C_1 = C_1^*$ 。那么分别有

$$U\left(\sum_k C_k \Psi_k\right) = \sum_k C_k U\Psi_k \quad (2.A.14)$$

或者

$$U\left(\sum_k C_k \Psi_k\right) = \sum_k C_k^* U \Psi_k . \quad (2.A.15)$$

对于一个给定对称变换，这有待证明，对于每一系数 C_k 的任意值，我们必须在方程(2.A.14)和(2.A.15)之间做出相同的选择。假定方程(2.A.14)应用于一个态矢 $\sum_k A_k \Psi_k$ ，而方程(2.A.15)应用于另一态矢 $\sum_k B_k \Psi_k$ 。那么，跃迁几率不变性要求

$$\left| \sum_k B_k^* A_k \right|^2 = \left| \sum_k B_k A_k \right|^2$$

或者，等价地

$$\sum_{kl} \text{Im}(A_k^* A_l) \text{Im}(B_k^* B_l) = 0 . \quad (2.A.16)$$

我们不能排除这样的可能性：对于属于不同射线的一对态矢 $\sum_k A_k \Psi_k$ 和 $\sum_k B_k \Psi_k$ ，方程(2.A.16)可以被满足。然而，对于任意对这样的态矢，其中 A_k 或 B_k 的相位全部相同（使得方程(2.A.14)和(2.A.15)不是相同的），总能找到第三个态矢 $\sum_k C_k \Psi_k^*$ ，使得

$$\sum_{kl} \text{Im}(C_k^* C_l) \text{Im}(A_k^* A_l) \neq 0 \quad (2.A.17)$$

或者

$$\sum_{kl} \text{Im}(C_k^* C_l) \text{Im}(B_k^* B_l) \neq 0 . \quad (2.A.18)$$

正如我们所看到的，从方程(2.A.17)中得出 $\sum_k A_k \Psi_k$ 和 $\sum_k C_k \Psi_k$ 必须在方程(2.A.14)和(2.A.15)之间做出相同的选择，而从方程(2.A.18)中得出 $\sum_k B_k \Psi_k$ 和 $\sum_k C_k \Psi_k$ 必须在方程(2.A.14)和(2.A.15)之间做出相同的选择，所以我们所出发的态 $\sum_k A_k \Psi_k$ 和 $\sum_k B_k \Psi_k$ 必须在方程(2.A.14)和(2.A.15)之间做出相同的选择。因而我们证明了，对于一个给定的对称变换 T ，所有的态矢要么满足方程(2.A.14)，要么满足方程(2.A.15)。

现在证明我们所定义是很容易的，量子力学算符要么是线性且么正的，要么是反线性且反么正的。首先，假定所有的态矢 $\sum_k C_k \Psi_k$ 满足方程(2.A.14)。任意两个态矢 Ψ 和 Φ 可以展开为

$$\Psi = \sum_k A_k \Psi_k , \quad \Phi = \sum_k B_k \Psi_k$$

因而，使用方程(2.A.14)，

$$\begin{aligned} U(\alpha\Psi + \beta\Phi) &= U \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) \Psi_k = \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) U \Psi_k \\ &= \alpha \sum_k A_k U \Psi_k + \beta \sum_k B_k U \Psi_k . \end{aligned}$$

如果对于某些 k, l 对， $A_k^ A_l$ 和 $B_k^* B_l$ 都是复的，那么除了 C_k 和 C_l ，选择所有的 C 为零。如果对于某些 k, l 对， $A_k^* A_l$ 是复的而 $B_k^* B_l$ 是实的，那么肯定存在某些其它的 m, n 对（可能其中 m 或 n 都不等于 k 或 l ） $B_m^* B_n$ 是复的。如果 $A_m^* A_n$ 也是复的，那么除了 C_m 和 C_n ，选择其它的 C 为零，并选择这些系数使得它们有不同的相位。如果 $A_m^* A_n$ 是实的，那么除了 C_k 、 C_l 、 C_m 和 C_n 之外，选择其它的 C 为零，并选择这四个系数有不同的相位。这个情况下， $B_k^* B_l$ 是复的而 $A_k^* A_l$ 是实的以相同的方式处理。

再一次利用方程(2.A.14)，给出

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha U\Psi + \beta U\Phi, \quad (2.A.19)$$

所以 U 是线性的。另外，利用方程(2.A.2)和(2.A.3)，变换后态的标量积是

$$(U\Psi, U\Phi) = \sum_{kl} A_k^* B_l (U\Psi_k, U\Phi_l) = \sum_k A_k^* B_k,$$

因而

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi), \quad (2.A.20)$$

所以 U 是幺正的。

对于所有的态矢，对称性满足方程(2.A.15)的情况可以以相当类似的方式处理。读者或许能够在没有帮助的情况下完成这个讨论，但既然反线性算符可能是不熟悉的，至少我们应该在这里给出细节。假定所有态矢 $\sum_k C_k \Psi_k$ 满足方程(2.A.15)。任意两个态矢 Ψ 和 Φ 可以像之前那样展开，因而：

$$\begin{aligned} U(\alpha\Psi + \beta\Phi) &= U \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) \Psi_k \\ &= \sum_k (\alpha^* A_k^* + \beta^* B_k^*) U\Psi_k = \alpha^* \sum_k A_k^* U\Psi_k + \beta^* \sum_k B_k^* U\Psi_k. \end{aligned}$$

再一次利用方程(2.A.15)，给出

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha^* U\Psi + \beta^* U\Phi, \quad (2.A.21)$$

所以 U 是反线性的。另外，利用方程(2.A.2)和(2.A.3)，变换后态的标量积是

$$(U\Psi, U\Phi) = \sum_{kl} A_k B_l^* (U\Psi_k, U\Phi_l) = \sum_k A_k B_k^*$$

因而

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi)^*, \quad (2.A.22)$$

所以 U 是反幺正的。

附录B 群算符和同伦类

在这篇附录中，我们将证明2.7节中所陈述的定理，即在假定，(a)群的生成元可以进行定义使得在Lie代数中没有中心荷，(b)群是单联通的情况下，有限对称变换 T 的算符 $U(T)$ 的相位可以进行选择使得这些算符构成对称群的表示，而非投影表示。我们也要论述非联通群所遇到的投影表示，以及它们与该群同伦类的关系。

为了证明这个定理，让我们先回忆一下构建对应于对称变换算符的方法。正如2.2节所描述的，我们引入了一组实变量 θ^a 用以参数化这些变换，在这样的方式下，变换满足合成规则(2.2.15)：

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)).$$

我们想要构建的算符 $U(T(\theta)) \equiv U[\theta]$ ，满足如下对应条件*

$$U[\bar{\theta}]U[\theta] = U[f(\bar{\theta}, \theta)] . \quad (2.B.1)$$

为了做到这一点，我们在群参量空间中设置一个任意的“标准”路径 $\Theta_\theta^a(s)$ ，从原点跑向每一点 θ ，并有 $\Theta_\theta^a(0) = 1$ 和 $\Theta_\theta^a(1) = \theta^a$ ，并通过一个微分方程定义沿着这样路径的 $U_\theta(s)$

$$\frac{d}{ds}U_\theta(s) = it_a U_\theta(s) h_b^a(\Theta_\theta(s)) \frac{d\Theta_\theta^b(s)}{ds} \quad (2.B.2)$$

以及初始条件

$$U_\theta(0) = 1 , \quad (2.B.3)$$

其中

$$[h^{-1}]_b^a(\theta) \equiv \left[\frac{\partial f^a(\bar{\theta}, \theta)}{\partial \bar{\theta}^b} \right]_{\bar{\theta}=0} . \quad (2.B.4)$$

我们最终将把算符 $U[\theta]$ 与 $U_\theta(1)$ 等同起来，但首先我们必须建立起 $U_\theta(s)$ 的一些性质。

为了检验合成规则，考察两个点 θ_1 和 θ_2 ，并定义从 0 到 θ_1 的路径 \mathcal{P} 以及 $f(\theta_2, \theta_1)$ ：

$$\Theta_{\mathcal{P}}^a(s) \equiv \begin{cases} \Theta_{\theta_1}^a(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} , \\ f^a(\Theta_{\theta_2}^a(2s-1), \theta_1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 . \end{cases} \quad (2.B.5)$$

在第一个线段的末尾，我们处在 $U_{\mathcal{P}}(\frac{1}{2}) = U_{\theta_1}(1)$ 。为了沿着第二个线段计算 $U_{\mathcal{P}}(s)$ ，我们需要 $f^a(\Theta_{\theta_2}^a(2s-1), \theta_1)$ 的导数。由于这个原因，我们使用基本的关联条件：

$$f^a(f(\theta_3, \theta_2), \theta_1) = f^a(\theta_3, f(\theta_2, \theta_1)) . \quad (2.B.6)$$

在 $\theta_3 \rightarrow 0$ 的极限下，匹配 θ_3^c 的系数得到：

$$\frac{\partial f^a(\theta_2, \theta_1)}{\partial \theta_2^b} h_a^c(f(\theta_2, \theta_1)) = h_b^c(\theta_2) . \quad (2.B.7)$$

沿着第二个线段， $U_{\mathcal{P}}(s)$ 的微分方程因而与 $U_{\theta_2}(2s-1)$ 的微分方程是相同的。它们满足不同的初始条件，但是 $U_{\mathcal{P}}(s)U_{\theta_1}^{-1}(s)$ 也满足与 $U_{\theta_2}(2s-1)$ 相同的微分方程，并且有着相同的初始条件：在 $s = \frac{1}{2}$ 处，均为 1。我们因而得出在 $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ ，

$$U_{\mathcal{P}}(s)U_{\theta_1}^{-1}(s) = U_{\theta_2}(2s-1)$$

并且，特别的

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U_{\theta_2}(1)U_{\theta_1}(1) . \quad (2.B.8)$$

，然而，这并不是说 $U_{\theta_1}(1)$ 满足想要的合成法则(2.B.1)，因为尽管路径 $\Theta_{\mathcal{P}}(s)$ 连接 $\theta^a = 0$ 和 $\theta^a = f^a(\theta_2, \theta_1)$ ，但一般而言，它与我们所选择的，直接从 $\theta^a = 0$ 到 $\theta^a = f^a(\theta_2, \theta_1)$ 的“标准”路径 $\Theta_{f(\theta_2, \theta_1)}$ 不同。为了能使 $U[\theta]$ 等于 $U_\theta(1)$ ，我们需要证明 $U_\theta(1)$ 独立于从 0 到 θ 的路径。

由于这个原因，考察从 0 到 θ 的路径变分 $\delta\Theta(s)$ 所产生的 $U_\theta(s)$ 的变分 δU 。取方程(2.B.2)的变分，给出微分方程

$$\frac{d}{ds}\delta U = it_a \delta U h_b^a(\Theta) \frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h_{b,c}^a(\Theta) \delta\Theta^c \frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h_b^a(\Theta) \frac{d\delta\Theta^b}{ds}$$

*这里使用方括号是为了将构建为群参量函数的 U 算符与那些表达为群变换本身的函数区分开来。

其中 $h_{b,c}^a \equiv \partial h_b^a / \partial \Theta^c$ 。利用Lie对易关系(2.2.22) (没有中心荷) 并重新安排一下, 这给出

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (U^{-1} \delta U) &= \frac{d}{ds} \left(iU^{-1} t_a U h_b^a \delta \Theta^b \right) \\ &+ iU^{-1} t_a U \delta \Theta^b \frac{d \Theta^c}{ds} \left(h_{c,b}^a - h_{b,c}^a + C_{ed}^a h_b^e h_c^d \right). \end{aligned} \quad (2.B.9)$$

然而, 通过在关联条件(2.B.6)中取极限 $\theta_3, \theta_2 \rightarrow 0$, 我们发现对于所有的 θ :

$$h(\theta)_{b,c}^a = -f_{de}^a h(\theta)_b^d h(\theta)_c^e, \quad (2.B.10)$$

其中 f_{de}^a 是(2.2.19)所定义的系数。b和c的反对称性证明了方程(2.B.9)中的最后一项为零

$$h_{c,b}^a - h_{b,c}^a + C_{ed}^a h_b^e h_c^d = 0. \quad (2.B.11)$$

方程(2.B.9)因而告诉我们, 量

$$U^{-1} \delta U - iU^{-1} t_a U h_b^a \delta \Theta^b$$

在路径 $\theta(s)$ 上是常数。从 $U_\theta(1)$ 在端点固定在 $\Theta(0) = 0$ 和 $\Theta(1) = \theta$ (以及 $U_\theta(0) = 1$) 的路径的任意无限小变分下是不变的可以得出其是稳态的。但是, 假定(b)告诉我们从 $\Theta(0) = 0$ 到 $\Theta(1) = \theta$ 的路径可以连续地变换到彼此, 所以我们可以认为 $U_\theta(1)$ 只是 θ 的路径无关函数:

$$U_\theta(1) \equiv U[\theta]. \quad (2.B.12)$$

特别的, 因为路径 \mathcal{P} 从0到 $f(\theta_2, \theta_1)$, 我们有

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U[f(\theta_2, \theta_1)]$$

所以方程(2.B.8)证明了 $U[\theta]$ 满足群的乘法法则(2.B.1), 正如所要证明的。

既然我们已经构建了一个非投影表示 $U[\theta]$, 剩下要证明有相同表示生成元 t_a 的相同群的任何投影表示 $\tilde{U}[\theta]$ 与 $U[\theta]$ 仅差一个相位:

$$\tilde{U}[\theta] = e^{i\alpha(\theta)} U[\theta]$$

使得 $\tilde{U}[\theta]$ 的乘法法则中的相位 ϕ :

$$\tilde{U}[\theta'] \tilde{U}[\theta] = e^{i\phi(\theta', \theta)} \tilde{U}[f(\theta', \theta)]$$

通过 $\tilde{U}[\theta]$ 相位的一个改变可以被移除。为了看到这点, 考察算符

$$U[\theta]^{-1} U[\theta']^{-1} \tilde{U}[\theta'] \tilde{U}[\theta] = U[f(\theta', \theta)]^{-1} \tilde{U}[f(\theta', \theta)] e^{i\phi(\theta', \theta)}.$$

因为 $U[\theta]$ 和 $\tilde{U}[\theta]$ 有相同的生成元, 左边对 θ'^a 的导数在 $\theta' = 0$ 处为零, 所以

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta^b} \left\{ U[\theta]^{-1} \tilde{U}[\theta] \right\} + i\phi_b(\theta) U[\theta]^{-1} \tilde{U}[\theta],$$

其中

$$\phi_b(\theta) \equiv h_b^a(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta'^b} \phi(\theta', \theta) \right]_{\theta'=0}.$$

对这个结果相对 θ^c 微分， b 和 c 的反对称性立刻给出

$$0 = \frac{\partial \phi_b(\theta)}{\partial \theta^c} - \frac{\partial \phi_c(\theta)}{\partial \theta^b}.$$

一个熟悉的定理告诉我们，在单连通空间中，这要求 ϕ_b 正是某个函数 β 的梯度：

$$\phi_b(\theta) = \frac{\partial \beta(\theta)}{\partial \theta^b}.$$

因此 $U[\theta]^{-1} \tilde{U}[\theta] e^{i\beta(\theta)}$ 实际上对于 θ 是常量。令它等于它在 $\theta = 0$ 处的值，我们看到 \tilde{U} 恰好正比于 U ：

$$\tilde{U}[\theta] = U[\theta] \exp(-i\beta(\theta) + i\beta(0))$$

正如之前所宣称的。

* * *

当Lie代数没有中心荷但却不是单连通时，之上的分析提供了能够出现在群乘法法则中的相位因子特性的一些信息。假定从0到 θ 再到 $f(\bar{\theta}, \theta)$ 的路径 \mathcal{P} 不能变换成我们所选择的从0到 $f(\bar{\theta}, \theta)$ 的标准路径，或者换句话说，从0到 θ 再到 $f(\bar{\theta}, \theta)$ 再回到0的圈不能连续的变换成点。那么 $U^{-1}(f(\theta_2, \theta_1))U(\theta_2)U(\theta_1)$ 可以是一个相位因子 $\exp(i\phi(\theta_2, \theta_1)) \neq 1$ ，但是对于所有可以互相变换的圈 ϕ 将是相同的。开始并结束于原点并能够连续变换到给定圈的所有圈的集合被称为该圈的同伦类；因此我们看到 $\phi(\theta_2, \theta_1)$ 仅依赖于从0到 θ 再到 $f(\bar{\theta}, \theta)$ 再回到0的圈的同伦类。同伦类的集合构成群；圈 \mathcal{L}_1 和 \mathcal{L}_2 同伦类的“乘积”是先绕过 \mathcal{L}_1 再绕过 \mathcal{L}_2 圈的同伦类；圈 \mathcal{L} 同伦类的逆是反方向绕行圈 \mathcal{L} 的同伦类；而“恒等”是指圈的同伦类可以变换至原点。这个群被称为第一同伦群或问题所在空间的基本群。很容易看到相位因子构成该群的表示：如果绕圈 \mathcal{L} 走一圈给出相位因子 $e^{i\phi}$ ，而绕圈 $\bar{\mathcal{L}}$ 走一圈给出相位因子 $e^{i\bar{\phi}}$ ，那么绕这两个圈走一圈给出相位因子 $e^{i\phi}e^{i\bar{\phi}}$ 。因此，如果我们知道一个给定群 \mathcal{G} （没有中心荷）参量空间的第一同伦群的一维投影表示，我们可以计出群 \mathcal{G} 投影表示的所有类型，在卷II将会更加细致的讨论同伦群。

附录C 反演和简并积

通常假定反演 T 和 P 令单粒子态变成相同种类的另一单粒子态，或许会带有一个依赖粒子种类的相位因子。在2.6节我们顺便注意到反演在单粒子态的简并积上的作用可能会更加复杂，这种可能性似乎首先是Wigner在1964年提出的。这篇附录将会探索反演算符的一般版本，其中有限矩阵取代了反演相位，但是没有做Wigner的某些限制假定。

从时间反演开始，Wigner通过假定反演算符的平方是正比于单位算符的限制了可能的作用。因为 T 是反幺正的，很容易看到 T^2 相对应的比例因子只能是 ± 1 ，或许针对由超选择定则分割开的子空间有不同的符号。当 T^2 在 $2j$ 值为偶或奇的态空间上符号与2.6节所发现的符号 $(-1)^{2j}$ 相反时，所涉及物理态必须提供远复杂于迄今为止所假定的算符 T 的表示。但是，如果我们很乐意承认这种可能性，这里似乎没有什么好的原因强加 T^2 正比于单位算符这个Wigner条件。使用扩张Poincaré群的结构并没有多少依据；任意反演算符唯一有用的定义是算符精确或近似守恒，并且这并不是使 T^2 正比于单位算符的定义。

为了探索时间反演更普遍的可能性，假定其在有质量单粒子态上有如下作用

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{T}_{mn} \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,m}, \quad (2.C.1)$$

其中 \mathbf{p} , j 和 σ 是粒子的动量，自旋和自旋 z 分量，而 n, m 用来标记粒子种类简并积的成员。（因子 $(-1)^{j-\sigma}$ 的出现以及 \mathbf{p} 和 σ 的反号可以用2.6节所使用的方法推断出来。）除了因为 T 是反么正的， \mathcal{T} 必须是么正的，对于矩阵 \mathcal{T}_{mn} 是不清楚的。

现在来看看，单粒子态基的合理选择是怎样简化这个变换的。通过么正变换定义一个新态 $\Psi'_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{U}_{mn} \Psi_{\mathbf{p},\sigma,m}$ ，我们会得到相同的变换(2.C.1)，只不过矩阵 \mathcal{T}_{mn} 被变为

$$\mathcal{T}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{U}^*. \quad (2.C.2)$$

一般而言，我们不能以这种选择单粒子态基的形式使 \mathcal{T} 对角化，如果 T 是么正的，我们可以做到这一点。但是，我们反而能使分块对角化，其分块要么是 1×1 相位，要么是形式如下的 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi/2} \\ e^{-i\phi/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.C.3)$$

其中 ϕ 是各种实相位。

（这里是证明。首先，注意到方程(2.C.2)给出

$$\mathcal{T}' \mathcal{T}'^* = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{T}^* \mathcal{U}.$$

这是一个么正变换，所以通过选择可以使么正矩阵 $\mathcal{T}' \mathcal{T}'^*$ 对角化。假定对角化已经完成，并去掉撇号，我们有

$$\mathcal{T} = D \mathcal{T}^T, \quad (2.C.4)$$

其中 D 是一个么正对角矩阵，对角元带有相位 $e^{i\phi_n}$ 。一个显然的结果是除非 $e^{i\phi_n} = 1$ ，否则 \mathcal{T}_{nn} 为零。更进一步，如果 $e^{i\phi_n} = 1$ 但 $e^{i\phi_m} \neq 1$ ，那么方程(2.C.4)告诉我们 $\mathcal{T}_{nm} = \mathcal{T}_{mn} = 0$ 。通过列出 $e^{i\phi_n} = 1$ 时所有的行与列，可以将矩阵 \mathcal{T} 写成如下形式

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \quad (2.C.5)$$

其中 \mathcal{A} 是对称且么正的，而 \mathcal{B} 的对角部分全为零。因为 \mathcal{A} 是对称的，它可以表示为一个对称反厄密对矩阵的指数，所以通过一个仅作用在 \mathcal{A} 上的变换(2.C.2)可以使其对角化， \mathcal{U} 相对应的子矩阵则变成实的且正交。因而必须要考虑的仅是连接 $e^{i\phi_n} \neq 1$ 的行与列的子矩阵 \mathcal{B} 。对于 $n \neq m$ ，方程(2.C.4)给出 $\mathcal{T}_{nm} = e^{i\phi_n} \mathcal{T}_{mn}$ 以及 $\mathcal{T}_{mn} = e^{i\phi_m} \mathcal{T}_{nm}$ ，所以 $\mathcal{T}_{nm} = e^{i\phi_n} e^{i\phi_m} \mathcal{T}_{nm}$ 以及 $\mathcal{T}_{mn} = e^{i\phi_m} e^{i\phi_n} \mathcal{T}_{mn}$ 。因而除非 $e^{i\phi_n} e^{i\phi_m} = 1$ ，否则 $\mathcal{T}_{nm} = \mathcal{T}_{mn} = 0$ 。如果我们首先列出的相位给定为 $e^{i\phi_1} \neq 1$ 的所有行与列，再列出相位相反的所有行与列，再列出其它不等于 $e^{\pm i\phi_1}$ 相位为 $e^{i\phi_2} \neq 1$ 的所有行与列，再列出相位相反的行与列，一直做下去。矩阵 \mathcal{B} 变成分块对角形式

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathcal{B}_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (2.C.6)$$

其中

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2\mathcal{C}_i} \\ e^{-i\phi_i/2\mathcal{C}_i^T} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.C.7)$$

更进一步， \mathcal{T} 的么正性以及随之而来的 \mathcal{B} 的么正性要求 $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_i^\dagger = \mathcal{C}_i^\dagger\mathcal{C}_i = 1$ ，因而 \mathcal{C}_i 是平方且么正的。通过作用变换(2.C.2)，其中 \mathcal{U} 的分块对角形式与 \mathcal{T} 相同，并且第*i*个分块矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix} V_i & 0 \\ 0 & W_i \end{pmatrix}$$

其中 V_i 和 W_i 么正，子矩阵 \mathcal{C}_i 服从变换 $\mathcal{C}_i \rightarrow V_i^{-1}\mathcal{C}_iW_i^*$ ，所以我们可以显然的选择变换使 $\mathcal{C}_i = 1$ 。这构建了每个相位为 $e^{i\phi_i}$ 和 $e^{-i\phi_i}$ 矩阵中成对单行与单列之间的对应。为了使矩阵 \mathcal{B} 的分块对角形式成为(2.C.3)的 2×2 块。现在仅需要重排行与列使得在第*i*个分块内我们交替的列出相位分别为 $e^{i\phi_i}$ 和 $e^{-i\phi_i}$ 的行与列。))

注意到， $e^{i\phi} \neq 1$ 是很重要的，因而选择态以对角化时间反演算符是不可能的。如果我们有一对带有矩阵(2.C.3)的态 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ ， T 作用其上，那么

$$T\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\phi/2} (-1)^{j-\sigma} \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,\mp}. \quad (2.C.8)$$

然后，作用在这些态的一个线性组合上，时间反演给出

$$T(c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+} + c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}) = (-1)^{j-\sigma} (e^{i\phi/2}c_+^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,-} + e^{-i\phi/2}c_-^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,+}).$$

对于在 T 的作用下，只被变换一个相位 λ 的 $c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+} + c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}$ ，必然有

$$e^{i\phi/2}c_+^* = \lambda c_- \quad e^{-i\phi/2}c_-^* = \lambda c_+.$$

但是结合这些方程给出 $e^{\pm i\phi/2}c_\pm^* = |\lambda|^2 c_\pm^* e^{\mp i\phi/2}$ ，除非 $c_+ = c_- = 0$ 或 $e^{i\phi}$ 是么正的，否则这是不可能的。因此对于 $e^{i\phi} \neq 1$ ，除了那些与自旋联系的简并，时间反演不变性在这些态上强加了一个二度简并。

当然，如果存在一个额外的“内禀”对称算符 S ，其使这些态服从如下的变换

$$S\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp},$$

那么我们可以重新定义时间算符为 $T' \equiv S^{-1}T$ ，并且这个算符不会混淆 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ 与其它态。仅在没这类内禀对称性存在的情况下我们可以把粒子态的二重性归因于时间反演。

现在让我们回到 T 平方的问题上。重复变换(2.C.8)给出

$$T^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = (-1)^{2j} e^{\mp i\phi}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}. \quad (2.C.9)$$

如果我们像Wigner一样假定 T^2 正比于单位算符，那么我们将不得不有 $e^{i\phi} = e^{-i\phi}$ ，因此相位是实的而不得不是+1或-1。选择 $e^{i\phi} = -1$ 仍然将要求除了与自旋相联系的单粒子态的二度简并性，并且在Wigner的假定下所有的粒子都将会显示这个二重性。但是这里没有什么原因在方程(2.C.8)中取一般相位 ϕ ，可能对于某些粒子是零，对于某些不是。因此可观测粒子不显示额外二度简并性的现象并不排除其它粒子会有这种简并的可能性。

我们也可以考虑宇称算符P更复杂表示的可能性，即

$$P\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{P}_{nm} \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,n}, \quad (2.C.10)$$

其中矩阵 \mathcal{P} 除么正外没有其他约束。不像时间反演的情况，这里我们总可以通过态的基的选择使这个矩阵对角化。但是基的这个选择可能不是时间反演中的选择，所以，原则上，P和T一起可能会将强加P或T单独时没有要求的额外简并。

正如第5章所要讨论的，任何量子场论被预期反应一个被称为CPT的对称性，其以如下方式作用在单粒子态上

$$CPT\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n^c}, \quad (2.C.11)$$

其中 n^c 代表粒子 n 的反粒子（或者说“荷共轭”）在这个变换中相位和矩阵是不允许的。（当然我们总能通过结合CPT与一些好的内禀对称性引入相位或矩阵）它得出

$$(CPT)^2 \Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{2j} \Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n} \quad (2.C.12)$$

所以在 $(CPT)^2$ 的作用中，Wigner所建议的符号 $-(-1)^{2j}$ 的并不出现在量子场论中。

在T是某类现象中的一个好对称性的范围中，对于反演 $CP \equiv (CPT) T^{-1}$ 也是如此。对于这样的态，在T下的变换是一种简单的方式

$$T\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,n}, \quad (2.C.13)$$

CP算符的作用也非常简单

$$CP\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,n^c}. \quad (2.C.14)$$

那么算符 $C \equiv CPP^{-1}$ 仅是将粒子改为反粒子

$$C\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{\mathbf{p},\sigma,n^c}. \quad (2.C.15)$$

另一方面，当T有异常表示(2.C.8)时，方程(2.C.11)给出

$$CP\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\mp i\phi/2} \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp^c} \quad (2.C.16)$$

特别的，标记 \pm 所表明的简并性可能与粒子-反粒子简并性是相同的，使得态 Ψ_{\pm} 的反粒子（由CPT所定义）是 Ψ_{\mp} 。在这个情况下，CP将有不交换粒子和反粒子的异常的性质。只要这些性质被考虑了，CP和T将是我们通常所称的P和CT。但这不仅仅是一堆定义；在其他粒子上，CP和T仍然将有它们异常的效应。

粒子中没有已知的例子，来提供反演的异常表示，所以这些可能性在这里不会进一步追究。从现在起，这些反演将假定有2.6节中所假定的作用。

参考文献

- [1] P. A. M. Dirac, *The principles of Quantum mechanics*, 4th edn (Oxford University Press, Oxford, 1958).

-
- [2] E. P. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*(Braunschweig, 1931): pp. 251-3(English translation, Academic Press, Inc, New York, 1959). 对于无质量粒子, 见E. P. Wigner, *Theoretical Physics*(International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963): p. 64.
- [3] G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **88**, 101 (1952).
- [3a] 参看, S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*(Wiley, New York, 1972): 2.1节.
- [4] E. Inönü and E. P. Wigner, *Nuovo Cimento* **IX**, 705 (1952)
- [5] E. P. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 149 (1939).
- [6] G. W. Mackey, *Ann, Math.* **55**, 101 (1952); **58**, 193 (1953); *Acta. Math.* **99**, 265 (1958); *Induced Representation of Groups and Quantum Mechanics* (Benjamin, New Youk, 1968).
- [7] 参看, A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957): 第4章; M. E. Rose, *Elementary theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957): Chapter IV; L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics – Non Relativistic Theory*, 3rd edn. (Pergamon Press, Oxford, 1977): 第58节; Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific, Singapore, 1985); Sections 7.3 and 8.1.
- [8] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956); C. S. Wu *et al.*, *Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957); R. Garwin, L. Lederman, and M. Weinrich, *Phys. Rev.* **105**, 1415 (1957); J. I. Friedman and V. L. Telegdi, *Phys. Rev.* **105**, 1681 (1957).
- [9] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Phys. Rev. Letters*, **13**, 138 (1964).
- [10] H. A. Kramres, *Proc. Acad. Sci Amsterdam* **33**, 959 (1930); 另见F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).

第 3 章 散射理论

上一章所描述的相对论量子力学的一般原理，迄今为止仅在单个稳定粒子的态中使用。这样的单粒子态，它们本身不是非常有趣的一—而当两个或多个粒子彼此相互作用时，有趣的事情才会发生。但是实验一般不追寻粒子相互作用事件中的详细过程。反而，典型实验（至少在核物理或基本粒子物理中）是几个粒子从一个宏观大距离接近彼此，并在一个微观小区域相互作用，之后相互作用的产物又一次跑到宏观远距离处。碰撞前和碰撞后的物理态由那些相距很远以至于相当于无相互作用的粒子构成，所以它们可以被描述为上一场所讨论的单粒子态的直积。在这样的实验中，所被测量的是，相距很远且相当于无相互作用粒子的初态和末态之间跃迁的几率分布，或者说“截面”。本章将概述用以计算这些几率和截面的形式体系¹。

3.1 “入” 态和 “出” 态

由几个不相互作用粒子构成的态可以被视为在作为单粒子态直积的非齐次 Lorentz 群下变换的态。为了标记这个单粒子态，我们使用只用它们的四动量 p^μ ，自旋 z 分量（或者，对于无质量粒子是螺旋度） σ ，以及由于我们可能要处理不止一个种类的粒子，用以标记粒子种类的额外离散标号 n ，其包含对它质量，自旋，电荷等的指定。一般变换规则是

$$\begin{aligned}
 U(\Lambda, a)\Psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} &= \exp\left(-ia_\mu((\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \dots)\right) \\
 &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \\
 &\times \Psi_{\Lambda p_1, \sigma'_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma'_2, n_2; \dots}
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

其中 $W(\Lambda, p)$ 是 Wigner 旋转(2.5.10)，而 $D_{\sigma'_\sigma}^{(j)}(W)$ 是三维旋转群的常规的 $(2j+1)$ 维幺正矩阵表示。（这是针对有质量粒子的；对于任意的无质量粒子，矩阵 $D_{\sigma'_\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))$ 被替换为 $\delta_{\sigma'_\sigma} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))$ ，其中 θ 是被方程(2.5.43)所定义的角度。）这个态像方程(2.5.19)一样归一化

$$\begin{aligned}
 &\left(\Psi_{p'_1, \sigma'_1, n'_1; p'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots}, \Psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots}\right) \\
 &= \delta^3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{n'_1 n_1} \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \delta_{n'_2 n_2} \dots \\
 &\quad \pm \text{置换}
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

其中被引入的项“±置换”是考虑了粒子种类 n'_1, n'_2, \dots 的某些置换与粒子种类 n_1, n_2, \dots 是相同的可能性。（在第4章将会更加完整的讨论，如果这个置换包含半整数自旋粒子的奇次置换，则符号是 -1 ，否则是 $+1$ 。在这章的工作中，这是不重要的。）

我们通常使用一个缩写记法，令一个希腊字母 α ，代表整个集合 $p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots$ 。在这个记法下，方程(3.1.2)简单地写为

$$(\Psi_{\alpha'}, \Psi_{\alpha}) = \delta(\alpha' - \alpha) \quad (3.1.3)$$

其中 $\delta(\alpha' - \alpha)$ 代表出现在方程(3.1.2)右边， δ 函数与克罗内克 δ 符号乘积的和。另外，在态上求和，我们写为

$$\int d\alpha \dots \equiv \sum_{n_1 \sigma_1 n_2 \sigma_2 \dots} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \dots, \quad (3.1.4)$$

也就是说，在这样的求和和积分下，我们只包含一个构型，这个构型仅在全同粒子的交换下不产生差异。特别的，像方程(3.1.3)那样归一后，态的完备关系写为

$$\Psi = \int d\alpha \Psi_{\alpha}(\Psi_{\alpha}, \Psi). \quad (3.1.5)$$

变换规则(3.1.1)是因为各种原因不相互作用粒子的唯一可能。令 $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ 以及 $a^{\mu} = (0, 0, 0, \tau)$ ，这样 $U(\Lambda, a) = \exp(iH\tau)$ ，方程(3.1.1)所要求的另一件事是 Ψ_{α} 是能量本征态

$$H\Psi_{\alpha} = E_{\alpha}\Psi_{\alpha} \quad (3.1.6)$$

其能量等于单粒子能量的和

$$E_{\alpha} = p_1^0 + p_2^0 + \dots \quad (3.1.7)$$

其中没有相互作用项，这种项在一个时刻将会涉及多个粒子。

另一方面，变换规则(3.1.1)确实适用于时间 $t \rightarrow \pm\infty$ 时的散射过程。正如在本章开头所解释的，在典型的散射实验中，我们以时间 $t \rightarrow -\infty$ 时的粒子开始，它们相距如此之远以至于还没有相互作用，而在 $t \rightarrow +\infty$ 时的末尾，粒子分开如此之远以至于它们停止了相互作用。我们因而有了两个而非一个按照方程(3.1.1)变换的态：“入”态和“出”态*，如果观察分别是在 $t \rightarrow -\infty$ 时和 $t \rightarrow +\infty$ 时做的，将会发现态 Ψ_{α}^{+} 和 Ψ_{α}^{-} 包含标号 α 所描述的粒子。

注意这个定义是怎样被构造的。为了继续显示Lorentz不变性，在我们这里所使用的形式体系中，态矢不随时间改变—态矢 Ψ 描述一个多粒子系统的整个时空历史。（这被称为Heisenberg绘景，与Schrödinger绘景相区别的是，在Schrödinger绘景中算符是不变的，而态随时间改变。）因此，我们不称 Ψ_{α}^{\pm} 是某个时间相关态矢 $\Psi(t)$ 在 $t \rightarrow \mp\infty$ 时的极限。

然而，态的定义中暗示着一个源于观察系统的观察者的内部结构的选择；不同的观测者看到等价的态矢，但不是相同的态矢。特别的，假定一个标准观测者 \mathcal{O} 设置他或她的时钟，使得 $t = 0$ 是碰撞发生的时间，而某个其他的观测者 \mathcal{O}' ，其相对于第一个静止，设置钟表使得 $t' = 0$ 与 $t = \tau$ 为同一时间；即，两个观测者的时间坐标通过 $t' = t - \tau$ 相关。那么，如果 \mathcal{O} 看见系统处在态 Ψ 上， \mathcal{O}' 将会看到系统处在态 $U(1, -\tau)\Psi = \exp(-iH\tau)\Psi$ 。因此，在碰撞（处在 \mathcal{O} 使用的标准下）发生的遥远过去和遥远未来的态表现为通过一个时间平移算符 $\exp(-iH\tau)$ 的作用，其中分别有 $\tau \rightarrow -\infty$ 和 $\tau \rightarrow +\infty$ 。当然，如果态真是一个能量本征态，那么它不可能在时间上定域—算符 $\exp(iH\tau)$ 将会产生一个无关紧要的相位因子 $\exp(-iE_{\alpha}\tau)$ 。因此，我们必须考察

*针对“入”态和“出”态的标号“+”和“-”看起来似乎有点落后，但是它们似乎已经成为传统。它们缘于方程(3.1.16)中的符号。

波包，叠加态 $\int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha$ ，其中振幅 $g(\alpha)$ 非零且在能量的某个有限范围 ΔE 内光滑。“入”态和“出”态定义为

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm = \int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm$$

这使得叠加表现为，当 $\tau \ll -1/\Delta E$ 或 $\tau \gg +1/\Delta E$ 时，相对应的自由粒子态的叠加。

更具体一点，假定我们能够将时间平移算符的生成元 H 分为两项，自由粒子哈密顿量 H_0 和相互作用 V ，

$$H = H_0 + V \quad (3.1.8)$$

在这种形式下，使得 H_0 有本征态 Φ_α ，其与完整哈密顿量 H 的本征态 Ψ_α^+ 和 Ψ_α^- 有相同的表现

$$H_0 \Phi_\alpha = E_\alpha \Phi_\alpha, \quad (3.1.9)$$

$$(\Phi_{\alpha'}, \Phi_\alpha) = \delta(\alpha' - \alpha). \quad (3.1.10)$$

注意到，在这里假定 H_0 有着与全哈密顿量 H 相同的频谱。这要求出现在 H_0 中的质量是实际测量的物理质量，其与出现在 H 中的“裸”质量项不必须相同；如果这里有任何差异，其必须被吸入在相互作用 V 中，而不是 H_0 。另外， H 中的任何相关束缚态都应该像一个基本粒子一样被引入 H_0 。^{**}

“入”态和“出”态现在可以定义为 H 而不是 H_0 的本征态

$$H \Psi_\alpha^\pm = E_\alpha \Psi_\alpha^\pm \quad (3.1.11)$$

其对于 $\tau \rightarrow -\infty$ 或 $\tau \rightarrow +\infty$ ，分别满足条件

$$\int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm \rightarrow \int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha) \Phi_\alpha. \quad (3.1.12)$$

方程(3.1.12)对于 $\tau \rightarrow -\infty$ 或 $\tau \rightarrow +\infty$ ，分别可以重写为所要求的：

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm \rightarrow \exp(-iH_0\tau) \int d\alpha g(\alpha) \Phi_\alpha.$$

这有时重写为“入”态和“出”态的公式：

$$\Psi_\alpha^\pm = \Omega(\mp\infty) \Phi_\alpha, \quad (3.1.13)$$

其中

$$\Omega(\tau) \equiv \exp(+iH\tau) \exp(-iH_0\tau). \quad (3.1.14)$$

然而，应当记住方程(3.1.13)中的 $\Omega(\mp\infty)$ 仅当其作用在能量本征态的光滑叠加态上时才给出有意义的结果。

^{**}换一种说法，在非相对论问题中，我们可以在 H_0 中引入结合势。该方法在“重排碰撞”的应用中，即某些束缚态出现在初态而不出现在末态，或者是相反的情况，将 H 分成 H_0 和 V 的分割在初态和末态中必须是不同的。

定义(3.1.12)的一个显然结果是“入”态和“出”态就像自由粒子态一样归一化。为了看到这一点，注意到方程(3.1.12)的左边是通过让么正算符 $\exp(-iH\tau)$ 作用在一个时间无关态上获得的，所以它的范数是独立于时间，因而等于 $\tau \rightarrow \infty$ 时的范数，即方程(3.1.12)的右边的范数：

$$\begin{aligned} & \int d\alpha d\beta \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) \\ &= \int d\alpha d\beta \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) . \end{aligned}$$

因为假定其对于所有的光滑函数 $g(\alpha)$ 是正确的，标量积必须相等

$$(\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) = (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) = \delta(\beta - \alpha) . \quad (3.1.15)$$

由于某些原因，得到满足条件(3.1.12)的能量本征值方程(3.1.11)的一个显式却形式化的解是有用的。因为这个原因，将方程(3.1.11)写为

$$(E_\alpha - H_0) \Psi_\alpha^\pm = V \Psi_\alpha^\pm .$$

算符 $E_\alpha - H_0$ 不是可逆的；它不仅湮灭自由粒子态 Φ_α ，也湮灭相同能量其它自由粒子态 Φ_β 的连续统。因为当 $V \rightarrow 0$ 时，“入”态和“出”态恰好变成 Φ_α ，我们暂时将形式解写为 Φ_α 加上正比于 V 的一项：

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm , \quad (3.1.16)$$

或者，以自由粒子的完全集展开，

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + \int d\beta \frac{T_{\beta\alpha}^\pm \Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} , \quad (3.1.17)$$

$$T_{\beta\alpha}^\pm \equiv (\Phi_\beta, V \Psi_\alpha^\pm) , \quad (3.1.18)$$

其中 ϵ 是无限小的正数，插入其中是为了赋予 $(E_\alpha - H_0)$ 的倒数以意义。这些被称之为Lippmann-Schwinger方程^{1a}。我们将在下一节末尾使用方程(3.1.17)给出“入”态与“出”态正交性一个不太严格的证明。

对于“入”态和“出”态，分别在分母上带有 $+i\epsilon$ 或 $-i\epsilon$ 的方程(3.1.17)是否满足条件(3.1.12)有待证明。由于这个原因，考察叠加态

$$\Psi_g^\pm(t) \equiv \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm , \quad (3.1.19)$$

$$\Phi_g(t) \equiv \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Phi_\alpha . \quad (3.1.20)$$

我们想要证明当 $t \rightarrow -\infty$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时， $\Psi_g^+(t)$ 和 $\Psi_g^-(t)$ 分别会接近 $\Phi_g(t)$ 。在方程(3.1.19)中利用方程(3.1.17)给出

$$\Psi_g^\pm(t) = \Phi_g(t) + \int d\alpha \int d\beta \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm \Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} . \quad (3.1.21)$$

我们先不计后果的交换积分的次序，并考察积分

$$\mathcal{J}_\beta \equiv \int d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} .$$

当 $t \rightarrow -\infty$, 对于变量 E_α , 我们可以在上半平面以一个很大的半圆闭合积分围道, 而来自半圆的贡献被因子 $\exp(-iE_\alpha t)$ 抵消, 这个因子当 $t \rightarrow -\infty$ 且 $\text{Im } E_\alpha > 0$ 时指数变小。于是这个积分通过对被积函数在上半平面的奇点求和得到。一般而言, 函数 $g(\alpha)$ 和 $T_{\beta\alpha}^\pm$ 预期在带有有限虚部的 E_α 的某些值出有奇点, 但正如大半圆, 当 $t \rightarrow -\infty$, 它们的贡献指数衰减。(更明确地说, $-t$ 必须远大于波包 $g(\alpha)$ 中的时间不确定性以及碰撞持续时间, 其分别给出 $g(\alpha)$ 和 $T_{\beta\alpha}^\pm$ 在复 E_α 平面上的奇点位置。) 这对于 \mathcal{S}_β^- 而非 \mathcal{S}_β^+ 在上半平面保留了 $(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)^{-1}$ 中的奇异性。那么我们可以得出这样的结论: 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, \mathcal{S}_β^+ 为零。以同样的方法, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 我们必须在下半平面闭合积分围道使得 \mathcal{S}_β^- 在这个极限下为零。我们得出这样的结论: 当 $t \rightarrow \mp\infty$ 时, $\Psi_g^\pm(t)$ 接近 $\Phi_g(t)$ 。这与定义条件(3.1.12)是一致的。

* * *

为了将来的使用, 我们记入方程(3.1.17)中因子 $(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)^{-1}$ 的一个便利表示。一般而言, 我们可以写下

$$(E \pm i\epsilon)^{-1} = \frac{\mathcal{P}_\epsilon}{E} \mp i\pi\delta_\epsilon(E), \quad (3.1.22)$$

其中

$$\frac{\mathcal{P}_\epsilon}{E} \equiv \frac{E}{E^2 + \epsilon^2}, \quad (3.1.23)$$

$$\delta_\epsilon(E) \equiv \frac{\epsilon}{\pi(E^2 + \epsilon^2)}. \quad (3.1.24)$$

函数(3.1.23), 当 $|E| \gg \epsilon$ 时恰为 $1/E$, 当 $E \rightarrow 0$ 时为零, 所以当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 它的行为就像“主值函数” \mathcal{P}/E , 通过排除 $E = 0$ 周围的一个无限小积分区间, 其允许我们赋予 $1/E$ 与任何 E 的光滑函数之积的积分以意义。函数(3.1.24)在 $|E| \gg \epsilon$ 时是 ϵ 阶的, 并且当其对所有的 E 值积分是给出 1, 所以在极限 $\epsilon \rightarrow 0$ 下, 它的行为就像熟悉的 δ -函数 $\delta(E)$ 。在这个理解下, 我们可以去掉方程(3.1.22)中的标记 ϵ , 并简单的写为

$$(E \pm i\epsilon)^{-1} = \frac{\mathcal{P}}{E} \mp i\pi\delta(E). \quad (3.1.25)$$

3.2 S-矩阵

一个实验者一般在 $t \rightarrow -\infty$ 时预备一个粒子内容明确的态, 然后在 $t \rightarrow +\infty$ 时测量这个态像什么。如果所预备的态在在 $t \rightarrow -\infty$ 有一粒子内容 α , 那么它是“入”态 Ψ_α^+ , 如果它在 $t \rightarrow +\infty$ 时被发现具有粒子内容 β , 那么它是“出”态 Ψ_β^- 。因此, 跃迁 $\alpha \rightarrow \beta$ 的几率振幅是标量积

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+). \quad (3.2.1)$$

这个复振幅的阵列被称为 S -矩阵²。如果没有相互作用, 那么“入”态和“出”态是相同的, 那么 $S_{\beta\alpha}$ 就是 $\delta(\alpha - \beta)$ 。反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率因此正比于 $|S_{\beta\alpha} - \delta(\alpha - \beta)|^2$ 。我们将在3.4节细致地看到 $S_{\beta\alpha}$ 所处理的就是测量截面和速率。

应该强调一下, “入”态和“出”态并不处在两个不同的Hilbert空间。它们所不同的仅是它们是如何被标记的: 即它们是出现在 $t \rightarrow -\infty$ 还是 $t \rightarrow +\infty$ 。任何“入”态可以展为“出”态的和, 而其展开系数由 S -矩阵(3.2.1)给定。

因为 $S_{\beta\alpha}$ 是连接两个正交态完全集的矩阵，所以它必须是幺正的。为了更细致的看到这一点，对“出”态应用完备关系(3.1.5)，并写出

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\Psi_{\gamma}^+, \Psi_{\beta}^-)(\Psi_{\beta}^-, \Psi_{\alpha}^+) = (\Psi_{\gamma}^+, \Psi_{\alpha}^+).$$

利用(3.1.15)，这给出

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma - \alpha) \quad (3.2.2)$$

或者，简言之， $S^\dagger S = 1$ 。以相同的方式，“出”态的完备性给定^{*}为

$$\int d\beta S_{\gamma\beta} S_{\alpha\beta}^* = \delta(\gamma - \alpha) \quad (3.2.3)$$

或者，换句话说， $SS^\dagger = 1$ 。

处理算符 S 而不是 S -矩阵通常是方便的，算符 S 定义为拥有自由粒子态之间的矩阵元，这个矩阵元与相对应的 S -矩阵元相同：

$$(\Phi_{\beta}, S\Phi_{\alpha}) \equiv S_{\beta\alpha}. \quad (3.2.4)$$

针对“入”态和“出”态的，显然却高度形式化的表达式(3.1.13)得出了 S -算符的一个公式：

$$S = \Omega(\infty)^\dagger \Omega(-\infty) = U(+\infty, -\infty), \quad (3.2.5)$$

其中

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \Omega(\tau)^\dagger \Omega(\tau_0) = \exp(iH_0\tau) \exp(-iH(\tau - \tau_0)) \exp(-iH_0\tau_0). \quad (3.2.6)$$

这个公式将在下一节被用来检验 S -矩阵的Lorentz不变性，并在3.5节中用以导出时间相关微扰论中 S -矩阵的公式。

上一节的方法可以用来导出 S -矩阵另一有用的公式。返回“入”态 Ψ^+ 的方程(3.1.21)，不过令时间 $t \rightarrow +\infty$ 。现在，我们必须在下半 E_α 平面闭合积分围道，尽管如此，像之前一样， $T_{\beta\alpha}^\pm$ 和 $g(\alpha)$ 中奇点的贡献在 $t \rightarrow +\infty$ 时无贡献，我们现在要摘选来自奇异因子 $(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)^{-1}$ 的贡献。围道从 $E_\alpha = -\infty$ 到 $E_\alpha = +\infty$ ，然后通过下半平面的一个大半圆再回到 $E_\alpha = -\infty$ ，所以它以顺时针方向绕奇点一圈。通过留数法，对 E_α 的积分由被积函数在 $E_\alpha = E_\beta - i\epsilon$ 的值再乘以因子 $-2i\pi$ 给出。于是，在 $\epsilon \rightarrow 0+$ 的极限下， $t \rightarrow +\infty$ 时，(3.1.21)中对 α 的积分有一渐进行为

$$\mathcal{I}_\beta^+ \rightarrow -2i\pi e^{-iE_\beta t} \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+$$

因而， $t \rightarrow +\infty$ 时，

$$\Psi_g^+(t) \rightarrow \int d\beta e^{-iE_\beta t} \Phi_\beta \left[g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+ \right].$$

但是， Ψ_g^+ 展成“出”态完全集的表达式(3.1.19)给出

$$\Psi_g^+(t) = \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \int d\beta \Psi_\beta^- S_{\beta\alpha}.$$

^{*}在本节的末尾给出了另一种证明。注意，对于无限“矩阵”，幺正条件 $S^\dagger S = 1$ 和 $SS^\dagger = 1$ 不是等价的。

因为 $S_{\beta\alpha}$ 包含因子 $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ ，这可以重写为

$$\Psi_g^+(t) = \int d\beta \Psi_\beta^- e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha}$$

并且，利用“出”态的定义性质(3.1.12)， $t \rightarrow +\infty$ 时，其有一个渐进行为

$$\Psi_g^+(t) \rightarrow \int d\beta \Phi_\beta e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha} .$$

用上式与我们之前的结果进行比较，我们发现

$$\int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha} = g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+$$

或者

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) T_{\beta\alpha}^+ . \quad (3.2.7)$$

这给出了 S -矩阵的一个简单近似：对于一个弱相互作用 V ，我们能够忽视(3.1.18)中“入”态与自由粒子的差异，这种情况下方程(3.2.7)给出

$$S_{\beta\alpha} \simeq \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) (\Phi_\beta, V \Phi_\alpha) . \quad (3.2.8)$$

这被称为Born近似³。在3.5节将讨论高阶项。

* * *

我们可以利用“入”态和“出”态的Lippmann-Schwinger方程(3.1.16)，在不加 $t \rightarrow \mp\infty$ 这个极限的情况下，给出这些态的正交性， S -矩阵的么正性以及方程(3.1.16)的一个证明⁴。首先，通过在矩阵元 $(\Psi_\beta^\pm, V \Psi_\alpha^\pm)$ 的左边和右边使用方程(3.1.16)，并将结果等同起来，我们发现

$$\begin{aligned} & (\Psi_\beta^\pm, V \Phi_\alpha) + (\Psi_\beta^\pm, V(E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm) \\ & = (\Phi_\beta, V \Psi_\alpha^\pm) + (\Psi_\beta^\pm, V(E_\beta - H_0 \mp i\epsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm) . \end{aligned}$$

对中间态的一个完全集 Φ_γ 求和，这给出方程：

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{\pm*} - T_{\beta\alpha}^\pm & = - \int d\gamma T_{\gamma\beta}^{\pm*} T_{\gamma\alpha}^\pm \\ & \times \left([E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon]^{-1} - [E_\beta - E_\gamma \mp i\epsilon]^{-1} \right) . \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

为了证明“入”态和“出”态的正交性，用 $E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon$ 除方程(3.2.9)给出

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T_{\alpha\beta}^\pm}{E_\beta - E_\alpha \pm 2i\epsilon} \right)^* + \frac{T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon} \\ & = - \int d\gamma \left(\frac{T_{\gamma\beta}^\pm}{E_\beta - E_\gamma \pm i\epsilon} \right)^* \frac{T_{\gamma\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon} . \end{aligned}$$

左边分母中的 2ϵ 可以被替换为 ϵ ，这是因为唯一重要的是它们是正的无限小量。那么我们看到 $\delta(\beta - \alpha) - T_{\beta\alpha}^\pm / (E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)$ 是么正的。与(3.1.17)一起，这正是 Ψ_α^\pm 构成态矢的两个正交基的陈述。通过用 $\delta(E_\alpha - E_\beta)$ 而不是 $(E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon)^{-1}$ 乘以(3.2.9)，以一种类似的方式证明 S -矩阵的么正性。

3.3 S-矩阵的对称性

在这一节，我们将考察在不同对称性下S-矩阵不变性的含义，以及哈密顿量满足什么样的条件会确保这类的不变性。

Lorentz 不变性

对于任意的固有正时Lorentz变换 $x \rightarrow \Lambda x + a$ ，通过指定么正算符 $U(\Lambda, a)$ 在方程(3.1.1)中是作用在“入”态或“出”态上，我们可以定义它。当我们称一个理论是Lorentz不变的，我们是在说在(3.1.1)中作用在“入”态和“出”态上的算符 $U(\Lambda, a)$ 是相同的。因为算符 $U(\Lambda, a)$ 是么正的，我们可以写下

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) = (U(\Lambda, a) \Psi_{\beta}^{-}, U(\Lambda, a) \Psi_{\alpha}^{+})$$

所以利用(3.1.1)，我们获得了S-矩阵的Lorentz不变性（实际上是协变）：对于任意的Lorentz变换 Λ_{ν}^{μ} 以及平移 a^{μ} ，

$$\begin{aligned} & S_{p'_1, \sigma'_1, n'_1; p'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots, p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2; \dots} \\ &= \exp\left(ia_{\mu} \Lambda_{\nu}^{\mu} (p_1^{\nu} + p_2^{\nu} + \dots - p'_1{}^{\nu} - p'_2{}^{\nu} - \dots)\right) \\ & \times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots p'_1{}^0 p'_2{}^0 \dots}} \\ & \times \sum_{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \dots} D_{\bar{\sigma}_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \\ & \times \sum_{\bar{\sigma}'_1 \bar{\sigma}'_2 \dots} D_{\bar{\sigma}'_1 \sigma'_1}^{(j'_1)*}(W(\Lambda, p'_1)) D_{\bar{\sigma}'_2 \sigma'_2}^{(j'_2)*}(W(\Lambda, p'_2)) \dots \\ & \times S_{\Lambda p'_1, \bar{\sigma}'_1, n'_1; \Lambda p'_2, \bar{\sigma}'_2, n'_2; \dots, \Lambda p_1, \bar{\sigma}_1, n_1; \Lambda p_2, \bar{\sigma}_2, n_2; \dots} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

（这里的撇号是用来区分初粒子和末粒子；上横线是用来表明变量和。）特别的，因为左边是独立于 a^{μ} 的，所以必须等于右边，并且除非四动量守恒，否则S-矩阵为零。因此，我们可以以如下的形式写出表示粒子间实际相互作用的S-矩阵部分：

$$S_{\beta\alpha} - \delta(\beta - \alpha) = -2\pi i M_{\beta\alpha} \delta^4(p_{\beta} - p_{\alpha}) . \quad (3.3.2)$$

（然而，正如我们将在下一章看到的，振幅 $M_{\beta\alpha}$ 本身所包含的项会涉及深一层的 δ -函数因子。）

方程(3.3.1)应该被认为是我们意指S-矩阵的Lorentz不变性时的定义，而不是一个定理，这是因为它仅针对于一些特殊选择的哈密顿量，这些哈密顿量中存在能够作用在(3.3.1)中“入”态和“出”态上的么正算符。我们需要公式化哈密顿量上确保S-矩阵的Lorentz不变性的条件。由于这个原因，处理由方程(3.2.4)所定义的算符S将是方便的：

$$S_{\beta\alpha} = (\Phi_{\beta}, S\Phi_{\alpha}) .$$

正如我们在第2章已经定义的自由粒子态 Φ_{α} ，它们提供了非齐次Lorentz群的表示，所以我们总

能定义一个么正算符 $U_0(\Lambda, a)$ ，将变换(3.1.1)引入到这些态上：

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, a)\Phi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2; \dots} &= \exp\left(-ia_\mu \Lambda^\mu_\nu (p_1^\nu + p_2^\nu + \dots)\right) \\ &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \\ &\times \Phi_{\Lambda p_1, \sigma'_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma'_2, n_2; \dots} \end{aligned}$$

如果这个么正算符与 S -算符对易，方程(3.3.1)因而将会成立：

$$U_0(\Lambda, a)^{-1} S U_0(\Lambda, a) = S .$$

这个条件也可以以无限小Lorentz变换的形式表达。正如在2.4节中那样，将会存在一组厄密算符，动量 \mathbf{P}_0 ，角动量 \mathbf{J}_0 ，以及推动算符 \mathbf{K}_0 ，这些算符与 H_0 一起，当它们作用在自由粒子态上式，生成了非齐次Lorentz变换的无限小版本。方程(3.3.1)与 S -矩阵在这类变换下不受影响的陈述是等价的，换句话说， S -算符与这些生成元对易：

$$[H_0, S] = [\mathbf{P}_0, S] = [\mathbf{J}_0, S] = [\mathbf{K}_0, S] = 0 . \quad (3.3.3)$$

因为算符 $H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ 和 \mathbf{K}_0 生成了 Φ_α 上的无限小非齐次Lorentz变换，它们自动满足对易关系(2.4.18)——(2.4.24)：

$$[J_0^i, J_0^j] = i\epsilon_{ijk} J_0^k , \quad (3.3.4)$$

$$[J_0^i, K_0^j] = i\epsilon_{ijk} K_0^k , \quad (3.3.5)$$

$$[K_0^i, K_0^j] = -i\epsilon_{ijk} J_0^k , \quad (3.3.6)$$

$$[J_0^i, P_0^j] = i\epsilon_{ijk} P_0^k , \quad (3.3.7)$$

$$[K_0^i, P_0^j] = -iH_0 \delta_{ij} , \quad (3.3.8)$$

$$[J_0^i, H_0] = [P_0^i, H_0] = [P_0^i, P_0^j] = 0 , \quad (3.3.9)$$

$$[K_0^i, H_0] = -iP_0^i , \quad (3.3.10)$$

其中 i, j, k 等取遍值1, 2和3，并且 ϵ_{ijk} 是全反对称张量，并有 $\epsilon_{123} = +1$ 。

以相同的方式，我们可以定义一组“精确生成元”，算符 \mathbf{P}, \mathbf{J} 和 \mathbf{K} 同全哈密顿量 H 一起生成了“入”态上的变换(3.1.1)。（正如已经提及了的，不显然的是相同的算符在“出”态上生成了相同的变换。）群结构告诉我们，这些精确的生成元满足相同的对易关系：

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk} J^k , \quad (3.3.11)$$

$$[J^i, K^j] = i\epsilon_{ijk} K^k , \quad (3.3.12)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon_{ijk} J^k , \quad (3.3.13)$$

$$[J^i, P^j] = i\epsilon_{ijk} P^k , \quad (3.3.14)$$

$$[K^i, P^j] = -iH \delta_{ij} , \quad (3.3.15)$$

$$[J^i, H] = [P^i, H] = [P^i, P^j] = 0 , \quad (3.3.16)$$

$$[K^i, H] = -iP^i . \quad (3.3.17)$$

事实上，在所有已知的场论中，相互作用的效应是在哈密顿量上增加一个相互作用项 V ，但保持动量和角动量不变：

$$H = H_0 + V, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0. \quad (3.3.18)$$

（唯一知道的例外是那些有拓扑扭结场的理论，例如有磁单极的理论，这些理论中态的角动量依赖于相互作用。）方程(3.3.18)暗示了，对易关系(3.3.11)，(3.3.14)和(3.3.16)被满足是假定了相互作用与自由粒子动量算符和角动量算符对易

$$[V, \mathbf{P}_0] = [V, \mathbf{J}_0] = 0. \quad (3.3.19)$$

很容易从Lippmann-Schwinger方程(3.1.16)，或者等价地，(3.1.13)看到当算符作用在“入”态（和“出”态）上，所生成的平移和旋转就是 \mathbf{P}_0 和 \mathbf{J}_0 。我们也容易看到 \mathbf{P}_0 和 \mathbf{J}_0 与方程(3.2.6)所定义的算符 $U(t, t_0)$ 对易，因而与 S -算符 $U(\infty, -\infty)$ 对易。更进一步，因为在(3.2.7)中的两项均有能量守恒 δ -函数，我们已知 S -算符与 H_0 对易。这使得我们需要证明与 S -算符对易的仅剩推动生成元 \mathbf{K}_0 。

另一方面，让推动生成元 \mathbf{K} 等于它的自由粒子配对 \mathbf{K}_0 是不可能的，这是因为如果那样，方程(3.3.15)和(3.3.8)将给出 $H = H_0$ ，这在有相互作用时一定不是正确的。因此，当我们向 H_0 上增加一个相互作用 V ，必须也要在推动生成元上增加一个修正 \mathbf{W} ：

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{W}. \quad (3.3.20)$$

在剩余的对易关系中，我们集中于方程(3.3.17)，其现在可以写成这样的形式

$$[\mathbf{K}_0, V] = -[\mathbf{W}, H]. \quad (3.3.21)$$

自动地，条件(3.3.21)是无用的，这是因为对于任意的 V ，我们总能通过给定 \mathbf{W} 在 H -本征矢 Ψ_α 和 Ψ_β 之间的矩阵元为 $-(\Psi_\beta, [\mathbf{K}_0, V] \Psi_\alpha) / (E_\beta - E_\alpha)$ 来定义它。回忆起，一个理论Lorentz不变性中的关键点不是应该存在一组满足方程(3.3.11)—(3.3.17)的精确生成元，而是这些算符应该以相同的方式作用在“入”态和“出”态上；仅找到满足方程(3.3.21)的算符 \mathbf{K} 是不够的。如果我们加上 \mathbf{W} 的矩阵元应该是能量的光滑函数，并且特定的没有形式为 $(E_\beta - E_\alpha)^{-1}$ 的奇点这一要求，方程(3.3.21)确实变得重要。现在我们应该证明，方程(3.3.21)同 \mathbf{W} 上一个合适的光滑条件一起，确实暗示着剩下的Lorentz不变条件 $[\mathbf{K}_0, S] = 0$ 。

为了证明这一点，考察 \mathbf{K}_0 与算符 $U(t, t_0)$ 的对易子，算符 $U(t, t_0)$ 由方程(3.2.6)所定义，并针对有限的 t 和 t_0 。利用方程(3.3.10)以及 \mathbf{P}_0 与 H_0 对易的事实得出：

$$[\mathbf{K}_0, \exp(iH_0 t)] = t \mathbf{P}_0 \exp(iH_0 t)$$

而方程(3.3.21)（其与方程(3.3.17)等价）得出

$$[\mathbf{K}, \exp(iH t)] = t \mathbf{P} \exp(iH t) = t \mathbf{P}_0 \exp(iH t).$$

那么，抵消 \mathbf{K}_0 与 U 对易子中的动量算符，我们发现：

$$[\mathbf{K}_0, U(\tau, \tau_0)] = -\mathbf{W}(\tau)U(\tau, \tau_0) + U(\tau, \tau_0)\mathbf{W}(\tau_0), \quad (3.3.22)$$

其中

$$\mathbf{W}(t) \equiv \exp(iH_0 t) \mathbf{W} \exp(-iH_0 t) . \quad (3.3.23)$$

如果 \mathbf{W} 在 H_0 -本征态之间的矩阵元是能量充分光滑的函数，那么当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时， $\mathbf{W}(t)$ 在能量本征态的光滑叠加态上的矩阵元为零，所以方程(3.3.22)有效地给出：

$$0 = [\mathbf{K}_0, U(\infty, -\infty)] = [\mathbf{K}_0, S] , \quad (3.3.24)$$

这正是所要证明的。这是显著地结果：方程(3.3.21)和 \mathbf{W} 矩阵元上的光滑条件确保了，当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时 $\mathbf{W}(t)$ 为零，这提供了 S -矩阵Lorentz不变性的一个充分条件。光滑条件是一个自然的条件，因为它很像 V 的矩阵元上的条件，这个条件使 $V(t)$ 在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时为零，正如为了证明 S -矩阵这一想法本身。

我们也能使用 $\tau = 0$ 和 $\tau_0 = \mp\infty$ 的方程(3.3.22)以证明

$$\mathbf{K}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{K}_0 , \quad (3.3.25)$$

其中， $\Omega(\mp\infty)$ 是根据(3.1.13)而定的算符，其将一个自由粒子态 Φ_α 转变为相应的“入”态或“出”态 Ψ_α^\pm 。另外，从方程(3.3.18)和(3.3.19)可以很一般地得出这对于动量和角动量同样是正确的：

$$\mathbf{P}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{P}_0 , \quad (3.3.26)$$

$$\mathbf{J}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{J}_0 . \quad (3.3.27)$$

最后，因为所有的 Φ_α 和 Ψ_α^\pm 分别是 H_0 和 H 的能量本征值均为 E_α 的本征态，我们有

$$H\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)H_0 . \quad (3.3.28)$$

方程(3.3.25)—(3.3.28)证明了，在我们的假设下，“入”态和“出”态确实像自由态一样在非齐次Lorentz变换下变换。另外，因为这些是类似的变换，我们现在可以看到，精确生成元 $\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{J}$ 和 H 满足与 $\mathbf{K}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ 和 H_0 相同的对易关系。这是为什么在证明 S -矩阵的Lorentz不变性中使用包含 \mathbf{K} 的其他对易关系(3.3.12)，(3.3.13)和(3.3.15)变得不必要的原因。

内部对称性

有几种对称性，例如核物理中质子和中子交换下的对称性，或者粒子和反粒子之间的“荷共轭”对称性，这些对称性与Lorentz不变性没有直接关系，并且进一步地，在所有的内部结构中表现相同。这样的对称变换 T 作为一个么正算符 $U(T)$ 作用在物理态的Hilbert空间上，这个算符引入的线性变换是作用在标记粒子种类的指标上的

$$\begin{aligned} U(T)\Psi_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} &= \sum_{\bar{n}_1 \bar{n}_2 \dots} \mathcal{D}_{\bar{n}_1 n_1}(T) \mathcal{D}_{\bar{n}_2 n_2}(T) \dots \\ &\times \Psi_{p_1\sigma_1 \bar{n}_1; p_2\sigma_2 \bar{n}_2; \dots} . \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

依据第2章中的普遍讨论， $U(T)$ 必须满足群的乘积规则

$$U(\bar{T})U(T) = U(\bar{T}T) , \quad (3.3.30)$$

其中 $\bar{T}T$ 是通过先进行变换 T 再进行某个其它变换 \bar{T} 得到的变换。用 $U(\bar{T})$ 作用在方程(3.3.29)上，我们看到矩阵 \mathcal{D} 满足相同的规则

$$\mathcal{D}(\bar{T})\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(\bar{T}T) . \quad (3.3.31)$$

另外，用 $U(T)$ 作用在两个不同的“入”态或连两个不同的“出”态上会得到两个态，取这两个态的内积，并使用归一化条件(3.1.2)，我们看到 $\mathcal{D}(T)$ 必须是幺正的

$$\mathcal{D}^\dagger(T) = \mathcal{D}^{-1}(T) . \quad (3.3.32)$$

最后，用 $U(T)$ 作用在一个“出”态和一个“入”态上会得到两个态，取这两个态的内积，其证明了 \mathcal{D} 与 S -矩阵对易，也就是说

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} \sum_{\bar{N}'_1 \bar{N}'_2 \dots} \mathcal{D}_{\bar{N}'_1 n'_1}^*(T) \mathcal{D}_{\bar{N}'_2 n'_2}^*(T) \dots \mathcal{D}_{\bar{N}_1 n_1}(T) \mathcal{D}_{\bar{N}_2 n_2}(T) \dots \\ & \quad \times S_{p'_1 \sigma'_1 \bar{N}'_1; p'_2 \sigma'_2 \bar{N}'_2; \dots, p_1 \sigma_1 \bar{N}_1; p_2 \sigma_2 \bar{N}_2; \dots} \\ & = S_{p'_1 \sigma'_1 n'_1; p'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots, p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

又一次的，这是当我们意指一个理论在内部对称性 T 下不变的定义，这是因为为了导出方程(3.3.33)，我们仍然需要证明在“入”态和“出”态上引起变换(3.3.29)的幺正算符 $U(T)$ 是相同的。如果有一个在自由粒子态上引起这些变换的“非围绕”变换算符 $U_0(T)$ ，这将是这种情况，

$$U_0(T) \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} = \sum_{\bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} \mathcal{D}_{\bar{N}_1 n_1}(T) \mathcal{D}_{\bar{N}_2 n_2}(T) \dots \Phi_{p_1 \sigma_1 \bar{N}_1; p_2 \sigma_2 \bar{N}_2; \dots} \quad (3.3.34)$$

并且，这个算符与哈密顿量的自由粒子部分和相互作用部分均对易

$$U_0^{-1}(T) H_0 U_0(T) = H_0 , \quad (3.3.35)$$

$$U_0^{-1}(T) V U_0(T) = V . \quad (3.3.36)$$

无论是从Lippmann-Schwinger方程(3.1.17)，还是从(3.1.13)，我们看到算符 $U_0(T)$ 将会引起“入”态和“出”态以及自由粒子态上的变换(3.3.29)，使得我们可以得到 $U(T)$ 为 $U_0(T)$ 的方程(3.3.29)。

物理上非常重要的一个特殊情况是单参量Lie群，其中 T 是单个参量 θ 的函数，并有

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(\bar{\theta} + \theta) . \quad (3.3.37)$$

正如2.2节中证明的，在这种情况下，相应的Hilbert空间算符必须采取这样的形式

$$U(T(\theta)) = \exp(iQ\theta) , \quad (3.3.38)$$

其中 Q 是厄密算符。同样地，矩阵 $\mathcal{D}(T)$ 采取这样的形式

$$\mathcal{D}_{n'n}(T(\theta)) = \delta_{n'n} \exp(iq_n \theta) , \quad (3.3.39)$$

其中 q_n 是一组实的与粒子种类相关的数。这里方程(3.3.33)告诉我们 q 是守恒的： $S_{\beta\alpha}$ 为零，除非

$$q_{n'_1} + q_{n'_2} + \dots = q_{n_1} + q_{n_2} + \dots . \quad (3.3.40)$$

这类守恒率的经典例子是电荷守恒。另外，在所有已知的过程中，重子数（重子的数目，诸如质子、中子和超子，减去它们反粒子的数目）守恒，轻子数（轻子的数目，诸如电子、 μ 子、 τ 子和中微子，减去它们反粒子的数目）守恒，但正如我们将在卷II所看到的，这些守恒率被认为仅是一个非常好的近似。这种类型有一些其它的守恒率显然仅是个近似，诸如被称为奇异数的守恒量，其被引入用以解释Rochester和Butler⁵于1947年在宇宙射线中发现的一类寿命相当长的粒子。例如，现在被称为 K^+ 和 K^0 的介子被赋予奇异数+1，超子 $\Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$ 被赋予奇异数-1，而更熟悉的质子，中子和 π 介子（或 π 子），它们的奇异数取为0。强相互作用中奇异数的守恒解释了为什么奇异粒子总是伴随着另一个奇异粒子产生，例如反应 $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0$ ，而奇异粒子相对较慢衰变成非奇异粒子的反应，例如 $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ 和 $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ ，说明了奇异数不守恒的相互作用是非常弱的。

“非阿贝尔”对称性，即生成元不互相对易的一个经典例子是同位旋对称性，其于1937年被提出⁶，基于一个证明类似质子和中子之间的强质子-质子力存在的实验⁷。数学上，这个群是 $SU(2)$ ，类似于三维旋转群的覆盖群；它的生成元被记为 t_i ，其中 $i = 1, 2, 3$ ，并满足类似(2.4.18)的对易关系：

$$[t_i, t_j] = i\epsilon_{ijk}t_k .$$

在同位旋对称性被遵守的程度上，它要求粒子构成简并多重态，这些态被一个整数或半整数 T 所标记，而其 $2T + 1$ 个分量由它们的 t_3 值所区分，正如被旋转不变形所要求的简并自旋多重态。这些粒子包括 $T = \frac{1}{2}$ 且 $t_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 的核子 p 和 n ； $T = 1$ 且 $t_3 = +1, 0, -1$ 的 π 介子 π^+, π^0 和 π^- ；以及 $T = 0$ 且 $t_3 = 0$ 的超子 Λ^0 。这些例子说明了，电荷 Q ，同位旋的第三分量 t_3 ，超子数 B 以及奇异数 S 之间的关系：

$$Q = t_3 + (B + S)/2 .$$

这个关系最初是从已观测到的选择定则中推断出来的，但是在1960年，Gell-Mann（盖尔曼）和Ne'man（内埃曼）将其解释为⁸，同位旋 \vec{T} 和“超荷” $Y \equiv B + S$ 嵌入到一个更大但非阿贝尔对称性被严重破坏的Lie群的结果，而这个非阿贝尔对称性基于非阿贝尔群 $SU(3)$ 。正如我们将在卷II所看到的，现在，同位旋和 $SU(3)$ 对称性均被理解为，强相互作用的现代理论——量子色动力学中两个或三个最轻夸克小质量的附带结果。

通过用以导出旋转不变形含义而被发明的相同方法，可以得到同位旋对称性在强相互作用粒子之间反应中的含义。特别的，对于两体反应 $A + B \rightarrow C + D$ ，方程(3.3.33)要求 S -矩阵能够写成这样的形式（除了同位旋以外，所有的标记被省略）

$$S_{t_{C_3 t_{D_3}, t_{A_3} t_{B_3}}} = \sum_{T, t_3} C_{T_C T_D}(T t_3; t_{C_3} t_{D_3}) C_{T_A T_B}(T t_3; t_{A_3} t_{B_3}) S_T ,$$

其中， $C_{j_1 j_2}(j\sigma, \sigma_1 \sigma_2)$ 是通常的Clebsch-Gordan系数⁹，用以从自旋 j_1 和 j_2 以及自旋的第三分量 σ_1 和 σ_2 分别合成自旋 j 以及第三分量 σ ；而 S_T 是依赖于 T 以及所有没有写出的动量和自旋变量，但与同位旋第三分量 $t_{A_3}, t_{B_3}, t_{C_3}, t_{D_3}$ 无关的“约化”矩阵。当然，像同位旋不变性的所有结果一些，这仅是个近似，其原因是这个对称性不被电磁（以及其它）相互作用遵守，例如，它被这个事实所证明：相同同位旋的多重态的不同成员，像 p 和 n ，有着不同的电荷和轻微的质量差异。

*上标表明电荷是以电子荷的绝对值为单位的。“超子”是奇异数非零且重子数为1的粒子。

宇称

在变换 $x \rightarrow -x$ 的对称性有效的范围内，必存在一个么正算符 P 使得“入”态和“出”态均按照单粒子态的直积变换：

$$P\Psi_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots}^{\pm} = \eta_{n_1}\eta_{n_2}\dots\Psi_{\mathcal{P}p_1\sigma_1n_1;\mathcal{P}p_2\sigma_2n_2;\dots}^{\pm} \quad (3.3.41)$$

其中 η_n 是种类为 n 粒子的内禀宇称，而 \mathcal{P} 反转了 p^μ 的空间部分。（这是针对有质量粒子的；针对无质量粒子的修正是显然的。）那么， S -矩阵的宇称守恒条件是：

$$S_{p'_1\sigma'_1n'_1;p'_2\sigma'_2n'_2;\dots, p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots} = \eta_{n'_1}^*\eta_{n'_2}^*\dots\eta_{n_1}\eta_{n_2}\dots \\ \times S_{\mathcal{P}p'_1\sigma'_1n'_1;\mathcal{P}p'_2\sigma'_2n'_2;\dots, \mathcal{P}p_1\sigma_1n_1;\mathcal{P}p_2\sigma_2n_2;\dots} \quad (3.3.42)$$

正如内部对称性，如果定义以这种方式作用在自由粒子态上的算符为 P_0 ，且其与 V 和 H_0 对易，那么满足方程(3.3.41)的算符 P 真实存在。

相位 η_n 可以从动力学模型或者实验中推断出来，但是却不提供 η 的唯一选择。这是因为我们总可以通过用任意的守恒内部对称算符结合 P 来重定义它。例如，如果 P 是守恒的，那么如下的量也是守恒的

$$P' \equiv P \exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q),$$

其中 B, L 和 Q 分别是超子数，轻子数和电荷，而 α, β 和 γ 是任意的实相位；因此， P 或 P' 都可以称为宇称算符。中子，质子和电子有着 B, L 和 Q 不同的结合值，所以，通过相位 α, β 和 γ 明智的选择，我们可以定义全部三种粒子的内禀宇称为 $+1$ 。然而，一旦我们做出了这个选择，诸如带电 π 子（在 $n \rightarrow p + \pi^-$ 的转变中被发射）的其它粒子的内禀宇称将不再任意。另外，类似中性 π 子这种不含守恒量子数的任意粒子的内禀宇称总是有含义的。

之上的讨论帮助我们阐明了是否内禀宇称必须有值 ± 1 这个问题。称空间反演 P 有群的乘法法则 $P^2 = 1$ 是很容易的，但是守恒的宇称算符可能不是这一个，而可能是与其相差这类的相位变换。在任何情况下，无论是否 $P^2 = 1$ ，算符 P^2 的行为就像一个内部对称变换：

$$P^2\Psi_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots}^{\pm} = \eta_{n_1}^2\eta_{n_2}^2\dots\Psi_{\mathcal{P}p_1\sigma_1n_1;\mathcal{P}p_2\sigma_2n_2;\dots}^{\pm}$$

如果内部对称性是一个相位变换连续对称群的部分，例如 α, β, γ 为任意值的相位 $\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q)$ 的乘法群，那么它的逆的平方根也必是这个群的一个群元，称其为 I_P ，并有 $I_P^2 P^2 = 1$ 和 $[I_P, P] = 0$ 。（例如，如果 $P^2 = \exp(i\alpha B + \dots)$ ，那么令 $I_P = \exp(-\frac{1}{2}i\alpha B + \dots)$ 。）那么我们可以定义一个新的宇称算符 $P' \equiv P I_P$ ，其有 $P'^2 = 1$ ，这在与 P 相同的范围内是守恒的，所以没有什么原因不应该称其为这个宇称算符，在这种情况下，内禀宇称仅能取值 ± 1 。

只有一种理论，其不一定存在定义宇称以使所有的内禀宇称为值 ± 1 的可能，这个理论中有一些不属于任何相位变换连续对称群的离散内部对称性¹⁰。例如，角动量守恒的结果之一是，所有半整数自旋粒子的总数 F 的改变只能为偶数，使得内部对称算符 $(-1)^F$ 是守恒的。对于所有已知的半整数自旋粒子，其超子数与轻子数之和 $B + L$ 为奇，所以就我们目前所知， $(-1)^F = (-1)^{B+L}$ 。如果这是正确的，那么 $(-1)^F$ 是连续对称群的一部分，由 α 为任意实数的算符 $\exp(i\alpha(B + L))$ 组成，并有逆的平方根 $\exp(-i\pi(B + L/2))$ 。在这种情况下，如果 $P^2 = (-1)^F$ ，那么 P 可以重定义使得所有的内禀宇称是 ± 1 。然而，如果发现一个粒子，其自

旋为半整数而 $B + L$ 为奇（例如所谓的Majorana中微子，其 $j = \frac{1}{2}$ 且 $B + L = 0$ ），那么将有可能有 $P^2 = (-1)^F$ ，但却不能重定义宇称算符本身以使其有本征值 ± 1 。当然，在这种情况下，我们将有 $P^4 = 1$ ，这使得所有粒子的内禀宇称为 ± 1 或（像Majorana中微子一样） $\pm i$ 。

从方程(3.3.42)中得出，如果末态中的内禀宇称之积等于初态的内禀宇称之积，或者相差一个负号，那么S-矩阵将分别是全部3-动量的偶函数或奇函数。例如，在1951年观测到¹¹，在反应 $\pi^- + d \rightarrow n + n$ 中，处在 π^-d 原子的 $\ell = 0$ 基态的一个 π 介子可以被一个氘核吸收。（正如3.7节所讨论的，轨道角动量量子数 ℓ 在相对论物理和非相对论物理中使用的方式是相同的。）初态有总角动量 $j = 1$ （ π 介子和氘核分别有自旋零和一），所以末态的总角动量必须有 $\ell = 1$ ，并且总的中子自旋 $s = 1$ 。（角动量守恒所允许的其它可能性： $\ell = 1, s = 0$ ； $\ell = 0, s = 1$ 和 $\ell = 2, s = 1$ ，被末态必须关于两个中子是反对称的这一要求所禁止。）由于末态有 $\ell = 1$ ，矩阵元在3-动量方向的反转下为奇，所以我们可以得出这样的结论，在这个反应中，粒子内禀宇称必须有如下的相关关系：

$$\eta_d \eta_{\pi^-} = -\eta_n^2 .$$

已知中子是质子和中子轨道角动量为偶（主要是 $\ell = 0$ ）的基态，并且，正如我们所看到的，我们可以令中子和质子有相同的宇称，使得 $\eta_d = \eta_n^2$ ，于是我们得出 $\eta_{\pi^-} = -1$ ；即，负 π 介子是赝标量粒子。 π^+ 和 π^0 也发现有负宇称，这正是这三个粒子之间对称性（同位旋对称性）所预期的。

π 介子的负宇称会带来一些显著的结果。一个衰变成三个 π 介子的自旋零粒子必须有内禀宇称 $\eta_{\pi}^3 = -1$ ，其原因是在衰变粒子的静止Lorentz参考系中，旋转不变性只允许的矩阵元依赖于三个 π 介子动量彼此之间的标积，所有的这些标积在全部动量的反转下为偶。（因为 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$ ，由三个 π 介子动量构成的三重标积 $\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3)$ 为零。）由于相同的原因，衰变成两个 π 介子的自旋零粒子必须有内禀宇称 $\eta_{\pi}^2 = +1$ 。特别的，在20世纪40年代后期所发现的奇异粒子中，似乎存在两个不同的自旋零粒子（从它们衰变产物的角分布中推断出来的）：一个是 τ 子，通过衰变成三个 π 子被识别出来，因而被赋予宇称 -1 ，而另一个是 θ 子，通过衰变成两个 π 介子被识别出来，因而被赋予宇称 $+1$ 。这其中的问题是，随着对 τ 和 θ 更细致研究的展开，它们很倾向于有相同的质量和寿命。在很多建议解决方案之后，Lee（李政道）和Yang（杨振宁）最终斩断了戈尔迪之结，提出 τ 和 θ 是相同的粒子，（现在被称为 K^\pm 粒子）以及宇称在弱作用中根本不是守恒的，这导致了它的衰变¹²。

正如我们在本章下一节更细致看到的，物理过程 $\alpha \rightarrow \beta$ （并且 $\alpha \neq \beta$ ）的速率是正比于 $|S_{\beta\alpha}|^2$ ，其比例因子在所有的3-动量的反转下变。只要态 α 和 β 所包含的每种粒子的数目是明确的，方程(3.3.42)中的相因子对 $|S_{\beta\alpha}|^2$ 没有影响，所以方程(3.3.42)暗示着 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率在所有3-动量方向的反转下是不变的。正如我们已经看到的，对于 K 介子的衰变，衰变成两个或三个 π 介子是旋转不变性的一个平庸结果。但却是在更加复杂过程中对速率的一个不平庸约束。例如，跟随着Lee和Yang提出的理论建议，Wu（吴健雄）与美国国家标准局测量了极化钴源的 β 衰变 $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ 中电子的角分布¹³。（在这个实验中没有尝试测量反中微子或镍核的角动量。）发现电子的发射方向与衰变核的自旋方向相反，而如果衰变速率在所有3-动量的反转下不变，这当然是不可能的。在一个正 μ 子（在它的产生过程 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ 中被极化）衰变成一个正电子，反中微子和一个反中微子的过程中发现了类似的结果。以这种方式，在这些衰变中起作用的弱相互作用中，宇称不守恒变得显然。然而，由于将在12.5节所讨论的某些缘由，在强作用和电磁作用中，宇称是守恒的，因而在理论物理中继续扮演一个重要的角色。

时间反演

我们在2.6节已经看到，时间反演算符 T 作用在单粒子态 $\Psi_{p,\sigma,n}$ 上将给出自旋和动量反转的态 $\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma,n}$ ，再乘上相因子 $\zeta_n (-1)^{j-\sigma}$ 。一个多粒子态像平常一样按照单粒子态的直积变换，除了由时间反演变换所引起的“入”态和“出”态的交换：

$$T\Psi_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots}^{\pm} = \zeta_{n_1} (-1)^{j_1-\sigma_1} \zeta_{n_2} (-1)^{j_2-\sigma_2} \dots \Psi_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1n_1;\mathcal{P}p_2-\sigma_2n_2;\dots}^{\mp} \quad (3.3.43)$$

(再一次的，这是针对有质量粒子的，无质量粒子所要求的修正是显然的。)将这个假设进行如下缩写将是方便的

$$T\Psi_{\alpha}^{\pm} = T\Psi_{\mathcal{F}\alpha}^{\mp}, \quad (3.3.44)$$

其中 \mathcal{F} 表示3-动量和自旋符号的一个反号以及乘以方程(3.3.43)中所示的相因子。因为 T 是反么正的，我们有

$$(\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) = (T\Psi_{\alpha}^{+}, T\Psi_{\beta}^{-}), \quad (3.3.45)$$

所以 S -矩阵的时间反演不变条件是

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\mathcal{F}\alpha,\mathcal{F}\beta} \quad (3.3.46)$$

或者更加详细的

$$\begin{aligned} & S_{p'_1\sigma'_1n'_1;p'_2\sigma'_2n'_2;\dots, p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots} \\ &= \zeta_{n'_1} (-1)^{j'_1-\sigma'_1} \zeta_{n'_2} (-1)^{j'_2-\sigma'_2} \dots \zeta_{n_1}^* (-1)^{j_1-\sigma_1} \zeta_{n_2}^* (-1)^{j_2-\sigma_2} \dots \\ & \quad \times S_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1n_1;\mathcal{P}p_2-\sigma_2n_2;\dots, \mathcal{P}p'_1-\sigma'_1n'_1;\mathcal{P}p'_2-\sigma'_2n'_2;\dots} \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

注意到除了动量和自旋的反转外，初态和末态的角色调换了，这正是涉及时间反演的对称性所期望的。

S -矩阵将满足这个变换规则，如果算符 T_0 在自由粒子态上所引起的时间反演变换

$$T_0\Phi_{\alpha} \equiv \Phi_{\mathcal{F}\alpha} \quad (3.3.48)$$

不仅与自由粒子哈密顿量对易（这是自动的），而且与相互作用对易：

$$T_0^{-1}H_0T_0 = H_0, \quad (3.3.49)$$

$$T_0^{-1}VT_0 = V. \quad (3.3.50)$$

在这种情况下，我们可以取 $T = T_0$ ，并用(3.1.13)或(3.1.16)证明时间反演算符确实像方程(3.3.44)中所说的那样作用。例如，用算符 T 作用在Lippmann-Schwinger方程(3.1.16)上，并利用方程(3.3.48)—(3.3.50)。我们有

$$T\Psi_{\alpha}^{\pm} = \Phi_{\mathcal{F}\alpha} + [E_{\alpha} - H_0 \mp i\epsilon]^{-1}VT\Psi_{\alpha}^{\pm},$$

其中 $\pm i\epsilon$ 的符号颠倒是因为 T 是反么正的。这正是 $\Psi_{\mathcal{F}\alpha}^{\mp}$ 的Lippmann-Schwinger方程，因此满足方程(3.3.44)。类似地，因为 T 是反么正的，它改变了 $\Omega(t)$ 的指数中 i 的符号，使得

$$T\Omega(-\infty)\Phi_{\alpha} = \Omega(\infty)\Phi_{\mathcal{F}\alpha},$$

又一次地导出了方程(3.3.44)。

与宇称守恒的情况相反，时间反演条件(3.3.46)一般不告诉我们过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率与过程 $\mathcal{T}\alpha \rightarrow \mathcal{T}\beta$ 是相同的。然而，在 S -矩阵采取如下的形式下，会有类似的事情存在

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^{(0)} + S_{\beta\alpha}^{(1)}, \quad (3.3.51)$$

其中 $S^{(1)}$ 很小，而 $S^{(0)}$ 对于某些感兴趣的特定过程碰巧有矩阵元零，但是它一般有比 $S^{(1)}$ 大得多的矩阵元。（例如，这个过程可能是核 β 衰变， $N \rightarrow N' + e^- + \bar{\nu}$ ，其中 $S^{(0)}$ 是核的强作用和电磁相互作用单独提供的 S -矩阵，而 $S^{(1)}$ 是弱作用对 S -矩阵的修正。3.5节将展示，在这类情况下，“畸变波Born近似”的使用是如何导出形式为(3.3.51)的 S -矩阵。在某些情况下， $S^{(0)}$ 就是单位算符。）到 $S^{(1)}$ 的一阶， S -算符的幺正条件写为

$$1 = S^\dagger S = S^{(0)\dagger} S^{(0)} + S^{(0)\dagger} S^{(1)} + S^{(1)\dagger} S^{(0)}.$$

利用零阶关系 $S^{(0)\dagger} S^{(0)} = 1$ ，这给出了 $S^{(1)}$ 的一个现实条件(reality condition)：

$$S^{(1)} = -S^{(0)} S^{(1)\dagger} S^{(0)}. \quad (3.3.52)$$

如果 $S^{(1)}$ 和 $S^{(0)}$ 都满足时间反演条件(3.3.46)，那么这可以写成如下的形式

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = - \int d\gamma' \int d\gamma S_{\beta\gamma'}^{(0)} S_{\mathcal{T}\gamma' \mathcal{T}\gamma}^{(1)} S_{\gamma\alpha}^{(0)}. \quad (3.3.53)$$

因为 $S^{(0)}$ 是幺正的，所以如果对末态和初态相对 $S^{(0)}$ 的完全集 \mathcal{S} 和 \mathcal{T} 求和，那么过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率与过程 $\mathcal{T}\alpha \rightarrow \mathcal{T}\beta$ 是相同的。（这里的“完全”是指当 $S_{\alpha'\alpha}^{(0)}$ 非零，且 α 或 α' 处在 \mathcal{S} 中，那么这两个态均在 \mathcal{S} ，对于 \mathcal{T} 是类似的。）在最简单的情况下，我们有分别仅由一个态构成的“完全”集 \mathcal{S} 和 \mathcal{T} ；即初态和末态分别是 $S^{(0)}$ 本征值为 $e^{2i\delta_\alpha}$ 和 $e^{2i\delta_\beta}$ 的本征矢。（ δ_α 和 δ_β 是所谓的“相移”；因为 $S^{(0)}$ 是幺正的，所以它们是实的。）在这种情况下，方程(3.3.53)变得简单：

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\mathcal{T}\beta \mathcal{T}\alpha}^{(1)*}, \quad (3.3.54)$$

并且，过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的 S -矩阵的绝对值与过程 $\mathcal{T}\alpha \rightarrow \mathcal{T}\beta$ 相同是显然的。这种情况的一个例子是核 β 衰变（取了这样的近似：忽略了末态中电子和核之间相对较弱的电磁相互作用），因为初态和末态都是强相互作用 S -矩阵（ $\delta_\alpha = \delta_\beta = 0$ ）的本征态。因此，如果时间反演不变性是被遵守的，那么如果我们反转所有粒子的动量和自旋 z -分量 σ ， β 衰变过程的微分速率应该是不变的。这个预测与1956年发现宇称不守恒的实验^{13, 14}是不矛盾的；例如，时间反演不变与衰变 $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ 中电子优先以 Co^{60} 自旋的反方向发射的观察结果是一致的。正如下文所述，反对时间反演不变的间接证据在1964年浮现出来，但是在弱作用，强作用和电磁作用中，这依旧是一个有用的近似对称性。

在某些情况下，我们可以使用 $\mathcal{T}\alpha = \alpha$ 和 $\mathcal{T}\beta = \beta$ 的态为基，这样方程(3.3.54)变成

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\beta\alpha}^{(1)*}, \quad (3.3.55)$$

这正是说 $iS_{\beta\alpha}^{(1)}$ 的相位为 $\delta_\alpha + \delta_\beta$ 整除 π 后的余数。这被称为Watson定理¹⁵。方程(3.3.54)或(3.3.55)中相位可以在有末态干涉的过程中测量。例如，在自旋1/2的超子 Λ 到一个中子和一个 π 介子的衰变中，末态的轨道角动量仅能为 $\ell = 0$ 或 $\ell = 1$ ； π 介子相对 Λ 自旋的角分布涉及这些态的干涉，因而根据Watson定理依赖于它们的相移差 $\delta_s - \delta_p$ 。

PT

尽管1957年宇称破坏的实验并没有排除时间反演不变性，但它们确实立刻证明了乘积PT不是守恒的。如果守恒，这个算符由于与T相同的原因将不得不是反么正的，所以在类似核 β 衰变的过程中，它的结果将采取形式类似于方程(3.3.54)的关系：

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\mathcal{PT}\beta\mathcal{PT}\alpha}^{(1)*},$$

其中 \mathcal{PT} 反转所有自旋 z -分量的符号，但不反转任何动量。忽视末态的库仑相互作用，那么，它将得出这样的结果：在衰变 $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ 中发射的电子既没有 Co^{60} 自旋反方向的优先性也没有同方向的优先性，这与所观测到的是矛盾的。

C, CP和CPT

正如已经提到的，有一种内部对称变换被称为核共轭，即交换粒子和反粒子。形式上地，这要求一个么正算符C的存在，它在多粒子态上的效应是：

$$C\Psi_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots}^\pm = \xi_{n_1}\xi_{n_2}\cdots\Psi_{p_1\sigma_1n_1^c;p_2\sigma_2n_2^c;\dots}^\pm \quad (3.3.56)$$

其中 n^c 是种类 n 粒子的反粒子，而 ξ_n 仍是一相位。如果这对于“入”态和“出”态都是正确的，那么 S -矩阵满足如下的不变性条件

$$\begin{aligned} & S_{p'_1\sigma'_1n'_1;p'_2\sigma'_2n'_2;\dots, p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots} \\ &= \xi_{n'_1}^*\xi_{n'_2}^*\cdots\xi_{n_1}\xi_{n_2}\cdots S_{p'_1\sigma'_1n'_1^c;p'_2\sigma'_2n'_2^c;\dots, p_1\sigma_1n_1^c;p_2\sigma_2n_2^c;\dots} \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

正如其它内部对称性，如果算符 C_0 被定义为像方程(3.3.56)中所说的那样作用在自由粒子态上，且其与相互作用 V 和 H_0 都对易，那么 S -矩阵将满足这个条件；在这种情况下，我们取 $C = C_0$ 。

相位 ξ_n 称为荷共轭宇称。正如普通宇称 η ， ξ_n 一般不是唯一确定的。因为对于任意一个定义满足方程(3.3.56)的算符C，我们能通过用任意内部对称相位变换，诸如 $\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q)$ ，乘以C，找到 ξ_n 不同的另外一个这样的算符；荷共轭宇称唯一可测的粒子是那些完全中性的粒子，例如光子和中性 π 介子，它们不携带守恒量子数，因而反粒子是它们自身。在仅包含完全中性粒子的反应中，方程(3.3.57)告诉我们荷共轭宇称的积在初态和末态中必须是相等的；例如，正如我们将看到的，光子被量子电动力学要求有荷共轭宇称 $\eta_\gamma = -1$ ，所以中性 π 介子的衰变 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的观测要求 $\eta_{\pi^0} = +1$ ；那么由此得出过程 $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ 应该是被禁止的，而事实正是如此。对于这两个粒子，荷共轭是实的，为+1或-1。正如普通宇称一样，如果所有的内部相位变换对称性是相位变换连续群的成员，将是这种情况，因为我们可以通过用内部对称等于 C^2 的逆平方根乘以C来重定义它，结果是新的C满足 $C^2 = 1$ 。

对于一般反应，方程(3.3.57)要求一个过程的速率等于粒子被相对应反粒子替换后相同过程的速率。这与1957年关于宇称不守恒的实验不是直接矛盾的（在很长的一段时期，没有人有能力研究反钴的 β 衰变），但是这些实验表明C在由Lee和Yang¹²进行修正用以解释宇称不守恒的弱相互作用理论中是不守恒的。（正如我们将在下面看到的，观测到TP守恒的破坏暗示着在任何弱相互作用场论中C守恒的破坏，而不仅是Lee和Yang所考虑的特定理论。）现在的理解是，尽管C和P在强作用和电磁作用中都是守恒的，C和P在弱相互作用中却是不守恒的，而弱相互作用引起了类似 β 衰变的过程以及 π 介子和 μ 子衰变的过程。

尽管关于宇称不守恒的早期实验表明C和P在弱作用中不守恒，它们的乘积CP是普遍守恒的可能系依然保留。一些年来，一直期待（尽管没有完全的信心）CP被发现是普遍守恒的。这在中性K介子性质中有一特别重要的结果。在1954年，Gell-Mann和Pais（派斯）¹⁶已经指出，因为 K^0 介子不是它的反粒子（ K^0 携带一个非零的近似为守恒量的奇异数）有明确衰减速率的粒子将不是 K^0 或 \bar{K}^0 ，而是线性组合 $K^0 \pm \bar{K}^0$ 。这最初是以C守恒的形式解释的，但是在弱作用中C不守恒，讨论可以等价地基于CP守恒。如果我们定义CP算符以及 K^0 和 \bar{K}^0 态中的相位，使得

$$CP\Psi_{K^0} = \Psi_{\bar{K}^0}$$

并且

$$CP\Psi_{\bar{K}^0} = \Psi_{K^0}$$

那么我们可以定义荷自共轭单粒子态

$$\Psi_{K_1^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{K^0} + \Psi_{\bar{K}^0}]$$

以及

$$\Psi_{K_2^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{K^0} - \Psi_{\bar{K}^0}],$$

其对CP分别有本征值+1和-1。这些粒子的最快可应用衰变模型是变成2- π 介子态。但是CP守恒只允许** K_1 这样衰变，但不允许 K_2 。 K_2 仅能期望以更慢的模型衰变，例如衰变成3个 π 介子或者一个 π 介子，一个 μ 子或电子和一个中微子。然而，Fitch和Cronin在1964年发现长寿命K介子确实有很小的概率衰变成两个 π 介子¹⁷。结论是：尽管CP比单独的C或P看起来更接近守恒，但在弱作用中它不是精确守恒的。

正如我们将在第5章看到的，有很好的原因相信，尽管C和CP都不是严格守恒的，但是至少在量子场论中，CPT在所有的相互作用中是精确守恒的。正是CPT提供了粒子和反粒子之间一个精确对应，特别是CPT与哈密顿量的对易告诉我们稳定粒子和反粒子有精确相同的质量。因为CPT是反么正的，它将任意过程的S-矩阵，与所有自旋3-分量反转，粒子被替换为反粒子的逆过程的S-矩阵关联起来。然而，在S-矩阵可以分成产生一个给定反应的弱相互作用项 $S^{(1)}$ 以及作用在初态和末态上的强作用项 $S^{(0)}$ 的情况下，我们可以使用之上研究T守恒含义的讨论证明：如果对相对于 $S^{(0)}$ 完备的初态和末态求和，那么任意过程的速率与粒子被替换为反粒子，自旋3-动量反转的相同过程的速率相等。特别是，尽管粒子衰变成 $S_{\beta_1\beta_2}^{(0)} \neq 0$ 的一对末态 β_1, β_2 的那部分速率，与反粒子衰变成相对应的末态 $\mathcal{CPT}\beta_1$ 和 $\mathcal{CPT}\beta_2$ 的速率不相等，我们将在3.5节看到，（不加任何近似下，）任意粒子的总衰变速率与它的反粒子是相等的。

我们现在可以理解为什么1957年宇称不守恒的实验，在弱相互作用现有理论的情况下，可以被解释为C守恒和P守恒被严重破坏但CP没有的证据。这些理论是场理论，因而自动有CPT守恒。既然实验证明了在核 β 衰变中，PT守恒而非T守恒被严重破坏了，与这些实验一致并且CPT守恒的任何理论将不得不兼容C不守恒而非CP不守恒。

类似地，在1964年观测到在弱相互作用中PT的小破坏，与在所有作用下假定的CPT守恒可以立刻推断出弱相互作用也不精确守恒T。通过对 $K^0 - \bar{K}^0$ 系统更加详细的研究，这已经被证明了¹⁸，但是，发现在时间反演下不变性失效的其它直接证据迄今为止是不可能的。

**中性K介子自旋为零，所以2- π 介子末态有 $l = 0$ ，因而 $P = +1$ 。更进一步，因为 π^0 有 $C = +1$ ，所以对于两个 π^0 ， $C = +1$ ，由于C交换了两个 π 介子，所以对于 $l = 0$ 的 $\pi^+\pi^-$ 态也是这样。

3.4 速率与截面

S -矩阵 $S_{\beta\alpha}$ 是跃迁 $\alpha \rightarrow \beta$ 的几率振幅，但是这与实验者测量的跃迁速率与截面有什么关系呢？尤其是，(3.3.2)证明了 $S_{\beta\alpha}$ 有确保能量和动量守恒的因子 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ ，那么我们该如何理解跃迁几率 $|S_{\beta\alpha}|^2$ 中的因子 $[\delta^4(p_\beta - p_\alpha)]^2$ ？解决这些问题的正确方法是研究实验实际进行的方式，用波包代表在碰撞前远离彼此的定域粒子，然后跟随这些多粒子叠加态的时间历史。而在下文中，鉴于（就我所知）在物理中没有什么有趣的开放性问题取决于得到这些问题相关的正确的要点，我们将给出主要结果一个快速和简单的推导，实际上这更像一个助记法而非推导。

我们认为我们的整个物理系统被封闭在一个具有宏观体积 V 的大盒子内。例如，我们可以取这个盒子为一个立方体，但相对平面上的点是等价的，这样，空间波函数的单值性要求动量是量子化的

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad (3.4.1)$$

其中 n_i 是整数，且 $L^3 = V$ 。那么所有的三维 δ -函数变成

$$\delta_V^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}, \quad (3.4.2)$$

其中 $\delta_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}$ 是普通的克罗内克 δ 符号，下标相等时为1，否则为0。归一化条件(3.1.2)因而暗示着，我们在盒子中所使用的具有标量积的态，其不仅仅是克罗内克 δ 乘积的和，还包含一个因子 $[V/(2\pi)^3]^N$ ，其中 N 是态中的粒子数。为了计算跃迁几率，我们应该使用范数为1的态，所以引入对我们的盒子近似归一的态

$$\Psi_\alpha^{\text{Box}} \equiv \left[(2\pi)^3/V \right]^{N_\alpha/2} \Psi_\alpha \quad (3.4.3)$$

其有范数

$$\left(\Psi_\beta^{\text{Box}}, \Psi_\alpha^{\text{Box}} \right) = \delta_{\beta\alpha} \quad (3.4.4)$$

其中 $\delta_{\beta\alpha}$ 是克罗内克 δ 的积，每一个对应一个3-动量、自旋以及种类标记，再加上粒子置换后的项。相应地， S -矩阵可以写为

$$S_{\beta\alpha} = \left[V/(2\pi)^3 \right]^{(N_\beta+N_\alpha)/2} S_{\beta\alpha}^{\text{Box}}, \quad (3.4.5)$$

其中 $S_{\beta\alpha}^{\text{Box}}$ 是利用态(3.4.3)计算的。

当然，如果我们只是让粒子永远处在盒子中，那么每一可能的跃迁将会一次又一次的发生。为了计算一个有意义的跃迁几率，我们也将我们的系统放进一个“时间盒子”中。我们假定仅仅对时间段 T ，相互作用是被打开的。一个立刻的结果是能量守恒 δ -函数被替换为

$$\delta_T(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i(E_\alpha - E_\beta)t) dt. \quad (3.4.6)$$

一个多粒子系统，在相互作用打开前处在态 α ，在相互作用关闭后处在态 β ，这样事件的几率为

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = \left| S_{\beta\alpha}^{\text{Box}} \right|^2 = \left[(2\pi)^3/V \right]^{(N_\alpha+N_\beta)} |S_{\beta\alpha}|^2. \quad (3.4.7)$$

这正是跃迁到指定盒子态 β 的几率。在体积为 d^3p 的动量空间中，单粒子盒子态的数目是 $Vd^3p/(2\pi)^3$ ，这是因为，这正是动量(3.4.1)处在 \mathbf{p} 周围动量体积为 d^3p 的三元整数组 n_1, n_2, n_3 的数目。我们将末态间隔 $d\beta$ 定义为对应于每个末态粒子 d^3p 的积，所以处在这个范围内态的总数是

$$d\mathcal{N}_\beta = \left[V/(2\pi)^3 \right]^{N_\beta} d\beta . \quad (3.4.8)$$

因而系统结束于末态的 $d\beta$ 范围内的总几率是

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = P(\alpha \rightarrow \beta) d\mathcal{N}_\beta = \left[(2\pi)^3/V \right]^{N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2 d\beta . \quad (3.4.9)$$

贯穿本节，我们所关注的末态 β 不仅限制在与初态 α 不同（尽管只是略有差异），也要满足更加严格的条件，即态 β 中没有粒子的子集（而不是整个态本身）与态 α 中相对应的粒子子集有相同的4-动量。（以下一章引入的语言，这是说我们仅考察 S -矩阵的连接部分。）对于这样的态，我们可以定义与 δ -函数无关的矩阵元 $M_{\beta\alpha}$ ：

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2i\pi\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha)M_{\beta\alpha} . \quad (3.4.10)$$

盒子的引入允许我们将 $|S_{\beta\alpha}|^2$ 中 δ -函数的平方解释为

$$\begin{aligned} \left[\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha) \right]^2 &= \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_V^3(0) = \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)V/(2\pi)^3 , \\ \left[\delta_T(E_\beta - E_\alpha) \right]^2 &= \delta_T(E_\beta - E_\alpha)\delta_T(0) = \delta_T(E_\beta - E_\alpha)T/2\pi , \end{aligned}$$

所以，方程(3.4.9)给出一个不同的跃迁几率

$$\begin{aligned} dP(\alpha \rightarrow \beta) &= (2\pi)^2 \left[(2\pi)^3/V \right]^{N_\alpha-1} (T/2\pi) |M_{\beta\alpha}|^2 \\ &\quad \times \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha)d\beta . \end{aligned}$$

如果我们令 V 和 T 取得很大，这里的 δ -函数乘积可以解释为普通的4-维 δ -函数 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ 。在这个极限下，跃迁几率正比于相互作用起作用的时间段 T ，而其系数可以解释为微分跃迁速率：

$$\begin{aligned} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) &\equiv dP(\alpha \rightarrow \beta)/T \\ &= (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta , \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

现在有

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2\pi i \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha} . \quad (3.4.12)$$

这是用来以实际实验预测的形式解释计算 S -矩阵元的主要公式。在本节后面，我们将回到因子 $\delta^4(p_\alpha - p_\beta)d\beta$ 的释义上。

有两种特别重要的情况：

$N_\alpha = 1$ ：

这时方程(3.4.11)中的体积 V 抵消了，这给出了一个单粒子态 α 衰变成一般多粒子态 β 的跃迁几率

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\alpha - p_\beta)d\beta . \quad (3.4.13)$$

当然，仅当相互作用的时间段 T 远小于粒子 α 的平均寿命 τ_α 时，上式是有意义的，所以我们不能在 $\delta_T(E_\beta - E_\alpha)$ 中取极限 $T \rightarrow \infty$ 。在这个 δ -函数中有一个不可移除的展宽 $\Delta E \simeq 1/T \gtrsim 1/\tau_\alpha$ ，所以仅当总衰变速率 $1/\tau_\alpha$ 远小于过程中任何一个特正能量，方程(3.4.11)才是有用的。

$N_\alpha = 2$:

这时方程(3.4.11)正比于 $1/V$ ，换句话说，正比于任一粒子处在另一粒子所在位置的单位体积。实验者一般不报告单位体积的跃迁速率，而是单位流的速率，也被称为截面。任一粒子在另一粒子所在位置的流定义为单位体积 $1/V$ 与相对速率 u_α 的乘积：

$$\Phi_\alpha = u_\alpha/V. \quad (3.4.14)$$

(u_α 的普遍定义在下文中给出；这时我们仅满足于这样的定义：如果其中一个粒子静止，那么 u_α 定义为另一个粒子的速率。)因此微分截面是

$$d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) \equiv d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)/\Phi_\alpha = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\alpha - p_\beta) d\beta. \quad (3.4.15)$$

即使 $N_\alpha = 1$ 和 $N_\alpha = 2$ 的情况是最重要的，但是所有 $N_\alpha \geq 3$ 的跃迁速率原则上是可测的，并且有一些在化学、天体物理学等中是非常重要的。(例如，太阳的一个重要放能反应是，两个质子和一个电子转化成一个氦和一个中微子。)3.6节将展示初态粒子数目 N_α 任意的主导跃迁速率公式(3.4.11)的一个应用。

接下来，我们着手解决速率与截面的Lorentz变换性质，这将帮助我们给出方程(3.4.15)中相对速度 u_α 更普遍的定义。 S -矩阵的Lorentz变换规则(3.3.1)由于与自旋相联系的动量无关矩阵而变得复杂。为了避免这种复杂性，(在因式分解出方程(3.4.12)中的Lorentz不变 δ -函数之后，)考察(3.3.1)绝对值的平方，并对所有的自旋求和。那么矩阵 $D_{\sigma\sigma}^{(j)}(W)$ 的么正性(或者它们的零质量类比)证明了，除了(3.3.1)中的能量因子，其和是Lorentz不变的。即，如下的量

$$\sum_{\text{spins}} |M_{\beta\alpha}|^2 \prod_{\beta} E \prod_{\alpha} E \equiv R_{\beta\alpha} \quad (3.4.16)$$

是态 α 和 β 中粒子4-动量的标量函数。($\prod_{\alpha} E$ 和 $\prod_{\beta} E$ 是指态 α 和 β 中粒子的所有单粒子能量 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 的乘积。))

我们现在可以将自旋求和的单粒子衰变速率(3.4.13)写为

$$\sum_{\text{spins}} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi E_\alpha^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\alpha - p_\beta) d\beta / \prod_{\beta} E.$$

因子 $d\beta / \prod_{\beta} E$ 可以辨认出是Lorentz不变动量空间体积元(2.5.15)的乘积，所以它是Lorentz不变的。 $R_{\beta\alpha}$ 和 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ 也是如此，这样只剩下非不变因子 $1/E_\alpha$ ，其中 E_α 是初态的单粒子能量。那么我们的结论是：衰变速率有着与 $1/E_\alpha$ 相同的Lorentz变换性质。当然，这正是狭义相对论普通的钟慢效应——粒子越快，衰变越慢。

类似地，对于自旋求和的截面，我们的结果(3.4.15)可以写为

$$\sum_{\text{spins}} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} E_1^{-1} E_2^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\alpha - p_\beta) d\beta / \prod_{\beta} E,$$

其中 E_1 和 E_2 是初态 α 中两个粒子的能量。(当对自旋求和时)将截面定义为4-动量的Lorentz不变函数是方便的。因子 $R_{\beta\alpha}$ ， $\delta^4(p_\alpha - p_\beta)$ 和 $d\beta / \prod_{\beta} E$ 已经是Lorentz不变的，这意味着我们对任

惯性系中相对速度 u_α 的定义必须使 $u_\alpha E_1 E_2$ 是个标量。早先我们也提到，在一个粒子（称为粒子1）是静止的Lorentz参考系中， u_α 是另一粒子的速率。这唯一地确定了 u_α 在一般Lorentz参考系中有值*

$$u_\alpha = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} / E_1 E_2 \quad (3.4.17)$$

其中 p_1, p_2 和 m_1, m_2 是初态 α 中两个粒子的4-动量和质量。

另外，我们注意到在总3-动量为零的“质心”参考系中，我们有

$$p_1 = (\mathbf{p}, E_1), \quad p_2 = (-\mathbf{p}, E_2),$$

这时方程(3.4.17)给出

$$u_\alpha = \frac{|\mathbf{p}|(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right|, \quad (3.4.18)$$

这可能是预期的一个相对速度。然而，在这个参考系下， u_α 不是真的物理速度；尤其是，方程(3.4.18)证明了对于极端相对论性粒子，它所取的值最大是2。

我们现在转向所谓相空间因子 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta$ 的解释，它出现在跃迁速率的普遍公式(3.4.11)中，以及衰变速率和截面的方程(3.4.13)和(3.4.15)中。在这里，我们针对“质心”Lorentz参考系的情况，其中初态的总3-动量为零

$$\mathbf{p}_\alpha = 0. \quad (3.4.19)$$

（对于 $N_\alpha = 1$ ，这就是衰变粒子静止的情况。）如果初态是由动量为 $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots$ 的粒子构成，那么

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \dots) \delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E) d^3 \mathbf{p}'_1 d^3 \mathbf{p}'_2 \dots, \quad (3.4.20)$$

其中 $E \equiv E_\alpha$ 是初态的总能量。 \mathbf{p}'_k 积分中的任何一个，例如 \mathbf{p}'_1 ，可以通过扔掉动量 δ -函数

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E) d^3 \mathbf{p}'_2 \dots \quad (3.4.21)$$

以及将任何出现的 \mathbf{p}'_1 （例如 E'_1 中的）进行如下的替换而完成

$$\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3 - \dots. \quad (3.4.22)$$

类似地，我们可以利用剩下的 δ -函数完成剩余积分的任何一个。

在最简单的情况下，在末态仅有两个粒子。这时(3.4.21)给出

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \delta(E'_1 + E'_2 - E) d^3 \mathbf{p}'_2.$$

更细致一点是

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \delta\left(\sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_2'^2} - E\right) |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d\Omega, \quad (3.4.23)$$

*方程(3.4.17)使得 $E_1 E_2 u_\alpha$ 是个标量变得显然。另外，当粒子1是静止的，我们有 $\mathbf{p}_1 = 0, E_1 = m_1$ ，所以 $p_1 \cdot p_2 = -m_1 E_2$ ，因而方程(3.4.17)给出

$$u_\alpha = \sqrt{E_2^2 - m_2^2} / E_2 = |\mathbf{p}_2| / E_2,$$

这正是粒子2的速率。

其中

$$\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1$$

以及 $d\Omega \equiv \sin\theta d\theta d\phi$ 是对 \mathbf{p}'_1 微分的立体角。通过使用如下标准公式可以进行简化

$$\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)/|f'(x_0)|,$$

其中 $f(x)$ 是在 $x = x_0$ 处有简单的单零点的任意实函数。在我们的情况下，方程(3.4.23)中 δ -函数的变量 $E'_1 + E'_2 - E$ 有唯一的零点 $|\mathbf{p}'_1| = k'$ ，其中

$$k' = \sqrt{(E^2 - m_1'^2 - m_2'^2)^2 - 4m_1'^2 m_2'^2} / 2E, \quad (3.4.24)$$

$$E'_1 = \sqrt{k'^2 + m_1'^2} = \frac{E^2 - m_2'^2 + m_1'^2}{2E}, \quad (3.4.25)$$

$$E'_2 = \sqrt{k'^2 + m_2'^2} = \frac{E^2 - m_1'^2 + m_2'^2}{2E}, \quad (3.4.26)$$

以及导数

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{d|\mathbf{p}'_1|} \left(\sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_2'^2} - E \right) \right]_{|\mathbf{p}'_1|=k'} \\ &= \frac{k'}{E'_1} + \frac{k'}{E'_2} = \frac{k'E}{E'_1 E'_2}. \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

因此，通过除以(3.4.27)，我们可以扔掉方程(3.4.23)中的 δ -函数和微分 $d|\mathbf{p}'_1|$ ，

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \frac{k' E'_1 E'_2}{E} d\Omega, \quad (3.4.28)$$

其中 k' , E'_1 和 E'_2 由方程(3.4.24)–(3.4.26)给出。特别地，对于动量为零，能量为 E 的单粒子态衰变成两个粒子，微分速率(3.4.13)是

$$\frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{2\pi k' E'_1 E'_2}{E} |M_{\beta\alpha}|^2 \quad (3.4.29)$$

并且，两体散射过程 $12 \rightarrow 1'2'$ 的微分截面由方程(3.4.15)给定为

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k' E'_1 E'_2}{Eu_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 = \frac{(2\pi)^4 k' E'_1 E'_2 E_1 E_2}{E^2 k} |M_{\beta\alpha}|^2, \quad (3.4.30)$$

其中 $k \equiv |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ 。

之上 $N_\beta = 2$ 的情况是特别简单的，但是对于 $N_\beta = 3$ ，有一个非常好的结果也值得记录一下。对于 $N_\beta = 3$ ，方程(3.4.21)给出

$$\begin{aligned} & \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow d^3 \mathbf{p}'_2 d^3 \mathbf{p}'_3 \\ & \times \delta \left(\sqrt{(\mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_3)^2 + m_1'^2} + \sqrt{\mathbf{p}'_2{}^2 + m_2'^2} + \sqrt{\mathbf{p}'_3{}^2 + m_3'^2} - E \right). \end{aligned}$$

我们将动量空间体积元写为

$$d^3 \mathbf{p}'_2 d^3 \mathbf{p}'_3 = |\mathbf{p}'_2|^2 d|\mathbf{p}'_2| |\mathbf{p}'_3|^2 d|\mathbf{p}'_3| d\Omega_3 d\phi_{23} d\cos\theta_{23},$$

其中 $d\Omega_3$ 是 \mathbf{p}'_3 的立体角微元，而 θ_{23} 和 ϕ_{23} 是 \mathbf{p}'_2 相对 \mathbf{p}'_3 方向的极角和轴向角。由 \mathbf{p}'_2 和 \mathbf{p}'_3 展开的平面的方向由 ϕ_{23} 和 \mathbf{p}'_3 的方向指定，而剩下的角度 θ_{23} 由能量守恒条件确定

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{p}'_2{}^2 + 2|\mathbf{p}'_2||\mathbf{p}'_3|\cos\theta_{23} + |\mathbf{p}'_3|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_2|^2 + m_2'^2} \\ + \sqrt{|\mathbf{p}'_3|^2 + m_3'^2} = E. \end{aligned}$$

δ -函数变量对 $\cos\theta_{23}$ 的导数是

$$\frac{\partial E'_1}{\partial \cos\theta_{23}} = \frac{|\mathbf{p}'_2||\mathbf{p}'_3|}{E'_1},$$

所以，通过扔掉 δ -函数并除以这个导数，我们可以积掉 $\cos\theta_{23}$

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \rightarrow |\mathbf{p}'_2|d|\mathbf{p}'_2| |\mathbf{p}'_3|d|\mathbf{p}'_3| E'_1 d\Omega_3 d\phi_{23}.$$

将动量替换为能量，最终变成

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \rightarrow E'_1 E'_2 E'_3 dE'_2 dE'_3 d\Omega_3 d\phi_{23}. \quad (3.4.31)$$

但是，回忆起通过对 $|M_{\beta\alpha}|^2$ 的自旋求和并乘以能量之积得到的量(3.4.16)，其是4-动量的一个标量函数。如果我们近似这个标量为一个常量，那么方程(3.4.31)告诉我们，对于一确定的初态，事件分布在 E'_2, E'_3 平面上制成的图是均匀的。因而，在这张图中，任何事件均匀分布的偏离提供了衰变过程一个有用的线索，其中包含可能的离心势垒或者共振中间态。因为Dalitz（达利兹）在1953年用它来分析衰变 $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ ，而被称为Dalitz图¹⁹。

3.5 微扰论

历史上，计算 S -矩阵最有力的技巧是微扰论，即哈密顿量 $H = H_0 + V$ 中相互作用项 V 的级数展开。方程(3.2.7)和(3.1.18)给出的 S -矩阵为

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\beta - E_\alpha)T_{\beta\alpha}^+ \\ T_{\beta\alpha}^+ &= (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^+), \end{aligned}$$

其中 Ψ_α^+ 满足Lippmann-Schwinger方程(3.1.17):

$$\Psi_\alpha^+ = \Phi_\alpha + \int d\gamma \frac{T_{\gamma\alpha}^+ \Phi_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon}.$$

用 V 作用这个方程，并取其与 Φ_β 的标量积，得到 T^+ 的一个积分方程

$$T_{\beta\alpha}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} T_{\gamma\alpha}^+}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon}, \quad (3.5.1)$$

其中

$$V_{\beta\alpha} \equiv (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha). \quad (3.5.2)$$

通过反复迭代方程(3.5.1)得到 $T_{\beta\alpha}^+$ 的微扰展开

$$T_{\beta\alpha}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon} + \int d\gamma d\gamma' \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} + i\epsilon)} + \dots \quad (3.5.3)$$

这种基于方程(3.5.3)的计算方法，其在20世纪30年代是 S -矩阵的主导计算方法，现在则被称为旧式微扰论。它明显的缺点是遮蔽了 S -矩阵潜在的Lorentz不变性。然而，在阐明源于不同中间态的 S -矩阵的奇异性方面，它仍然有一些用处。在本书的大多数部分，我们将依赖于方程(3.5.3)的一个改版，其被称为时间相关微扰论，它有使Lorentz不变性更加显然的优点，但却多多少少遮蔽了单个中间态的贡献。

导出编时微扰展开的最简单方法是使用方程(3.2.5)，其将 S -算符给定为：

$$S = U(\infty, -\infty),$$

其中

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \exp(iH_0\tau) \exp(-iH(\tau - \tau_0)) \exp(-iH_0\tau_0).$$

对这个公式的 $U(\tau, \tau_0)$ 相对 τ 求微分给出微分方程

$$i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_0) = V(\tau) U(\tau, \tau_0), \quad (3.5.4)$$

其中

$$V(\tau) \equiv \exp(iH_0\tau) V \exp(-iH_0\tau). \quad (3.5.5)$$

(有这类时间相关性的算符被称是定义在相互作用绘景中，这是为了将这个时间相关性与量子力学的Heisenberg绘景所要求的时间相关性 $O_H(t) = \exp(iHt) O_H \exp(-iHt)$ 区分开。) 方程(3.5.4)和初态条件 $U(\tau_0, \tau_0) = 1$ 显然被如下积分方程的解所满足

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt V(t) U(t, \tau_0). \quad (3.5.6)$$

通过迭代这个积分方程，我们获得了以 V 为幂次的 $U(\tau, \tau_0)$ 的展开式

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 V(t_1) + (-i)^2 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) + (-i)^3 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 \int_{\tau_0}^{t_2} dt_3 V(t_1) V(t_2) V(t_3) + \dots \quad (3.5.7)$$

令 $\tau = \infty$ 以及 $\tau_0 = -\infty$ 则给出 S -算符的微扰展开：

$$S = 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 V(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) + (-i)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 V(t_1) V(t_2) V(t_3) + \dots \quad (3.5.8)$$

这也可以从旧式微扰展开(3.5.3)中直接导出, 通过使用方程(3.5.3)中能量因子的Fourier表示:

$$(E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon)^{-1} = -i \int_0^\infty d\tau \exp(i(E_\alpha - E_\gamma)\tau) \quad (3.5.9)$$

注意, 这类积分是通过在被积函数中插入一个收敛因子 $e^{-\epsilon\tau}$ 计算的, 其中 $\epsilon \rightarrow 0_+$ 。

用一种重写方程(3.5.8)的方式, 这种方式在进行显式Lorentz不变计算中表现的很有用。将任何事件相关算符的编时乘积定义为排列这些因子, 使得有最晚时间变量的因子处在最左边, 下一个最晚的接着最左边, 这样做下去, 然后乘起来。例如

$$\begin{aligned} T\{V(t)\} &= V(t), \\ T\{V(t_1)V(t_2)\} &= \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1), \end{aligned}$$

等, 其中 $\theta(\tau)$ 是阶跃函数, $\tau > 0$ 是等于+1而 $\tau < 0$ 时等于0。n个V的编时乘积是对全部n!个V的置换的求和, 每一个都对所有的 $t_1 \cdots t_n$ 积分, 所以方程(3.5.8)可以写为

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \cdots dt_n T\{V(t_1) \cdots V(t_n)\}. \quad (3.5.10)$$

这有时被称为Dyson级数²⁰。如果不同时刻的所有V(t)是对易的, 这个级数可以进行求和; 其和是

$$S = \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t)\right).$$

当然, 通常不是这种情况; 一般而言, (3.5.10)甚至不收敛, 它充其量是V中出现的任何耦合常数的渐近展开式。然而在一般情况下, 方程(3.5.10)有时写为

$$S = T \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t)\right)$$

其中这里的T表明这个表达式是对指数的级数展开式中每一项进行编时后计算的。

我们现在可以轻松找到一大类S-矩阵显然是Lorentz不变的理论。由于S-矩阵的矩阵元就是S-算符在自由粒子态 Φ_α, Φ_β 等之间的矩阵元, 我们想要的是S-算符与在这些自由粒子态上产生Lorentz变换的算符 $U_0(\Lambda, a)$ 对易。等价地, S-算符与 $U_0(\Lambda, a)$ 的生成元对易: $H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ 和 \mathbf{K}_0 。为了满足这个要求, 尝试假定V(t)对三维空间的积分

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) \quad (3.5.11)$$

在这个意义上而言, $\mathcal{H}(x)$ 是标量

$$U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a). \quad (3.5.12)$$

(通过将无限小变换中 a^0 的系数等同起来, 可以检验 $\mathcal{H}(x)$ 有着与方程(3.5.5)一致的时间依赖性。)那么S可以写为四维积分的和

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}(x_1) \cdots \mathcal{H}(x_n)\} \quad (3.5.13)$$

现在除了算符的编时乘积，每一个量都是显然Lorentz不变的。

现在，两个时空点 x_1, x_2 的编时是Lorentz不变的，除非 $x_1 - x_2$ 是类空的，即，除非 $(x_1 - x_2)^2 > 0$ ，所以方程(3.5.13)中的编时不引入特殊的Lorentz参考系，当（尽管不是仅当）在类空间隔上和类光间隔^{*}上的 $\mathcal{H}(x)$ 全部对易：

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{当}(x - x')^2 \geq 0\text{时}. \quad (3.5.14)$$

我们可以利用3.3节的结果给出一个形式化的非微扰证明，证明相互作用(3.5.11)满足方程(3.5.12)和(3.5.14)确实导出一个有着正确Lorentz变换性质的 S -矩阵。对于一个无限小推动，方程(3.5.12)给出

$$-i[\mathbf{K}_0, \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)] = t\nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t), \quad (3.5.15)$$

所以对 \mathbf{x} 积分，并令 $t = 0$ ，

$$[\mathbf{K}_0, V] = \left[\mathbf{K}_0, \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0) \right] = [H_0, \mathbf{W}], \quad (3.5.16)$$

其中

$$\mathbf{W} \equiv - \int d^3x \mathbf{x} \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0). \quad (3.5.17)$$

如果（通常就是这种情况）， H_0 本征值之间的 $\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0)$ 的矩阵元是能量本征值的光滑函数，那么对 V 也是这样，这是散射理论适用性所必须的，对 \mathbf{W} 也是这样，而这是Lorentz不变性的证明所要求的。Lorentz不变性的另一条件，即对易关系(3.3.21)，是适用的，当且仅当如下的条件成立

$$0 = [\mathbf{W}, V] = \int d^3x \int d^3y \mathbf{x} [\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0), \mathcal{H}(\mathbf{y}, 0)]. \quad (3.5.18)$$

这个条件源于“因果律”条件(3.5.14)，但提供了 S -矩阵的Lorentz不变性一个稍弱的约束条件。

这类理论不是唯一的Lorentz不变的理论，而是差异不是很大的最普遍的Lorentz不变理论。尤其是，总有类似于(3.5.14)这样，需要被满足的对易关系。对于编时总是伽利略不变的非相对论性系统，这个条件没有配对版，正是这个条件使得Lorentz不变性与量子力学的结合有了那么多的限制。

* * *

迄今为止，本节所描述的方法当相互作用算符 V 充分小时是适用的。也有这种近似的修正版本，称之为畸变波Born近似，当这个相互作用包含两项时是有用的

$$V = V_s + V_w \quad (3.5.19)$$

其中 V_w 较弱而 V_s 较强。如果 V_s 是全部的相互作用，我们可以定义作为“入”态和“出”态的 $\Psi_{s\alpha}^\pm$ 为

$$\Psi_{s\alpha}^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V_s \Psi_{s\alpha}^\pm. \quad (3.5.20)$$

^{*}我们在这里将 x 和 x' 上的条件写为 $(x - x')^2 \geq 0$ 而不是 $(x - x')^2 > 0$ ，这是因为，正如我们将在第6章所看到的，Lorentz不变性会被 $x = x'$ 处麻烦的奇异性扰乱。

那么，我们可以将(3.1.16)写为

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^+ &= (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^+) \\ &= \left(\left[\Psi_{s\beta}^- - (E_\beta - H_0 - i\epsilon)^{-1} V_s \Psi_{s\beta}^- \right], (V_s + V_w)\Psi_\alpha^+ \right) \\ &= (\Psi_{s\beta}^-, V_w\Psi_\alpha^+) \\ &\quad + \left(\Psi_{s\beta}^-, \left[V_s - V_s(E_\beta - H_0 + i\epsilon)^{-1}(V_s + V_w) \right] \Psi_\alpha^+ \right) \end{aligned}$$

以及

$$T_{\beta\alpha}^+ = (\Psi_{s\beta}^-, V_w\Psi_\alpha^+) + (\Psi_{s\beta}^-, V_s\Phi_\alpha). \quad (3.5.21)$$

右边的第二项正是 $T_{\beta\alpha}^+$ 在仅有较强相互作用过程中的形式

$$T_{s\beta\alpha}^+ \equiv (\Phi_\beta, V_s\Psi_{s\alpha}^+) = (\Psi_{s\beta}^-, V_s\Phi_\alpha). \quad (3.5.22)$$

(方程(3.5.22)的一个证明，在导出方程(3.5.11)的推导中扔掉所有的 V_w 即可。)当方程(3.5.11)中的第二项为零时，即当过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 不可能由较强相互作用单独产生时，这个方程最有用。(例如，在核 β 衰变中，我们需要一个弱核力将中子转换成质子，即使我们不能忽略作用在核的初态和末态上强核力的出现。)对于这样的过程，矩阵元(3.5.22)为零，所以方程(3.5.21)写为

$$T_{\beta\alpha}^+ = (\Psi_{s\beta}^-, V_w\Psi_\alpha^+). \quad (3.5.23)$$

迄今为止，全部的处理都是精确的。然而，当 V_w 非常弱以至于我们可以忽视它在方程(3.5.23)中 Ψ_α^+ 态上的效应时，这种重写 T -矩阵的方法才是值得的，因而将 Ψ_α^+ 替换为 $\Psi_{s\alpha}^+$ ，这仅考虑了强相互作用 V_s 。在这个近似下，方程(3.5.23)变成

$$T_{\beta\alpha}^+ \simeq (\Psi_{s\beta}^-, V_w\Psi_\alpha^+). \quad (3.5.24)$$

这适用到 V_w 的第一阶，但是适用到 V_s 的所有阶。这个近似在物理中是无处不在的；例如，对于核 β 衰变或核 α 衰变， S -矩阵是利用方程(3.5.24)计算的，其中 V_s 是核的强相互作用， V_w 要么是核的弱相互作用，要么是电磁作用，而 $\Psi_{s\beta}^-$ 是核的初态， $\Psi_{s\alpha}^+$ 是核的末态。

3.6 幺正性的应用

S -矩阵的幺正性强加了一个有趣且有用的条件，这个条件将任意多粒子态 α 中的向前散射的振幅 $M_{\alpha\alpha}$ 与该态中所有反应的速率关联了起来。回忆起在普遍的情况中，态 β 和态 α 可能相同也可能不相同， S -矩阵可以写成(3.3.2)那样：

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha}.$$

那么幺正性条件给出

$$\begin{aligned} \delta(\gamma - \alpha) &= \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma - \alpha) - 2\pi i \delta^4(p_\gamma - p_\alpha) M_{\gamma\alpha} \\ &\quad + 2\pi i \delta^4(p_\gamma - p_\alpha) M_{\alpha\gamma}^* + 4\pi^2 \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\gamma) \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\gamma}^* M_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

消掉 $\delta(\gamma - \alpha)$ 项以及因子 $2\pi\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)$ ，我们发现，对于 $p_\gamma = p_\alpha$

$$0 = -iM_{\gamma\alpha} + iM_{\alpha\gamma}^* + 2\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\gamma}^* M_{\beta\alpha} . \quad (3.6.1)$$

这在 $\alpha = \gamma$ 的特殊情况下是最有用的，这时它写成

$$\text{Im } M_{\alpha\alpha} = -\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 . \quad (3.6.2)$$

利用方程(3.4.11)，这可以表示为有处在体积 V 内的初态 α 产生的所有反应的总速率公式

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &\equiv \int d\beta \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} \\ &= (2\pi)^{3N_\alpha - 2} V^{1 - N_\alpha} \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 \\ &= -\frac{1}{\pi} (2\pi)^{3N_\alpha - 2} V^{1 - N_\alpha} \text{Im } M_{\alpha\alpha} \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

特别地，当 α 是二粒子态，这可以写为

$$\text{Im } M_{\alpha\alpha} = -u_\alpha \sigma_\alpha / 16\pi^3 , \quad (3.6.4)$$

其中 u_α 是态 α 中的相对速度(3.4.17)，而 σ_α 是该态中的总截面，由(3.4.15)给定为

$$\sigma_\alpha \equiv \int d\beta d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) / d\beta = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} \int d\beta |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) . \quad (3.6.5)$$

这通常以一种稍微不同的方式表述，即以散射振幅 $f(\alpha \rightarrow \beta)$ 的形式。方程(3.4.30)证明了对于质心参考系中的两体散射，微分截面是

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k' E'_1 E'_2 E_1 E_2}{k E^2} |M_{\beta\alpha}|^2 , \quad (3.6.6)$$

其中 k' 和 k 是末态和初态中动量的大小。因而，我们可以将散射振幅定义为*

$$f(\alpha \rightarrow \beta) \equiv -\frac{4\pi^2}{E} \sqrt{\frac{k' E'_1 E'_2 E_1 E_2}{k}} M_{\beta\alpha} , \quad (3.6.7)$$

使得微分截面就是

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = |f(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \quad (3.6.8)$$

尤其是，对于弹性两体散射，我们有

$$f(\alpha \rightarrow \beta) \equiv -\frac{4\pi^2 E_1 E_2}{E} M_{\beta\alpha} . \quad (3.6.9)$$

利用相对速率 u_α 的公式(3.4.18)，么正性预测现在写为

$$\text{Im } f(\alpha \rightarrow \alpha) = \frac{k}{4\pi} \sigma_\alpha . \quad (3.6.10)$$

* f 的相位是约定好的，源于在时间独立的Schrödinger方程的解中， f 的波动力学解释²¹是出射波的系数。这里所使用的 f 的归一化对于非弹性散射有点非常规；通常 f 的定义使得末速度和初速度的比值出现在微分截面的公式中。

么正性条件(3.6.3)的这种形式被称为光学定理²²。

光学定理一个漂亮的结果告诉我们很多高能的散射部分。散射振幅 f 预期表示为角度的一个光滑函数，所以在向前方向的某个立体角 $\Delta\Omega$ 内， $|f|^2$ （带有因子2）是接近相同的，那么总截面被如下的公式约束

$$\sigma_\alpha \geq \int |f|^2 d\Omega \geq \frac{1}{2} |f(\alpha \rightarrow \alpha)|^2 \Delta\Omega \geq \frac{1}{2} |\text{Im } f(\alpha \rightarrow \alpha)|^2 \Delta\Omega .$$

那么，利用方程(3.6.10)则得出 $\Delta\Omega$ 的一个上界

$$\Delta\Omega \leq 32\pi^2 / k^2 \sigma_\alpha . \quad (3.6.11)$$

正如我们将在下一节所看到的，在 高能，总截面预期接近一个常数或者增长得非常缓慢，所以方程(3.6.11)证明了在向前方向，微分截面近似为常数的某个立体角，在 $k \rightarrow \infty$ 时，至少以 $1/k^2$ 的速度收缩。这个在 高能下不断变窄的峰被称为衍射峰。

现在回到反应包含的粒子数任意的一般情况，我们可以利用方程(3.6.2)与CPT不变性陈述了粒子的总相互作用速率和反粒子之间的一些关系。由于CPT是反么正的，它的守恒一般不暗含着过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 与粒子替换为反粒子的相同过程之间的简单关系。反而，它提供了过程与包含反粒子的逆过程之间的关系：利用允许我们从时间反演不变性推断出(3.3.46)的讨论，我们可以证明CPT不变要求 S -矩阵满足如下的条件

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\mathcal{CPT}\alpha, \mathcal{CPT}\beta}, \quad (3.6.12)$$

其中 \mathcal{CPT} 表明我们必须反转所有的自旋 z -分量，将所有的粒子变为相对应的反粒子，并给矩阵元乘上初态中粒子不同的相位因子，以及末态中粒子相位因子的复共轭。由于CPT不变性要求粒子与相对应的反粒子有相同的质量，对于 $S_{\beta\alpha}$ 中 $\delta^4(p_\alpha - p_\beta)$ 的系数，有相同的关系成立

$$M_{\beta,\alpha} = M_{\mathcal{CPT}\alpha, \mathcal{CPT}\beta} . \quad (3.6.13)$$

特别地，当初态与末态相同时，相位因子全部抵消，方程(3.6.13)变成

$$\begin{aligned} & M_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots, p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} \\ &= M_{p_1-\sigma_1 n_1^c; p_2-\sigma_2 n_2^c; \dots, p_1-\sigma_1 n_1^c; p_2-\sigma_2 n_2^c; \dots} , \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

其中 n 上的上标 c 代表 n 的反粒子。那么，推广后的光学定理告诉我们由粒子的某个集合构成的初态，它的总反应速率与由相对应的自旋反转的反粒子构成的初态是相同的：

$$\Gamma_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} = \Gamma_{p_1-\sigma_1 n_1^c; p_2-\sigma_2 n_2^c; \dots} . \quad (3.6.15)$$

尤其是，将其应用于单粒子态，我们看到任何粒子的衰变速度等于自旋反转的反粒子的衰变速率。旋转不变性不允许粒子的衰变速率依赖于衰变粒子的自旋 z -分量，所以，普遍结果(3.6.15)的一个特殊情况是不稳定粒子与它们相对应的反粒子有精确相同的寿命。

* * *

从么正条件 $S^\dagger S = 1$ 导出我们的结果(3.6.2)的讨论, 也允许我们用另一么正关系 $SS^\dagger = 1$ 导出如下的结果

$$\text{Im} = -\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 . \quad (3.6.16)$$

那么, 与方程(3.6.2)一起, 这得到了互惠关系 (reciprocity relation)

$$\int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 = \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\alpha\beta}|^2 \quad (3.6.17)$$

或者, 换一种形式

$$\int d\beta c_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} = \int d\beta c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} , \quad (3.6.18)$$

其中 $c_\alpha \equiv [V/(2\pi)^3]^{N_\alpha}$. 这个结果可以用来导出一些动能理论中²³最重要的结果。如果 $P_\alpha d\alpha$ 是发现系统处在多粒子态 Φ_α 空间的体积 $d\alpha$ 中的几率, 那么, 由于跃迁到所有其它的态上导致的 P_α 的衰减速率是 $P_\alpha \int d\beta d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)/d\beta$, 而由于其它态跃迁到 α 态导致的增长速率是 $\int d\beta P_\beta d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)/d\alpha$; 所以, P_α 的变化率是

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \int d\beta P_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - P_\alpha \int d\beta \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} . \quad (3.6.19)$$

这立即得出 $\int P_\alpha d\alpha$ 是与时间无关的。(交换方程(3.6.19)中第二项积分的积分变量的标记即可) 另一方面, 熵的变化率 $-\int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha)$ 是

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) &= -\int d\alpha \int d\beta \left(\ln(P_\alpha/c_\alpha) + 1 \right) \\ &\quad \times \left[P_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - P_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} \right] . \end{aligned}$$

交换第二项中积分变量的标记, 其可以写为

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) = \int d\alpha \int d\beta P_\beta \ln \left(\frac{P_\beta c_\alpha}{P_\alpha c_\beta} \right) \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} .$$

现在, 对于任意正的量 x 和 y , 函数 $y \ln(y/x)$ 满足如下不等式^{**}

$$y \ln \left(\frac{y}{x} \right) \geq y - x .$$

熵的变化率因而存在被如下不等式约束

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq \int d\alpha \int d\beta \left[\frac{P_\beta}{c_\beta} - \frac{P_\alpha}{c_\alpha} \right] c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha}$$

或者交换第二项中的积分变量

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq \int d\alpha \int d\beta \frac{P_\beta}{c_\beta} \left[c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - c_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} \right] .$$

^{**}当 $x \rightarrow y$ 时, 左边和右边的差接近正量 $(x-y)^2/2y$, 并相对 x 有一导数, 其分别对于所有的 $x > y$ 或 $y < x$, 是正定或负定的。

但是（ α 和 β 交换后的）么正关系(3.6.18)告诉我们，不等式右边中对 α 的积分为零，所以，我们可以得出这样的结论，熵总是增长的：

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq 0 \quad (3.6.20)$$

这是“Boltzmann H -定理”。在统计力学教科书中，这个定理的导出，要么利用Born近似，即 $|M_{\beta\alpha}|^2$ 关于 α 和 β 是对称的，使得 $c_\beta d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)/d\alpha = c_\alpha d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)/d\beta$ ，要么通过假定时间反演不变，这样如果我们交换 α 和 β 并反转所有的动量和自旋， $|M_{\beta\alpha}|^2$ 是不变的。当然，Born近似和时间反演不变都不是精确的，所以，么正性结果(3.6.18)的好处是，这是我们为了导出 H -定理唯一需要的。

当几率 P_α 变成仅是守恒量，诸如总能量，荷等的函数与因子 c_α 之积时，熵的增长停止了。在这种情况下，守恒率要求，除非 $P_\alpha/c_\alpha = P_\beta/c_\beta$ ，否则 $d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)/d\alpha$ 为零，所以我们可以将方程(3.6.19)中第一项的 P_β 替换为 $P_\alpha c_\beta/c_\alpha$ 。再一次利用方程(3.6.18)则证明了，在这种情况下， P_α 是时间无关的。这里又一次地，我们仅需要么正关系(3.6.18)，而不是Born近似或时间反演不变。

3.7 分波展开*

以自由粒子态为基处理 S -矩阵通常是方便的，这时，除了总动量和能量以外，所有的变量是离散的。这是可能的，因为在总动量为 \mathbf{p} 且总能量为 E 的 n -粒子态中，动量 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ 的分量形成一个 $(3n-4)$ -维的紧致空间；例如，对于在 $\mathbf{p}=0$ 的质心参考系中的 $n=2$ 粒子，这个空间是二维球面。这种紧致空间上的任何函数都可展成一系列的广义“分波”，例如，一般用于将函数表示到二维球面上的球谐函数。因而，对于那些没有连续变量 \mathbf{p} 和 E 的 n -粒子态，我们可以定义一组离散基：在这样的基下，我们将自由粒子态标记为 $\Phi_{E\mathbf{p}N}$ ，其中指标 N 包含所有的自旋标记，种类标记以及其它用来标记广义分波的指标。这些态被选为是归一化的是方便地，这使得它们的标量积是：

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, \Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta(E' - E)\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{N',N}. \quad (3.7.1)$$

那么在这种形式的基下， S -算符有如下的矩阵元

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, S\Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta(E' - E)\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})S_{N',N}(E, \mathbf{p}), \quad (3.7.2)$$

其中 $S_{N',N}$ 是么正矩阵。类似地， T -算符，其自由粒子矩阵元 $(\Phi_\beta, T\Phi_\alpha)$ 定义为由方程(3.1.18)多定义的量 $T_{\beta\alpha}^+$ ，在我们的新基下（依照方程(3.4.12)）可以表示为

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, T\Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})M_{N',N}(E, \mathbf{p}) \quad (3.7.3)$$

并且，关系(3.2.7)现在是一个普通的矩阵方程：

$$S_{N',N}(E, \mathbf{p}) = \delta_{N',N} - 2i\pi M_{N',N}(E, \mathbf{p}). \quad (3.7.4)$$

在以下部分，我们将使用这个普遍公式；目前，我们将集中于初态仅包含两个粒子的反应。

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外，可以在第一次阅读时省略。

例如，考察由两个非全同粒子构成的态，这两个粒子种类为 n_1, n_2 、质量非零为 M_1, M_2 、拥有自旋 s_1, s_2 。在这种情况下，态由它们的总动量 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ 、能量 E 、种类指标 n_1, n_2 、自旋 z -分量 σ_1, σ_2 以及一对整数 ℓ, m （其中 $|m| \leq \ell$ ）标记；其中 ℓ 和 m 用来指定态对方向，即 \mathbf{p}_1 的依赖关系。或者，通过使用Clebsch-Gordan系数⁹将两个自旋结合成一个 z -分量为 μ 的总自旋，然后再一次使用Clebsch-Gordan系数，将这个自旋与轨道角动量 ℓ 以及 z -分量 m 结合，形成一个 z -分量为 σ 的总角动量 j ，我们可以构成一个便利的离散基。这给出了态的一组基 $\Phi_{E \mathbf{p} j \sigma \ell s n}$ （其中 n 是用来标记两个粒子种类的 n_1, n_2 的“道指标”），其由个体动量以及自旋 z -分量确定的态的标量积所定义：

$$\begin{aligned} (\Phi_{\mathbf{p}_1 \sigma_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n'}, \Phi_{E \mathbf{p} j \sigma \ell s n}) &\equiv (|\mathbf{p}_1| E_1 E_2 / E)^{-1/2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &\times \delta \left(E - \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + M_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + M_1^2} \right) \delta_{n', n} \\ &\times \sum_{m, \mu} C_{s_1 s_2}(s, \mu; \sigma_1, \sigma_2) C_{\ell s}(j, \sigma; m, \mu) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{p}}_1). \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

其中 Y_ℓ^m 是通常的球谐函数²⁴。插入因子 $(|\mathbf{p}_1| E_1 E_2 / E)^{-1/2}$ 使得这些态在质心系中恰是归一化的：

$$(\Phi_{E' \mathbf{p}' j' \sigma' \ell' s' n'}, \Phi_{E \mathbf{0} j \sigma \ell s n}) = \delta^3(\mathbf{p}') \delta(E' - E) \delta_{j', j} \delta_{\sigma', \sigma} \delta_{\ell', \ell} \delta_{s', s} \delta_{n', n}. \quad (3.7.6)$$

为了避免对全同粒子进行二次计数，我们仅对2-粒子动量空间的一半进行积分，所以一个额外的因子 $\sqrt{2}$ 应该出现在标量积(3.7.6)中。

在质心参考系中，任何动量守恒且旋转不变的算符 O 的矩阵元必须采取这样的形式：

$$(\Phi_{E' \mathbf{p}' j' \sigma' \ell' s' n'}, O \Phi_{E \mathbf{0} j \sigma \ell s n}) = \delta^3(\mathbf{p}') O_{\ell' s' n', \ell s n}^j(E) \delta_{j j'} \delta_{\sigma \sigma'}. \quad (3.7.7)$$

（其关于 j 和 σ 是对角的是源于 O 与 \mathbf{J}^2 和 J_3 的对易，进一步的， $\delta_{\sigma \sigma'}$ 的系数与 σ' 独立的是源于 O 与 $J_1 \pm iJ_2$ 的对易。这是所谓Wigner-Eckart定理²⁵的特殊情况。）将其应用于矩阵元是 $M_{\beta\alpha}$ 的算符 M ，这得出质心参考系中的散射振幅(3.6.7)采取如下的形式 $\hat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{k} \sigma_1, -\mathbf{k} \sigma_2, n \rightarrow \mathbf{k}' \sigma'_1, -\mathbf{k}' \sigma'_2, n') \\ &\equiv -4\pi^2 \sqrt{\frac{k' E'_1 E'_2 E_1 E_2}{E^2 k}} M_{\mathbf{k}' \sigma'_1 - \mathbf{k}' \sigma'_2 n', \mathbf{k} \sigma_1 - \mathbf{k} \sigma_2 n} \\ &= -\frac{4\pi^2}{k} \sum_{j \sigma \ell' m' s' \mu' \ell m s \mu} C_{s_1 s_2}(s, \mu; \sigma_1, \sigma_2) C_{\ell s}(j, \sigma; m, \mu) \\ &\quad \times C_{s'_1 s'_2}(s', \mu'; \sigma'_1, \sigma'_2) C_{\ell' s'}(j, \sigma; m', \mu') \\ &\quad \times Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}}') Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) M_{\ell' s' n', \ell s n}^j(E). \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

微分散射截面是 $|f|^2$ 。我们令初动量 \mathbf{k} 的方向沿着 z -方向，在这种情况下

$$Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}. \quad (3.7.9)$$

对 $|f|^2$ 沿着初动量 \mathbf{k}' 的方向积分, 并分别对末态和初态的自旋3-分量求和以及取平均, 我们得到从 n 道跃迁到 n' 道的总截面**:

$$\begin{aligned} \sigma(n \rightarrow n'; E) &= \frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j \ell s \ell' s'} (2j+1) \\ &\times \left| \delta_{\ell' \ell} \delta_{s' s} \delta_{n' n} - S_{\ell' s' n', \ell s n}^j(E) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

对(3.7.10)的所有两体道求和, 这给出所有弹性两体反应或非弹两体反应的总截面:

$$\begin{aligned} \sum_{n'} \sigma(n \rightarrow n'; E) &= \frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j \ell s} (2j+1) \\ &\times \left[(1 - S^j(E))^\dagger (1 - S^j(E)) \right]_{\ell s n, \ell s n}. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

可以做个比较, 方程(3.7.8)、(3.7.9)、(3.7.4)和Clebsch-Gordon求和规则**给定自旋平均的向前散射振幅为

$$f(n; E) = \frac{i}{2k(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j \ell s} (2j+1) [1 - S_{\ell s n, \ell s n}^j]$$

那么, 光学定理(3.6.10)给定总截面为

$$\sigma_{\text{total}}(n; E) = \frac{2\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j \ell s} (2j+1) \text{Re}[1 - S^j(E)]_{\ell s n, \ell s n}. \quad (3.7.12)$$

只要两体道能在能量为 E 时从 n 道达到, 那么矩阵 $S^j(E)$ (或者至少是某些包含 n 道的子矩阵) 是幺正的, 因而

$$\left[(1 - S^j(E))^\dagger (1 - S^j(E)) \right]_{\ell s n, \ell s n} = 2 \text{Re}[1 - S^j(E)]_{\ell s n, \ell s n}, \quad (3.7.13)$$

所以(3.7.12)和(3.7.11)是相等的。另一方面, 如果包含三个或多个粒子的道是开的, 那么(3.7.12)与(3.7.11)之差给出产生额外粒子的总截面:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{production}}(n; E) &= \frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j \ell s} (2j+1) \\ &\times \left[1 - S^j(E)^\dagger S^j(E) \right]_{\ell s n, \ell s n}, \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

并且, 这必须是正的。

**为了导出这个结果, 我们使用了Clebsch-Gordan系数的标准求和规则⁹: 首先

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} C_{s_1, s_2}(s, \mu; \sigma_1, \sigma_2) C_{s_1, s_2}(\bar{s}, \bar{\mu}; \sigma_1, \sigma_2) = \delta_{s\bar{s}} \delta_{\mu\bar{\mu}}$$

有撇号时是相同的, 接着

$$\sum_{m \bar{m}} C_{\ell s}(j, \sigma; m, \bar{m}) C_{\ell s}(\bar{j}, \bar{\sigma}; m, \bar{m}) = \delta_{j\bar{j}} \delta_{\sigma\bar{\sigma}}$$

最终

$$\sum_{\sigma \mu} C_{\ell s}(j, \sigma; 0, \mu) C_{\bar{\ell} s}(j, \sigma; 0, \mu) = \frac{2j+1}{2\ell+1} \delta_{\ell\bar{\ell}}.$$

如果与过程相关的 S -矩阵部分是对角化的, 把分波展开应用到这样的过程中是非常有用的。例如如下的情况, 如果初道 n 仅包含两个无自旋粒子, 并且在这个能量处没有其它的道是打开的, 就像 $\pi^+ - \pi^+$ 或 $\pi^+ - \pi^0$ 在能量低于产生额外 π 介子(假定忽视弱作用和电磁作用)的阈值下的散射。对于一对无自旋的粒子, 我们有 $j = \ell$ 以及角动量守恒, 这使得 S -矩阵是对角化的。当所包含的粒子有自旋, 在特定的过程中, S -矩阵也有对角化的可能; 例如在 π 介子-核子散射中, 我们可以有 $j = \ell + \frac{1}{2}$ 或 $j = \ell - \frac{1}{2}$, 但是对于给定的 j , 这两个态有相反的宇称, 所以它们不能通过非零 S -矩阵元相连接。在任何情况下, 如果对于某些 n 和 E , 除非 N' 是两体态 j, ℓ, s, n , 否则 S -矩阵元全为零, 那么么正性要求

$$S_{\ell' s' n', \ell s n}^j(E) = \exp[2i\delta_{j\ell s n}(E)]\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}, \quad (3.7.15)$$

其中 $\delta_{j\ell s n}(E)$ 是实相位, 通常称为相移。当 S -矩阵的两体部分是对角的但包含三个或多个粒子的道是开时, 也通常使用这个公式; 在这种情况下, 为了保持(3.7.14)是正的, 相移必须有一正虚部。对于实相移, 那么由方程(3.7.10)或方程(3.7.12)给出的弹性总截面是:

$$\begin{aligned} \sigma(n \rightarrow n; E) &= \sigma_{\text{total}}(n; E) \\ &= \frac{4\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{j\ell s} (2j + 1) \sin^2 \delta_{j\ell s n}(E). \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

在非相对论量子力学中, 这个常见的结果通常是通过研究一个粒子在势中的坐标空间波函数导出的。这里所给出的推导, 即提供了分波展开对于弹性散射, 即使是在相对论速度也是适用的证明, 也强调了它不依赖于特殊的动力学要求, 而仅依赖于么正性和不变性原理。

在处理几个道是打开的问题时引入相移通常是有用的, 其构成某些内部对称群的几个不合约表示。这类内部对称性的一个经典例子是同位旋对称性, 对于这种对称性, 道指标 n 包含对两个粒子的同位旋 T_1, T_2 以及它们的3-分量 t_1, t_2 的指定; 道 n 中的态可以表示为第 t 个不可约表示 T 分量表示的线性组合, 其系数由熟悉的Clebsch-Gordan系数 $C_{T_1 T_2}(T, t; t_1, t_2)$ 。假定对于感兴趣的道和能量, S -矩阵对于 ℓ, s 和 j, T, t 是对角的。那么, 么正性和同位旋对称性允许我们将 S -矩阵写为

$$S_{\ell' s' T' t', \ell s T t}^j = \exp[2i\delta_{j\ell s T}(E)]\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{T'T}\delta_{t't}, \quad (3.7.17)$$

其中 $\delta_{j\ell s T}(E)$ 是实相位, 且根据Wigner-Eckart定理是与 t 无关的。部分截面可以再一次地从方程(3.7.10)得出, 而总截面由方程(3.7.12)给定为

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{total}}(t_1, t_2; E) &= \frac{4\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \\ &\times \sum_{j\ell s T t} (2j + 1) C_{T_1 T_2}(T, t; t_1, t_2)^2 \sin^2 \delta_{j\ell s T}(E) \end{aligned} \quad (3.7.18)$$

例如, 在 π 介子- π 介子散射中, 我们有相移 $\delta_{\ell\ell 0 T}(E)$, 其中对于偶数的 ℓ , $T = 0$ 或 $T = 2$, 对于奇数的 ℓ , $T = 1$, 而对于 π 介子-核子散射, 我们有相移 $\delta_{j j \pm \frac{1}{2} T}$, 其中 $T = \frac{1}{2}$ 或 $T = \frac{3}{2}$ 。

对于散射振幅的阈值行为以及通过对解析性考察得到的相移, 我们能得到一些有用的洞察, 即它们近乎独立于任何动力学假设。除非是在动量空间会产生奇异性的特殊环境下, 我们可以预期, 在 $k = 0$ 或 $k' = 0$ 或(对于弹性散射) $k = k' = 0$ 附近, 矩阵元 $M_{\mathbf{k}' \sigma'_1 - \mathbf{k}' \sigma'_2 n', \mathbf{k} \sigma_1 - \mathbf{k} \sigma_2 n}$ 是3-动量 \mathbf{k} 和 \mathbf{k}' 的解析函数[†]。转向 M 的分波展开(3.7.8), 我们注意到 $k^\ell Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})$ 是3-矢 \mathbf{k} 的简单多项

[†]例如, 在Born近似(3.2.8)中, M 正比于相互作用的坐标空间矩阵元的Fourier变换, 因而只要这些矩阵元在大的距离处快速衰减, 它在零动量处是解析的。主要的例外是包含长程力的散射, 例如库仑力。

式函数，所以，为了使 $M_{\mathbf{k}'\sigma'_1 - \mathbf{k}'\sigma'_2 n', \mathbf{k}\sigma_1 - \mathbf{k}\sigma_2 n}$ 在 $k = 0$ 或 $k' = 0$ 附近是3-动量 \mathbf{k} 和 \mathbf{k}' 的解析函数，在 k 和/或 k' 趋于零时，系数 $M_{\ell' s' n', \ell s n}^j$ ，或等价地， $\delta_{\ell' \ell} \delta_{s' s} \delta_{n' n} - S_{\ell' s' n', \ell s n}^j$ ，必须趋于 $k^{\ell + \frac{1}{2}} k'^{\ell + \frac{1}{2}}$ 。因此对于小的 k 和/或 k' ，在初态和/或末态中，只有最低阶的分波对于散射振幅有明显的贡献。我们有三种可能的情况：

放热反应

这时，当 $k \rightarrow 0$ 时 k' 趋于一个有限值，并且在这个极限下， $\delta_{\ell' \ell} \delta_{s' s} \delta_{n' n} - S_{\ell' s' n', \ell s n}^j$ 趋于 $k^{\ell + \frac{1}{2}}$ 。截面(3.7.11)在这种情况下趋于 $k^{2\ell - 1}$ ，其中 ℓ 在这里是能引发这个反应的最低轨道角动量。在最通常的情况下， $\ell = 0$ ，所以反应截面趋于 $1/k$ 。（这有几个例子，复核对慢中子的吸收，或是去除库仑力的高阶效应后，正负电子对湮灭成低能光子。）反应速率等于截面乘以流，而流趋于 k ，所以放热反应的速率行为在 $k \rightarrow 0$ 时像一个常数。然而，当粒子束穿越一个厚度给定的靶物质时，决定吸收几率的是截面而不是反应速率，并且在类似硼的吸收物质中，因子 $1/k$ 使得吸收几率对于慢中子非常高。

吸热反应

这时，直到 k 达到一个有限的阈值，反应一直是禁止的，在这个阈值处 $k' = 0$ 。仅在这个阈值稍上， $\delta_{\ell' \ell} \delta_{s' s} \delta_{n' n} - S_{\ell' s' n', \ell s n}^j$ 趋于 $(k')^{\ell + \frac{1}{2}}$ 。截面(3.7.11)在这种情况下趋于 $(k')^{2\ell + 1}$ ， ℓ' 在这里是在阈值处能产生的最低轨道角动量。在最通常的情况下， $\ell' = 0$ ，所以反应截面在阈值之上像 k' 一样上升，因而类似 $\sqrt{E - E_{\text{threshold}}}$ 。（这有几个例子，附带有奇异粒子的产生，或是光子散射中，正负电子对的产生。）

弹性反应

这时 $k = k'$ ，所以 k 和 k' 一起趋于零。（当 $n' = n$ 时，或者组成 n' 的粒子与组成 n 的粒子处在相同的同位旋多重态时，便是这种情况。）在弹性散射中， $\ell = \ell' = 0$ 的分波总是出现，所以在 $k \rightarrow 0$ 的极限下，散射振幅(3.7.8)变成一个常数：

$$f(\mathbf{k}, \sigma_1, -\mathbf{k}, \sigma_2, n \rightarrow \mathbf{k}', \sigma'_1, -\mathbf{k}', \sigma'_2, n') \rightarrow \sum_{s\sigma} C_{s_1 s_2}(s, \sigma; \sigma_1, \sigma_2) C_{s'_1 s'_2}(s, \sigma; \sigma'_1, \sigma'_2) a_s(n \rightarrow n'), \quad (3.7.19)$$

其中 a 是一个常数，称为散射长度，定义为 $k = k' \rightarrow 0$ 时的如下极限

$$S_{0s n', 0s n}^s \rightarrow \delta_{n', n} + 2ika_s(n - n'). \quad (3.7.20)$$

对 $4\pi |f|^2$ 的末态自旋求和以及对初态自旋取平均给出 $k = k' = 0$ 时，跃迁 $n \rightarrow n'$ 的总截面：

$$\sigma(n \rightarrow n'; k = 0) = \frac{4\pi}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_s (2s + 1) a_s^2(n \rightarrow n'). \quad (3.7.21)$$

这个公式应用的一个经典例子是在中子-质子散射中，这里有两个散射长度，且自旋单态长度 a_0 远大于自旋三重态的长度 a_1 。

分波展开也可用来对散射的高能行为做一些粗糙的猜测。随着波长的减小，我们可以预期散射或多或少地被经典地描述：一个动量为 k ，轨道角动量为 ℓ 的粒子，其有碰撞参量 ℓ/k ，因而如

果 $\ell \leq kR$ ，那么粒子将会打到一个半径为 R 的圆盘中。这可以被翻译成关于 S -矩阵元的陈述：

$$S_{\ell s n, \ell s n}^j \rightarrow \begin{cases} 0 & \ell \ll kR_n \\ 1 & \ell \gg kR_n \end{cases}, \quad (3.7.22)$$

其中 R_n 是道 n 的某种相互作用的半径。对于给定的 $\ell \gg s$ ， j 的 $2s + 1$ 个值都很接近 ℓ ，使得可做近似 $2j + 1 \simeq 2\ell + 1$ ，所以在方程(3.7.12)中对 j 和 s 的求和金给出一个阶因子

$$\sum_{j s} (2j + 1) = (2\ell + 1) \sum_s (2s + 1) = (2\ell + 1)(2s_1 + 1)(2s_2 + 1).$$

那么，当 $k \gg 1/R_n$ 时，总截面由方程(3.7.12)给定为

$$\sigma_{\text{total}}(n; E) \rightarrow \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell \leq kR_n} (2\ell + 1) \rightarrow 2\pi R_n^2. \quad (3.7.23)$$

以精确相同的方式，方程(3.7.10)给出弹性散射截面

$$\sigma(n \rightarrow n; E) \rightarrow \pi R_n^2. \quad (3.7.24)$$

方程(3.7.23)与(3.7.24)之差给出一个非弹截面 πR_n^2 ，对于粒子与半径为 R_n 的不透圆盘的碰撞，这是我们所期望的。（有些神奇的弹性散射截面 πR_n^2 可以认为是圆盘的衍射。）另一方面，如果我们随着方程(3.7.22)假定，仅当碰撞参量 ℓ/k 处在 $\ell/k = R_n$ 周围一个宽度为 $\Delta_n \ll R_n$ 的狭窄范围内， $S_{\ell s n, \ell s n}^j$ 才是复的，那么，利用不等式 $|\text{Im}(1 - S_{\ell s n, \ell s n}^j)| \leq 2$ ，相同的分析给出向前散射振幅实部的一个约束条件

$$|\text{Re } f(n; E)| \leq 2kR_n \Delta_n \ll |\text{Im } f(n; E)|. \quad (3.7.25)$$

高能下向前散射振幅的实部很小已被实验证实。

迄今为止，我们没有讨论相互作用半径 R_n 本身是否可能依赖于能量。做一个非常粗糙的猜测，我们可以取 R_n 为，使 Yukawa 势(1.2.74)中的因子 $\exp(-\mu r)$ 是正比于 E 的某个未知级数的值，在这种情况下，当 $E \rightarrow \infty$ 时， R_n 趋于 $\log E$ ，而截面趋于 $(\log E)^2$ 。碰巧的是，当 $E \rightarrow \infty$ 时，在总截面不能比 $(\log E)^2$ 增长的更快的普遍假定下，以此为基础，这已被粗略地证明²⁶，事实上，已观测到质子-质子总截面在高能下的增长类似于 $(\log E)^2$ ，所以高能散射的这个粗糙描述似乎确实有某些现实对应。

3.8 共振*

参与多粒子碰撞的粒子常常能形成一个由单个不稳定粒子 R 组成的中间态，这个中间态最终会衰变成末态中观测到的粒子。如果 R 的总衰变速率很小，截面在中间态 R 的能量处会呈现出一个尖锐的变换（通常是一个峰），称其为共振。

我们将会看到，共振附近的截面行为几乎是由么正条件单独确定的，这是一件好事，因为一些相当不同的机制能产生近似稳定的态：

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外，可以在第一次阅读时省略。

(a) 最简单的可能性是哈密顿量能够分成两项，一个“强”哈密顿量 $H_0 + V_s$ ，粒子 R 是它的一个本征态，再加上弱的微扰 V_w ，它允许 R 衰变成各种态，其中包括我们碰撞过程的初末态 α, β 。例如，有一中性粒子，称为 Z^0 ，其 $j = 1$ 而质量为 91GeV ，在没有电弱相互作用时，它是稳定的。这些相互作用允许 Z^0 衰变成正负电子对，正负 μ 子对等，但其总衰变速率远小于 Z^0 的质量。1989年，在CERN（欧洲核子研究组织）和Stanford（斯坦福）所进行的 $e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$ ， $e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 等反应中， Z^0 粒子是作为正负电子对碰撞中的共振**被看到的。

(b) 在一些情况下，因为存在势垒，近乎阻止了粒子的组分逃脱，使得它可以长时间存在。典型的例子是核 α 衰变：原子核发射一个 α 粒子（ He^4 核）是很有可能，但是 α 粒子与核的强静电斥力在子核周围创造了一个势垒区域，而 α 粒子通常很难进入这个区域。那么衰变只能通过量子力学隧穿效应进行，而这个衰变速率是指数减小的。在 α 粒子在子核上的散射中，这样的不稳定态表现为一个共振。例如， Be^8 的低能态是不稳定的却不衰减成两个 α 粒子，因而在 He^4 - He^4 散射中被视为一个共振。（除了库仑势垒以外，也存在离心势垒帮助延长高自旋的 α -、 β -和 γ -不稳核的寿命。）

(c) 在没有任何势垒或弱作用的情况下，复杂系统有可能由于统计原因变成近不稳的。例如，一个重荷的激发态可能仅通过一个统计涨落而衰变，它的能量中的大部分被集中在一个中子上。那么在中子在子核上的散射中，这个态将会表现为一个共振。

这些产生寿命态的机制相差如此之大，使得在不考虑产生共振的动力学机制时，共振的大多数性质非常幸运地仅依赖于么正性。

首先，考察共振附近的反应的矩阵元与能量之间的关系。(3.1.19)给出了“入”态波包 $\int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha^+ \exp(-iE_\alpha t)$ 的时间依赖性

$$\int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha^+ e^{-iE_\alpha t} = \int d\alpha g(\alpha) \Phi_\alpha e^{-iE_\alpha t} + \int d\beta \Phi_\beta \int d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon}.$$

正如3.1节中所提到的， $T_{\beta\alpha}^+$ 在下半复 E_α 平面中的极点对第二项所做的贡献，在 $t \rightarrow \infty$ 时指数衰减。特别地， $E_\alpha = E_R - i\Gamma/2$ 处的极点在振幅中产生了行为类似 $\exp(-iE_R t - \Gamma t/2)$ 项，所以它对应几率像 $\exp(-\Gamma t)$ 那样衰减的态。那么，我们可以得出这样的结论：能量为 E_R 并有一个较慢的衰变速率 Γ 的长寿命态，在散射振幅中所产生的项的变化情况为

$$T_{\beta\alpha}^+ \sim (E_\alpha - E_R + i\Gamma/2)^{-1} + \text{常数}. \quad (3.8.1)$$

更进一步，以上一节所讨论的正交离散多粒子态 $\Phi_{\mathbf{p}EN}$ 为基是方便的： \mathbf{p} 和 E 是总动量和总能量， N 是只能取离散值（尽管无限多个）的指标。在这个基下， S -矩阵可以写为

$$S_{\mathbf{p}'E'N', \mathbf{p}EN} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta(E' - E) S_{N'N}(\mathbf{p}, E). \quad (3.8.2)$$

在共振附近，我们预期质心参考系振幅 $S(0, E) \equiv \mathcal{S}(E)$ 有如下的形式

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) \equiv S_{N'N}(0, E) = \mathcal{S}_{0N'N} + \frac{\mathcal{R}_{N'N}}{E - E_R + i\Gamma/2}, \quad (3.8.3)$$

**碰巧的是，这个粒子证明了共振态仅需要相对较慢的衰变。 Z^0 的寿命是 2.6×10^{-25} 秒，不足以使得 Z^0 以接近光速的速度横穿原子核。重要的是，这个衰变速率比 Z^0 波函数在它的静止系下的振荡速率 \hbar/M_Z 小36倍。

其中 \mathcal{S}_0 和 \mathcal{R} 至少在能量的相对较小范围 $|E - E_R| \lesssim \Gamma$ 内近似是个常数。

在这个基下， S -矩阵的么正性是一普通的矩阵方程

$$\mathcal{S}(E)^\dagger \mathcal{S}(E) = 1. \quad (3.8.4)$$

将其应用于方程(3.8.3)，这告诉我们，非共振背景的 S -矩阵是么正的

$$\mathcal{S}_0^\dagger \mathcal{S}_0 = 1, \quad (3.8.5)$$

以及，留数矩阵 \mathcal{R} 满足如下两个条件

$$\mathcal{S}_0^\dagger \mathcal{R} + \mathcal{R}^\dagger \mathcal{S}_0 = 0, \quad (3.8.6)$$

$$-\frac{i}{2}\Gamma \mathcal{S}_0^\dagger \mathcal{R} + \frac{i}{2}\Gamma \mathcal{R}^\dagger \mathcal{S}_0 + \mathcal{R}^\dagger \mathcal{R} = 0. \quad (3.8.7)$$

通过令

$$\mathcal{R} \equiv -i\Gamma \mathcal{A} \mathcal{S}_0, \quad (3.8.8)$$

这些条件可以写成更加显然的形式。那么，矩阵 \mathcal{A} 上的么正条件就是

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}. \quad (3.8.9)$$

任何这样的厄密幂等矩阵被称为投影矩阵。这样的矩阵总可以表达为正交矢量 $u^{(r)}$ 的并矢的和：

$$\mathcal{A}_{N'N} = \sum_r u_{N'}^{(r)} u_N^{(r)*}, \quad \sum_N u_N^{(r)*} u_N^{(s)} = \delta_{rs}. \quad (3.8.10)$$

那么， S -矩阵的离散部分是

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) = \sum_{N''} \left[\delta_{N'N''} - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \sum_r u_{N'}^{(r)} u_{N''}^{(r)*} \right] \mathcal{S}_{0N''N}. \quad (3.8.11)$$

在对 r 的求和中，每一项可以认为是源于不同的共振态，所有的这些态对于 E_R 和 Γ 有相同的值。

这对速率和截面产生了什么影响？简单起见，忽略非共振背景的散射，令 $\mathcal{S}_{0N'N}$ 等于 $\delta_{N'N}$ ；稍后我们将回到更普遍的情况。那么，对于上节所描述的两体离散质心态，方程(3.8.11)变为：

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{j'\sigma'\ell's'n',j\sigma\ell sn}(E) &= \delta_{j'j} \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{\ell'\ell} \delta_{s's} \delta_{n'n} \\ &\quad - i \frac{\Gamma}{E - E_R - i\Gamma/2} \sum_r u_{j'\sigma'\ell's'n'}^{(r)} u_{j\sigma\ell sn}^{(r)*}. \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

在任何情况下，标记 r 包含给出共振态总角动量 z -分量的指标 σ_R ；对于总角动量为 j_R 的共振态， σ_R 取 $2j_R + 1$ 个值。如果没有其它的简并性，那么 r 仅标记 σ_R 的值，并且

$$u_{j\sigma\ell sn}^{(\sigma_R)} = \delta_{j_R;j} \delta_{\sigma_R;\sigma} u_{\ell sn}, \quad (3.8.13)$$

其中 $u_{\ell sn}$ 是一组（由于Wigner-Eckart定理）独立于 σ 的复振幅。现在方程(3.8.12)所给出由方程(3.7.7)定义的振幅 S^j 为

$$S_{\ell's'n',\ell sn}^j(E) = \delta_{\ell',\ell} \delta_{s's} \delta_{n'n} - i \delta_{j,j_R} \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} u_{\ell's'n'} u_{\ell sn}^*. \quad (3.8.14)$$

另外, 方程(3.8.10)现在变为

$$\sum_{\ell sn} |u_{\ell sn}|^2 + \cdots = 1 \quad (3.8.15)$$

其中省略号代表任何包含三个或多个粒子态的正定贡献。正如我们将看到的, 量 $|u_{\ell sn}|^2$ 解释了共振态衰变到不同的可及两体态的分支比。

方程(3.7.12)现在给出了在道 n 中所有反应的总截面:

$$\sigma_{\text{total}}(n; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma \Gamma_n}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (3.8.16)$$

其中

$$\Gamma_n \equiv \Gamma \sum_{\ell s} |u_{\ell sn}|^2. \quad (3.8.17)$$

这是著名的Breit-Wigner单能级公式版本²⁷。我们也能用这些公式计算从初态两体道 n 到末态两体道 n' 的共振散射截面。在方程(3.7.10)中利用方程(3.8.14)给出

$$\sigma(n \rightarrow n'; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma_n \Gamma_{n'}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (3.8.18)$$

这证明了共振态衰变到终态两体道之一 n' 的几率正比于 $\Gamma_{n'}$ 。根据方程(3.8.15), Γ_n 的和(包含来自有三个以上粒子态的贡献)恰好等于总衰变速率 Γ , 所以我们可以得出结论: Γ_n 正是共振态衰变到道 n 的速率。

在方程(3.8.16)和(3.8.18)中, 我们看到特征共振峰在 E_R 处, 且宽度(半峰值处的总宽度)等于衰变速率 Γ 。(单个 Γ_n 通常称为分宽度。)由于 $\Gamma_n \leq \Gamma$, 共振峰处的总截面粗略地被波长平方, $(2\pi/k)^2$, 所约束。这个规则, 即单个共振处的截面粗略地被波长平方所约束, 即使在经典物理中也是适用的(其中能量守恒扮演这里的么正角色), 例如声波与海中泡沫的共振相互作用, 或者引力波与引力波天线的共振相互作用。(在后一种情况中, 任何实验室质量通过引力波辐射来损失它们能量的振荡分支比很小, 所以即使在共振峰处截面也远小于波长平方²⁸。)

顺便提一下, 通常共振是被探测到的, 但能量测量不足以精细到决定它的宽度。在这种情况下, 实验可测的是总截面沿共振峰的积分。对于总截面(3.8.16), 这是

$$\int \sigma_{\text{total}}(n; E) dE = \frac{2\pi^2(2j_R + 1)\Gamma_n}{k_R^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)}. \quad (3.8.19)$$

这样的实验只能揭示出共振态衰变到初态粒子的分宽度, 而不是总宽度或分支比。

当自旋 z -分量给定的共振态构成由某些对称群所关联的多重态时, 也可使用这个形式体系。例如, 在同位旋对称性被遵守的程度上, 对于总同位旋 T_R 的共振, 指标 r 所标记的共振态不仅包含对角动量 z 分量 σ_R 的指定, 还包含对同位旋 3 -分量 t_R 的指定, 其取值 $-T_R, -T_R + 1, \cdots, T_R$ 。在这种情况下, 之上对于总截面和分截面的结果没有变化, 这是因为每个两体道 n 有两个粒子同位旋 z -分量明确的值 t_1, t_2 , 因而仅能与 t_R 为值 $t_1 + t_2$ 的共振态耦合。这里的分宽度 Γ_n 仅通过因子 $C_{T_1, T_2}(T_R, t_R; t_1, t_2)^2$ 与 t_1 和 t_2 相关。

共振的存在体现在共振附近相移的特征行为。回到普遍公式(3.8.11)(但仍令 $\mathcal{S}_0 = 1$), 从方程(3.8.10)中, 我们看到对于每一单独的共振态 r , 存在 $\mathcal{S}_{N'N}(E)$ 的本征矢 $u_N^{(r)}$, 其本征值为

$$\exp(2i\delta^{(r)}(E)) = 1 - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2}$$

或者另一种形式,

$$\tan \delta^{(r)}(E) = -\frac{\Gamma/2}{E - E_R}. \quad (3.8.20)$$

我们看到在围绕共振能量的 Γ 阶能量范围之外,“本征相位” $\delta^{(r)}(E)$ 从共振之下的值 $\nu\pi$ (ν 是一整数)跳到共振之上的值 $(\nu+1)\pi$ 。然而,为了用这个结果对反应速率进行讨论,我们需要知道本征矢 $u_N^{(r)}$,然而一般而言,其分量有任意个动量、自旋和种类不同的粒子。

当处在某个特定道 N 中的粒子被禁止(通常由于守恒率)跃迁到任意其它的道时,这些结果在这些特殊情况下有用的多。在这个假定下,不难将非共振背景散射矩阵 \mathcal{S}_0 包含进普遍结果(3.8.11)中。为了使 $\mathcal{S}_{N'N}$ 对于某些特殊的 N 以及所有的 $N' \neq N$ 为零, $\mathcal{S}_{0N'N}$ 同样是这样是必须的,并且对于任何 $u_N^{(r)} \neq 0$ 的 r , $u_{N'}^{(r)}$ 也是如此。那么,么正性要求(3.8.5)要求对于这个 N

$$\mathcal{S}_{0N'N} = \exp(2i\delta_{0N})\delta_{N'N}$$

而方程(3.8.10)要求

$$u_N^{(r)*} u_N^{(s)} = \delta_{rs},$$

使得方程(3.8.11)中只有一项 r ,其 $u_N^r \neq 0$ 。在这种情况下,方程(3.8.11)给出

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{N'N}(E) &= \delta_{N'N} \left[1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \right] \exp(2i\delta_{0N}) \\ &\equiv \delta_{N'N} \exp(2i\delta_N(E)) \end{aligned}$$

以及总相移

$$\delta_N(E) = \delta_{0N} - \arctan \left(\frac{\Gamma/2}{E - E_R} \right). \quad (3.8.21)$$

我们看到在围绕共振能量 E_R 的 Γ 阶能量范围之外,相移 $\delta_N(E)$ 从共振之下的值 δ_{0N} 跳到共振之上的值 $\delta_{0N} + \pi$ 。例如,我们在上一节所看到的,在不同的两体反应中,诸如 π 介子- π 介子和 π 介子-核子在能量低于产生额外 π 介子的阈值时的散射,这些假定是满足的,其中 N 兼容总角动量和轨道角动量 j, ℓ (对于 π 介子- π 介子散射, $j = \ell$),以及总角动量的 z -分量 σ ,总的同位旋 T 和它的 3 -分量 t 。Wigner-Eckart定理允许相移依赖于 j, ℓ ,以及 T ,而不依赖于 t 或 σ 。在这些道中有一些著名的共振:在 π 介子- π 介子散射中,在770MeV处有一共振,称为 ρ ,其 $j = \ell = 1, T = 1$,且 $\Gamma = 150$ MeV;在 π 介子-核子散射中,在1232MeV处有一共振,称为 Δ ,其 $j = \frac{3}{2}, \ell = 1, T = \frac{3}{2}$,且 $\Gamma = 110$ 至120MeV。

对方程(3.7.12)或方程(3.7.18)的考察显示了,当共振相移穿过 $\pi/2$ (或 $\pi/2$ 的奇数倍),总截面到达峰值。非共振相移一般相当小,所以正如我们之前所看到的,当相移 δ_ℓ 穿过 $\pi/2$, σ_{total} 在能量接近 E_R 的地方会显示出一个尖锐的峰。然而,有时非共振背景相移 δ_{0N} 接近 $\pi/2$,在这种情况下,当相移经由 π 升至 E_R 附近,截面会显示出一个大幅下降,这是由于共振背景振幅与非共振背景振幅之间的相消干涉。这样的下降首次由Ramsauer(冉绍耳)和Townsend(汤森德)²⁹在1972年观测到,是在电子在惰性气体原子上的散射中看到的。

参考文献

- [1] 更多的细节参看, M. L. Goldberger and K. M. Watson, *Collision Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1964); R. G. Newton, *Scattering theory of Waves and Particles*, 2nd edn (Springer-Verlag, New York, 1982).

- [1a] B. Lippmann and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **79**, 469 (1950).
- [2] J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52**, 1107 (1937); W. Heisenberg, *Z. Phys.* **120**, 513 672 (1943).
- [3] M. Born, *Z. Phys.* **37**, 863 (1926); **38**, 803 (1926).
- [4] C. Møller, *Kgl. Danske Videnskad. Mat. Fys. Medd.* **23**, No. 1 (1945); **22**, No. 19 (1946).
- [5] G. D. Rochester and C. C. Butler, *Nature* **160**, 855 (1947). 一个历史回顾,参看G. D. Rochester, *Pions to Quarks – Particle Physics in the 1950s* L. M. Brown, M. Dresden, and L. Hoddeson编辑(Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989).
- [6] G. Breit, E. U. Condon, and R. S. Present, *Phys. Rev.* **50**, 825 (1936); B. Cassen and E. U. Condon *Phys. Rev.* **50**, 846 (1936); G. Breit and E. Feenberg, *Phys. Rev.* **50**, 850 (1936).
- [7] M. A. Tuve, N. Heydenberg, and L. R. Hafstad, *Phys. Rev.* **50**, 806 (1936).
- [8] M. Gell-Mann, Cal. Tech. Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (1961); *Phys. Rev.* **125**, 1067 (1962); Y. Ne’eman *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961).
- [9] 可参看A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1957): 第3章(其中 $C_{j_1 j_2}(jm; m_1 m_2)$ 被记为 $(j_1 j_2 j m | j_1 m_1 j_2 m_2)$); M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957):Chapter III (其中 $C_{j_1 j_2}(jm; m_1 m_2)$ 被记为 $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$).
- [10] G. Feinberg and S. Weinberg, *Nuovo Cimento Serie X*, **14**, 571 (1959).
- [11] W. Chinowsky and J. Steinberger, *Phys. Rev.* **95**, 1561 (1954); 另见B. Ferretti, *Report of an International Conference on Fundamental Particles and Low Temperatures, Cambridge. 1946* (The Physical Society, London, 1947).
- [12] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).
- [13] C. S. Wu *et al.*, *Phys. Rev.* **88**, 1163 (1952).
- [14] R. Garwin, L. Lederman, and M. Weinrich, *Phys. Rev.* **105**, 1415 (1957); J. I. Friedman and V. L. Telegdi, *Phys. Rev.* **105**, 1681 (1957).
- [15] K. M. Waston, *Phys. Rev.* **88**, 1163 (1952).
- [16] M. Gell-Mann and A. Pais, *Phys. Rev.* **97**, 1387 (1955); 另见A. Pais and O. Piccioni, *Phys. Rev.* **100**, 1487 (1955).
- [17] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Phys. Rev. Letters* **13**, 138 (1964).
- [18] K. R. Schubert *et al.*, *Phys. Lett.* **31B**, 662 (1970). 这篇文献在不假定CPT不变的情况下分析中性K介子的数据,并发现CPT守恒且T破坏的CP-破坏振幅部分的实部与虚部有5的标准偏差,而T守恒且CPT破坏的部分的标准偏差在零以内。

-
- [19] R. H. Dalitz, *Phil. Mag.* **44**, 1068 (1953); 另见E. Fabri, *Nuovo. Cimento* **11**, 479 (1954).
- [20] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1953).
- [21] 参看L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 1st edn (McGraw-Hill, New York, 1949):Section 19.
- [22] 这首先是在经典电动力学中证明的。参看H. A. Kramers, *Atti Congr. Intern. Fisici, Como, 1927*; 英语的翻印版为H. A. Kramers, *Collected Scientific Papers* (North-Holland, Amsterdam, 1956).量子力学中的证明, 参看E. Feenberg, *Phys. Rev.* **40**, 40 (1932); N. Bohr, R. E. Peierls, and G.Placzek, *Nature* **144**, 200 (1939).
- [23] 这个讨论的一个推广版本, 在杨振宁和杨振平20世纪60年代后期一个未发表的工作中给出。另见A. Aharony, *Modern Development in Thermodynamics* (Wiley, New York, 1973): pp. 95-114, 以及那里的参考文献。
- [24] 可参看A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957): Chapter 2; M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957): Appendix III; L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics - Non Relativistic Theory*, 3rd edn (Pergamon Press, Oxford, 1977): Section 28.
- [25] E. P. Wigner, *Gruppentheorie* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931); C. Eckart, *Rev. Mod. Phys.* **2**, 305 (1930).
- [26] M. Froissart, *Phys. Rev.* **123**, 1053 (1961).
- [27] G. Breit and E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **49**, 519 (1936).
- [28] 参看S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Section 10.7.
- [29] R. Kollath, *Phys. Zeit.* **31**, 985 (1931).

第 4 章 集团分解原理

直到现在，我们并没有过多的讨论哈密顿量算符 H 的细致结构。通过给出有任意个粒子的态之间该算符的矩阵元，我们可以定义它。等价地，正如我们所要呈现的，任何这样的算符可以表达为特定算符的函数，这些特定算符产生或湮灭单个的粒子。我们在第1章看到，这样的产生湮灭算符首先是在量子力学早期，电磁场和其它场的正则量子化中遇到的。对于那些能够产生或湮灭光子以及有质量粒子的理论，它们提供了一个自然的形式体系，这样的理论始于20世纪30年代早期Fermi的 β -衰变理论。

然而，用产生和湮灭算符构建哈密顿量有一深层次原因，尽管这超出了量子化类似电磁场这样预先存在的场的需要，并与粒子是否真的能够被产生或消灭无关。这一形式体系的巨大优点是，如果我们将哈密顿量表达成产生和湮灭算符之积的和，并有一个不奇异的恰当系数，那么 S -矩阵将满足一个关键的物理要求，集团分解原理¹，这个原理实际上是说相距甚远的实验所产生的结果是不相关的。诚然，正是由于这个原因，产生和湮灭算符的形式体系才广泛应用在非相对论量子统计力学中，其中粒子数一般是固定的。在相对论量子理论中，集团分解原理在使场论是必然中充当了关键部分。曾有很多尝试，公式化一个相对论不变理论却不用定域场论，对于两体散射，确实可能构建出一个非场论的理论却依旧得出一个Lorentz不变的 S -矩阵²，但是这样的努力总在超过两个粒子的区域陷入困境：要么3-粒子的 S -矩阵不是Lorentz不变的，要么它违反了集团分解原理。

在本章中，我们将首先讨论包含任意个玻色子和费米子态的基，然后定义产生湮灭算符，最后展示它们是怎样帮助构建哈密顿量，而这个哈密顿量产生的 S -矩阵是满足集团分解条件的。

4.1 玻色子与费米子

物理态的Hilbert空间是由包含 $0, 1, 2, \dots$ 个自由粒子的态张开的。它们可以是自由粒子态，亦或“入”态，亦或“出”态；明确起见，我们在这里使用自由粒子态 $\Phi_{\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2, \dots}$ ，但是我们的所有结果等价地适用于“入”态或“出”态。像以往一样， σ 标记自旋 z -分量（对于有质量粒子则是螺旋度），而 n 标记粒子种类。

我们现在必须研究第3章所忽略的东西；这些态的对称性。据我们所知，所有的粒子不是玻色子就是费米子，差异是：一个态在两个全同玻色子的交换下不变，而在两个全同费米子的交换下差一个符号。即

$$\Phi_{\dots \mathbf{p} \sigma n \dots \mathbf{p}' \sigma' n' \dots} = \pm \Phi_{\dots \mathbf{p}' \sigma' n' \dots \mathbf{p} \sigma n \dots} \quad (4.1.1)$$

如果 n 是一个玻色子则是正号，是费米子则是负号，而省略号代表可以出现在该态中的其它粒子。（等价地，这可以陈述为“波函数”上的条件，即物理允许态矢中这些多粒子基矢的系数。）这两种情况通常指代为玻色或费米“统计”。在下一章我们将看到，对于整数自旋或半整数自旋的粒子，玻色统计和费米统计相应是唯一的可能，但在本章中我们不需要这个信息。在本节，

我们的讨论不是很严格，所有的粒子都必须是玻色子或费米子，并且所设立的归一化条件是针对多玻色子态或多费米子态。

首先注意到，如果两个粒子分别有动量和自旋 \mathbf{p}, σ 以及 \mathbf{p}', σ' ，而属于同一种类 n ，那么态矢 $\Phi_{\dots \mathbf{p} \sigma n \dots \mathbf{p}' \sigma' n \dots}$ 与 $\Phi_{\dots \mathbf{p}' \sigma' n \dots \mathbf{p} \sigma n \dots}$ 代表同一物理态；如果不是这种情况，粒子可以通过在态矢标记中的序列被区分出来，首先列出来的与其次列出来的不是等同的。既然两个态矢在物理上是不可区分的，它们必属于同一射线，因而

$$\Phi_{\dots \mathbf{p} \sigma n \dots \mathbf{p}' \sigma' n \dots} = \alpha_n \Phi_{\dots \mathbf{p}' \sigma' n \dots \mathbf{p} \sigma n \dots}, \quad (4.1.2)$$

其中 α_n 是绝对值为1的复数。我们可以认为这是所谓全同粒子定义的一部分。

问题的关键是决定相因子 α_n 取决于什么。如果它仅仅依赖与种类指标 n ，那么我们已经近乎完成了。在方程(4.1.2)中再一次交换两个粒子，我们发现

$$\Phi_{\dots \mathbf{p} \sigma n \dots \mathbf{p}' \sigma' n \dots} = \alpha_n^2 \Phi_{\dots \mathbf{p} \sigma n \dots \mathbf{p}' \sigma' n \dots}$$

这使得 $\alpha_n^2 = 1$ ，表明方程(4.1.1)正是唯一的两种可能性。

α_n 还能依赖于什么呢？它可能依赖于态中其它粒子的数目与种类（由方程(4.1.1)和(4.1.2)中的省略号所标记），但是这会导致一个糟糕的结果，这里在地球上的态矢在粒子交换下的对称性可能依赖于宇宙别处粒子的存在。这类被集团分解原理所排除的事情将在本章稍后讨论。相位 α_n 不能与被交换粒子的自旋有任何不平庸的关系，这是因为，如果这样，那么这些自旋相关的相位因子将构成旋转群的一个表示，而三维旋转群的非平庸表示没有一个是一维的——即，相位因子。不难想到相位 α_n 可能依赖于所交换的两粒子的动量，但是Lorentz不变性要求 α_n 仅依赖于标量 $p_1^\mu p_{2\mu}$ ；这是在粒子1和粒子2交换下的对称性，因而这类不改变幅角的依赖性将导致结论 $\alpha_n^2 = 1$ 。

之上讨论的逻辑破绽是（尽管我们的符号掩盖了事实）态 $\Phi_{\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2, \dots}$ 可能携带一个依赖于路径的相位因子，这一路径处在动量空间中将粒子动量带至值 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$,等。在该情况下，两次两个粒子的交换也许会通过一个相位因子改变态，使得 $\alpha_n^2 \neq 1$ 。在9.7节我们将看到二维空间中这是一种真实的可能性，对于三维及其以上的空间则不是。

交换属于不同种类的粒子会怎样呢？如果我们想，我们可以通过从起初标记态矢时，先排列所有光子动量和螺度，然后再排列所有电子动量和自旋 z -分量，一直做下去直到经过所有的基本粒子类型，通过这一方法我们可以避免这一问题。或者，我们可以允许粒子指标以任何次序出现，并定义粒子指标顺序任意的态矢等价于粒子指标是某种标准排序的态矢乘以相因子，这个相因子对所交换的两个不同种类粒子的依赖关系是什么都行。为了处理类似同位旋这样与不同种类的粒子相关的对称性，采取如下推广方程(4.1.1)的约定是方便的：在任何情况下，无论粒子的种类是否相同，态矢将取为，在任意玻色子之间的交换下，或者在任意玻色子与任意费米子之间的交换下是对称的，而在任意两个费米子之间的交换下是反对称的*。

这些态归一化的定义必须与那些对称性条件一致。为了节省书面，我们将使用一个指标 q 标记一个单粒子的所有量子数：它的动量 \mathbf{p} ，自旋 z -分量（或者，针对有质量粒子的螺度） σ ，以

*事实上，由于相同的原因，在种类相同但螺度或者自旋 z -分量不同的粒子的交换下，态矢的对称性或反对称性是一个纯粹的约定，这是因为从开始我们就可以约定，将螺度为1的光子动量排在第一位，接着是所有螺度为-1的光子的动量，接着是所有自旋 z -分量为 $+\frac{1}{2}$ 的电子的动量，以此类推。我们采取约定：态矢在自旋 z -分量或螺度不同的全同玻色子或费米子的交换下是对称或反对称的，这是为了方便旋转不变性的使用。

及种类 n 。 N -粒子态因而被记为 $\Phi_{q_1 \dots q_N}$ 。（对于真空态 Φ_0 ， $N = 0$ 。）对于 $N = 0$ 以及 $N = 1$ ，对称性问题不存在：这时我们有

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1 \quad (4.1.3)$$

以及

$$(\Phi_{q'}, \Phi_q) = \delta(q' - q), \quad (4.1.4)$$

其中 $\delta(q' - q)$ 是粒子量子数的所有 δ -函数与克罗内克 δ -符号的乘积，

$$\delta(q' - q) \equiv \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\sigma' \sigma} \delta_{n' n}. \quad (4.1.5)$$

另一方面，对于 $N = 2$ ，态 $\Phi_{q'_1 q'_2}$ 与 $\Phi_{q'_2 q'_1}$ 物理上相同，所以在这里我们必须取

$$\left(\Phi_{q'_1 q'_2}, \Phi_{q_1 q_2} \right) = \delta(q'_1 - q_1) \delta(q'_2 - q_2) \pm \delta(q'_2 - q_1) \delta(q'_1 - q_2) \quad (4.1.6)$$

符号 \pm 是，如果所有的粒子是费米子则是 $-$ 号，否则是 $+$ 号。这显然与之上所陈述的态的对称性一致。更普遍地，

$$\left(\Phi_{q'_1 q'_2 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \right) = \delta_{NM} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\mathcal{P}i}). \quad (4.1.7)$$

这里是对整数 $1, 2, \dots, N$ 的所有置换 \mathcal{P} 求和。（例如，在方程(4.1.6)中的第一项， \mathcal{P} 是其本身， $\mathcal{P}1 = 1, \mathcal{P}2 = 2$ ，而在第二项 $\mathcal{P}1 = 2, \mathcal{P}2 = 1$ 。）另外， $\delta_{\mathcal{P}}$ 是一符号因子，如果 \mathcal{P} 包含费米子的一个奇置换（奇数次的费米子交换）则等于 -1 ，否则等于 $+1$ 。很容易看到，在 q_i 的交换下，或者在 q'_j 的交换下，方程(4.1.7)有着所需的对称性质和反对称性质。

4.2 产生和湮灭算符

产生和湮灭算符的定义形式可以是它们在上节所讨论的归一化多粒子态上的效应。产生算符 $a^\dagger(q)$ （或者更详细些， $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)$ ）定义为在态的粒子排列的前面增加一个粒子的算符，该粒子的量子数为 q

$$a^\dagger(q) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \equiv \Phi_{q q_1 q_2 \dots q_N}. \quad (4.2.1)$$

特别地，通过用 N 个产生算符作用在真空态上可以获得 N -粒子态

$$a^\dagger(q_1) a^\dagger(q_2) \dots a^\dagger(q_N) \Phi_0 = \Phi_{q_1 \dots q_N}. \quad (4.2.2)$$

习惯称这个算符为 $a^\dagger(q)$ ；它的共轭，写为 $a(q)$ ，可以从方程(4.1.7)中计算出来。正如我们现在所要显示的， $a(q)$ 从它所作用的态中移除一个粒子，因而被称为湮灭算符。特别地，当粒子 $q q_1 \dots q_N$ 全是玻色子或全是费米子时，我们有

$$a(q) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} = \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \delta(q - q_r) \Phi_{q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}, \quad (4.2.3)$$

其中，对于玻色子或费米子分别是 $+1$ 或 -1 。（下面是证明。我们希望计算 $a(q) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}$ 与任意态 $\Phi_{q'_1 \dots q'_M}$ 的标量积。利用方程(4.2.1)，其是

$$\left(\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, a(q) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \right) \equiv \left(a^\dagger(q) \Phi_{q'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \right) = \left(\Phi_{q q'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \right).$$

我们现在使用方程(4.1.7)，对 $1, 2, \dots, N$ 的置换的求和可以写为对被置换到第一个位置上的整数 r 的求和，即 $\mathcal{P} = 1$ ，和对剩余整数 $1, \dots, r-1, r+1, \dots, N$ 到 $1, \dots, N-1$ 的映射 $\bar{\mathcal{P}}$ 求和。更进一步，符号因子是

$$\delta_{\mathcal{P}} = (\pm)^{r-1} \delta_{\bar{\mathcal{P}}}$$

其中，对于玻色子和费米子分别是正号和负号。因此使用方程(4.1.7)两次，

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, a(q) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \right) &= \delta_{N, M+1} \\ &\times \sum_{r=1}^N \sum_{\bar{\mathcal{P}}} (\pm)^{r-1} \delta_{\bar{\mathcal{P}}} \delta(q - q_r) \prod_{i=1}^M \delta(q'_i - q_{\bar{\mathcal{P}}i}) \\ &= \delta_{N, M+1} \sum_{r=1}^N (\pm)^{r-1} \delta(q - q_r) \left(\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N} \right). \end{aligned}$$

因此，方程(4.2.3)的两边与任意的态 $\Phi_{q'_1 \dots q'_M}$ 有相同的矩阵元，因而是相等的，这正是所要证明的。) 作为方程(4.2.3)的一种特殊情况，我们注意到对于玻色子和费米子， $a(q)$ 均湮灭真空

$$a(q) \Phi_0 = 0. \quad (4.2.4)$$

正如这里所定义的，产生算符和湮灭算符满足一个重要的对易或反对易关系。应用算符 $a(q')$ 于方程(4.2.1)并利用方程(4.2.3)给出

$$\begin{aligned} a(q') a^\dagger(q) \Phi_{q_1 \dots q_N} &= \delta(q' - q) \Phi_{q_1 \dots q_N} \\ &+ \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+2} \delta(q' - q_r) \Phi_{q q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}. \end{aligned}$$

(因为 q_r 处在 $\Phi_{q q_1 \dots q_N}$ 中的第 $r+1$ 个位置，所以第二项中的符号是 $(\pm)^{r+2}$ 。) 另一方面，将算符应用于方程(4.2.3)给出

$$a^\dagger(q) a(q') \Phi_{q_1 \dots q_N} = \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \delta(q' - q_r) \Phi_{q q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}.$$

相减或相加，那么我们有

$$\left[a(q') a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q) a(q') \right] \Phi_{q_1 \dots q_N} = \delta(q' - q) \Phi_{q_1 \dots q_N}.$$

这对所有的态 $\Phi_{q_1 \dots q_N}$ 均成立（并且很容易看到对于既包含玻色子又包含费米子的态也成立），因而暗示着算符关系

$$a(q') a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q) a(q') = \delta(q' - q). \quad (4.2.5)$$

另外，方程(4.2.2)立即给出

$$a^\dagger(q') a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q) a^\dagger(q') = 0 \quad (4.2.6)$$

以及

$$a(q') a(q) \mp a(q) a(q') = 0. \quad (4.2.7)$$

一如往常，上面的符号和下面的符号分别应用于玻色子和费米子。根据上一节所讨论的约定。对于两个不同种类的粒子，如果有一个粒子是玻色子，那么产生算符和/或湮灭算符对易，如果均是费米子则反对易。

之上的讨论可以以逆序呈现（在大多数教科书中通常是这样的）。即，我们可以从对易或反对易关系——方程(4.2.5)—(4.2.7)出发，从某些给定场论的正则量子化导出。那么，多粒子态将由方程(4.2.2)定义，并且，从对易或反对易关系导出它们的标量积——方程(4.1.7)。事实上，正如第1章所讨论的，这样的处理更接近历史发展的形式体系。我们在这里沿着非历史的途径是因为我们想摆脱对预先存在的场论的依赖，而更希望理解场论为什么是它们所呈现的形式。

我们现在要证明本章开头所引述的基本定理：任何算符 \mathcal{O} 可以表示为产生和湮灭算符之积的和

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \cdots dq'_N dq_1 \cdots dq_M \\ & \times a^\dagger(q'_1) \cdots a^\dagger(q'_N) a(q_M) a(q_1) \\ & \times C_{NM}(q'_1 \cdots q'_N q_1 \cdots q_M) . \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

即，我们希望证明对系数 C_{NM} 的选择可以给予表达式的矩阵元以任意所需的值。我们通过数学归纳法实现它。首先，很平庸地，不考虑 $N > 0$ 和/或 $M > 0$ 的 C_{NM} 的值，通过合适的选择 C_{00} ，我们可以给 $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0)$ 任何所需的值。仅需方程(4.2.4)，我们看到方程(4.2.8)有真空期望值

$$(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0) = C_{00} .$$

现在假定，若 $N < L, M \leq K$ 或 $N \leq L, M < K$ ，对于所有 N -粒子态和 M -粒子态之间 \mathcal{O} 的矩阵元，这也是成立的；即，通过对相应系数 C_{NM} 的合适选择，已经赋予了这些矩阵元一些所需的值。为了看到，如果这样，那么对于任何 L -粒子态和 K -粒子态之积 \mathcal{O} 的矩阵元，这也是正确的，利用方程(4.2.8)计算

$$\begin{aligned} (\Phi_{q'_1 \cdots q'_L}, \mathcal{O}\Phi_{q_1 \cdots q_K}) = & L!K!C_{LK}(q'_1 \cdots q'_L q_1 \cdots q_K) \\ & + \text{包含 } C_{NM} \text{ 的项, 其中 } N < L, M \leq K \text{ 或 } N \leq L, M < K . \end{aligned}$$

无论给了 $N < L, M \leq K$ 或 $N \leq L, M < K$ 的 C_{NM} 什么值，显然存在一些 C_{LK} 的选择，其给出这个矩阵元任何所需的值。

当然，一个算符不需要一定以(4.2.8)中的形式表示，其中所有的产生算符处在所有湮灭算符的左边。（这通常称为该算符的“规范”序列。）然而，如果对于某些算符，这个公式以某种不同的方式排列产生和湮灭算符，通过重复使用对易或反对易关系，从方程(4.2.5)中的 δ -函数挑出新的项，我们总可以将产生算符放至湮灭算符的左边。

例如，考察任何形式的加法算符 F （像动量，荷，等），其有

$$F\Phi_{q_1 \cdots q_N} = (f(q_1) + \cdots + f(q_N))\Phi_{q_1 \cdots q_N} . \quad (4.2.9)$$

这样的算符可以写成方程(4.2.8)中那样，但仅使用 $N = M = 1$ 的项即可：

$$F = \int dq a^\dagger(q) a(q) f(q) . \quad (4.2.10)$$

特别地，自由粒子哈密顿量总是

$$H_0 = \int dq a^\dagger(q)a(q)E(q) \quad (4.2.11)$$

其中 $E(q)$ 是单粒子能量 σ

$$E(\mathbf{p}, \sigma, n) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2} .$$

对于不同的对称性，我们将需要产生算符和湮灭算符的变换性质。首先，考察非齐次固有正时Lorentz变换。回忆 N -粒子态所有的Lorentz变换性质

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, \alpha)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2, \dots} &= e^{-i(\Lambda p_1)\cdot\alpha} e^{-i(\Lambda p_2)\cdot\alpha} \\ &\dots \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \\ &\times \sum_{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} D_{\bar{\sigma}_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \\ &\dots \Phi_{\mathbf{p}_{1\Lambda}\bar{\sigma}_1n_1, \mathbf{p}_{2\Lambda}\bar{\sigma}_2n_2, \dots} . \end{aligned}$$

这里的 \mathbf{p}_Λ 是 Λp 的3-矢部分， $D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(R)$ 是2.5节所使用的三维旋转群的自旋- j 么正表示，而 $W(\Lambda, p)$ 是特定旋转

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) ,$$

其中 $L(p)$ 是使质量为 m 的粒子从静止到4-动量 p^μ 的标准“推动”。（当然， m 和 j 依赖于种类指标 n 。对于 $m \neq 0$ ，这是全部；在下一章我们将回到无质量粒子的情况。）现在，这些态可以像方程(4.2.2)中那样表示

$$\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2, \dots} = a^\dagger(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)\dots\Phi_0 ,$$

其中 Φ_0 是Lorentz不变真空态

$$U_0(\Lambda, a)\Phi_0 = \Phi_0 .$$

为了使态(4.2.2)正确的变换，产生算符有如下充要变换规则

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, a)a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda, a) &= e^{-i(\Lambda p)\cdot\alpha} \sqrt{(\Lambda p)^0/p_0} \\ &\times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda \bar{\sigma} n) . \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

以同样的方式，引起自由粒子态*上的荷共轭变换，空间反演变换以及时间反演变换的算符 C ， P 和 T ，对产生算符的变换是：

$$Ca^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)C^{-1} = \xi_n a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n^c) , \quad (4.2.13)$$

$$Pa^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)P^{-1} = \eta_n a^\dagger(-\mathbf{p}\sigma n) , \quad (4.2.14)$$

*我们省略了这些算符的下标“0”，这是因为在所有 C ， P 和/或 T 守恒的实际情况下，在“入”态和“出”态上引起这些变换的算符与那些通过在自由态上的作用所定义的算符是相同的。对于连续Lorentz变换不是这种情况，因而有必要区分算符 $U(\Lambda, a)$ 和 $U_0(\Lambda, a)$ 。

$$\mathsf{T}a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)\mathsf{T}^{-1} = \zeta_n(-1)^{j-\sigma}a^\dagger(-\mathbf{p} - \sigma n), \quad (4.2.15)$$

正如上一节所提及的，尽管我们所处理的算符是产生和湮灭自由态中的粒子，但正个形式体系可以应用于“入”态和“出”态，在这种情况下，我们将引入算符 a_{in} 与 a_{out} ，其通过它们在这些态上的作用以相同的方式定义。这些算符满足类似方程(4.2.15)的Lorentz变换规则，但用真正的Lorentz变换算符 $U(\Lambda, a)$ 替换自由粒子算符 $U_0(\Lambda, a)$ 。

4.3 集团分解和连接振幅

空间距离充分远的实验结果不相关，这是物理（诚然，也是所有科学）的基本原理之一。在Fermilab（费米实验室）所测量的各种碰撞的几率不应与CERN在该时刻所做的实验相关。如果这个原理不成立，那么在不知道宇宙所有详情的情况下，我们无法对任何实验做出预测。

在 S -矩阵理论中，集团分解原理陈述为，如果在 \mathcal{N} 个相距甚远的实验室中研究多粒子过程 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}} \rightarrow \beta_{\mathcal{N}}$ ，那么全部过程的 S -矩阵元可因式分解。即*，如果对于所有的 $i \neq j$ ，态 α_i 和 β_i 中的所有粒子与态 α_j 和 β_j 中的所有粒子相距甚远，那么

$$S_{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{\mathcal{N}}, \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{\mathcal{N}}} \rightarrow S_{\beta_1\alpha_1} S_{\beta_2\alpha_2} \cdots S_{\beta_{\mathcal{N}}\alpha_{\mathcal{N}}}. \quad (4.3.1)$$

S -矩阵元的这个因式分解将保证相应跃迁几率的因式分解，这对应于实验结果不相关。

有一组合学技巧使得我们可以以更明显的形式重写方程(4.3.1)。假定我们定义 S -矩阵的连接部分， $S_{\beta\alpha}^C$ ，为如下公式**

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\text{PART}} (\pm) S_{\beta_1\alpha_1}^C S_{\beta_2\alpha_2}^C \cdots \quad (4.3.2)$$

这里的求和是对将态 α 中的粒子分割进不同集团 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 的不同方法的求和，同样也要对将态 β 中的粒子分割进不同集团 β_1, β_2, \dots 的不同方法求和，其中，不计入对集团内部粒子的重排以及对整个集团的置换+号和-号分别是根据重排 $\alpha \rightarrow \alpha_1\alpha_2\cdots$ 和 $\beta \rightarrow \beta_1\beta_2\cdots$ 是包含偶数次的费米子交换还是奇数次的费米子交换。这里使用“连接”是因为 $S_{\beta\alpha}^C$ 的图形解释，每个图在微扰论中表示不同的贡献，这将在下一节讨论。

这是一个递推定义。对于每个 α 和 β ，方程(4.3.2)右边的求和包含 $S_{\beta\alpha}^C$ ，加上对两个或多个 S^C -矩阵元乘积的求和 Σ' ，这个求和中每个 α_j 态和 β_j 态中的粒子总数少于态 α 和 β 中的粒子数

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^C + \sum_{\text{PART}}' (\pm) S_{\beta_1\alpha_1}^C S_{\beta_2\alpha_2}^C \cdots$$

*我们在这里回到了第3章所使用的记法；希腊字母 α 或 β 代表粒子的集合，其中包括对每一粒子的动量，自旋以及种类的指定。另外， $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\mathcal{N}}$ 是结合态 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}}$ 中所有粒子形成的态，对于 $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\mathcal{N}}$ 同样如此。

**在经典统计力学中，Ursell（尤舍尔），Mayer（梅耶）和其他人已经使用过这个分解，而在量子统计力学中则是李政道，杨振宁与其他人³。它也被Goldstone（戈德斯通）⁴和Hugenholtz（胡根霍兹）⁵用来计算多体基态的能量。在所有的这些应用中，分离出Green函数，配分函数，预解等的连接部分的目的是，是客体对体积的依赖关系变得简单。这对于我们的目的也是显著的，这是因为，正如我们将看到的， S -矩阵连接部分的关键性质是它们正比于单动量守恒 δ -函数，而在一个盒子中，这个 δ -函数变成克罗内克 δ -符号乘以盒子体积。集团分解也是噪声理论⁶中将几个随机变量的关联函数分解成它的“累积量”所用的形式方法；如果随机变量接受了大量的 N 个独立涨落的贡献，那么每个累积量正比于 N 。

假定对求和中 S^C -矩阵元的选择,使得方程(4.3.2)对于总共所包含的粒子数少于 N 的态 β, α 成立。那么以这种方式,无论发现求和 Σ' 中的 S -矩阵元取何值,我们总能选择剩余项 $S_{\beta\alpha}^C$,使得方程(4.3.2)对于总共所包含的粒子数为 N 的态 α, β 成立[†]。因此方程(4.3.2)本身不包含任何信息;它仅是 S^C 的定义。

如果态 α 和 β 均由一个粒子组成,称其分别有量子数 q 和 q' ,那么方程(4.3.2)右边仅有一项,即 $S_{\beta\alpha}^C$ 本身,所以对于单粒子态

$$S_{q'q}^C \equiv S_{q'q} = \delta(q' - q). \quad (4.3.3)$$

(排除了可能的发散, $S_{q'q}$ 正比于 $\delta(q' - q)$ 是源于守恒率。方程(4.3.3)中没有比例因子是基于“入”态和“出”态相关相位的合适选择。)我们在这里假定单粒子态是稳定的,这使得单粒子态无法跃迁到任何其它态,诸如真空。

对于2-粒子态之间的跃迁,方程(4.3.2)变为

$$S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2} = S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}^C + \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2) \pm \delta(q'_1 - q_2)\delta(q'_2 - q_1). \quad (4.3.4)$$

(这里我们使用了方程(4.3.3)。)如果两个粒子都是费米子,符号 \pm 是 $-$,否则是 $+$ 。我们看出两个 δ -函数项加起来就是范数(4.1.6),所以这里的 $S_{\beta\alpha}^C$ 就是 $(S - 1)_{\beta\alpha}$ 。但是普遍情况更加复杂。

对于3-粒子态或4-粒子态之间的跃迁,方程(4.3.2)变为

$$\begin{aligned} S_{q'_1 q'_2 q'_3, q_1 q_2 q_3} &= S_{q'_1 q'_2 q'_3, q_1 q_2 q_3}^C \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)S_{q'_2 q'_3, q_2 q_3}^C \pm \text{置换} \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2)\delta(q'_3 - q_3) \pm \text{置换} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

以及

$$\begin{aligned} S_{q'_1 q'_2 q'_3 q'_4, q_1 q_2 q_3 q_4} &= S_{q'_1 q'_2 q'_3 q'_4, q_1 q_2 q_3 q_4}^C \\ &+ S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}^C S_{q'_3 q'_4, q_3 q_4}^C \pm \text{置换} \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)S_{q'_2 q'_3 q'_4, q_2 q_3 q_4}^C \pm \text{置换} \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2)S_{q'_3 q'_4, q_3 q_4}^C \pm \text{置换} \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2)\delta(q'_3 - q_3)\delta(q'_4 - q_4) \pm \text{置换}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

(对所有的置换计数,在方程(4.3.5)中总共有 $1 + 9 + 6 = 16$ 项,而在方程(4.3.6)中总共有 $1 + 18 + 16 + 72 + 24 = 131$ 项。如果我们没有假定单粒子态是稳定的,将会有更多的项。)正如先前所解释的, $S_{\beta\alpha}^C$ 的定义是递推的:对于2-粒子态,我们用方程(4.3.4)定义 $S_{\beta\alpha}^C$,然后,当我们定义3-粒子态的 $S_{\beta\alpha}^C$ 时,我们在方程(4.3.5)中使用这个定义,然后在方程(4.3.6)中使用这两个定义以获得4-粒子态 $S_{\beta\alpha}^C$ 的定义,以此类推。

定义 S -矩阵连接部分的关键点是,集团分解原理等价于当态 β 和/或 α 中有一个或多个粒子在空间上远离其它粒子时[‡], $S_{\beta\alpha}^C$ 必须为零的要求。为了看到这点,假定态 β 和 α 中的粒子被分成了

[†]这里应该提及专门性。仅当我们忽视方程(4.3.2)中存在一个或多个连接 S -矩阵元,其态 α_j 和 β_j 上均无粒子的可能性,这个讨论才是成立的。因而,我们必须定义连接真空-真空元 $S_{0,0}^C$ 为零。我们对于真空-真空 S -矩阵 $S_{0,0}$ 不使用方程(4.3.2),在没有时变外场的情况下,其定义为1, $S_{0,0} = 1$ 。在卷II中,我们将详细讨论有外场时的真空-真空振幅。

[‡]为了给出“远”的含义,我们将不得不对 $S_{\beta\alpha}^C$ 做Fourier变换,这使得每个3-动量指标 \mathbf{p} 被空间坐标3-矢 \mathbf{x} 替代。

集团 β_1, β_2, \dots 和 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ，并且对于 $i \neq j$ ，集合 $\alpha_i + \beta_i$ 中的所有粒子与集合 $\alpha_j + \beta_j$ 中的所有粒子相距甚远。那么，如果当态 β' 或 α' 中有任何粒子远离其它粒子时， $S_{\beta'\alpha'}^C$ 为零，则当态中有粒子处在不同集团时， $S_{\beta'\alpha'}^C$ 为零，所以定义(4.3.2)给出

$$S_{\beta\alpha} \rightarrow \sum^{(1)} (\pm) S_{\beta_{11}\alpha_{11}}^C S_{\beta_{12}\alpha_{12}}^C \cdots \sum^{(2)} (\pm) S_{\beta_{21}\alpha_{21}}^C S_{\beta_{22}\alpha_{22}}^C \cdots \times \cdots, \quad (4.3.7)$$

其中 $\Sigma^{(j)}$ 是对将集团 β_j 和 α_j 分解成子集团 $\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots$ 和 $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots$ 的不同方法求和。但是转回方程(4.3.2)，这正是所需的因式分解性质(4.3.1)。

例如，假定在4-粒子反应 $1234 \rightarrow 1'2'3'4'$ ，我们令粒子1, 2, 1'以及2'远离3, 4, 3'以及4'。那么如果当 β 和/或 α 中有任意粒子远离其它粒子时 $S_{\beta\alpha}^C$ 为零，方程(4.3.6)中唯一能留下来的项（以一种更加简略的记法）是

$$\begin{aligned} S_{1'2'3'4',1234} &\rightarrow S_{1'2',12}^C S_{3'4',34}^C \\ &\quad + (\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1}) S_{3'4',34}^C \\ &\quad + (\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}) S_{1'2',12}^C \\ &\quad + (\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1})(\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}). \end{aligned}$$

与方程(4.3.4)的比较说明这正是所需的因式分解条件(4.3.1)

$$S_{1'2'3'4',1234} \rightarrow S_{1'2',12}^C S_{3'4',34}^C.$$

我们已经在坐标空间中公式化集团分解原理为条件：如果态 β 或 α 中有任何粒子远离其它粒子，则 $S_{\beta\alpha}^C$ 为零。在动量空间重新表述ta对于我们来说将是方便的。坐标空间矩阵元定义为一个Fourier变换

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots}^C &\equiv \int d^3\mathbf{p}'_1 d^3\mathbf{p}'_2 \cdots d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \cdots S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}^C \\ &\quad \times e^{i\mathbf{p}'_1\cdot\mathbf{x}'_1} e^{i\mathbf{p}'_2\cdot\mathbf{x}'_2} \cdots e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2} \cdots. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

（我们在这里暂时扔掉紧随在动量指标或坐标指标之后的自旋指标和种类指标。）如果 $|S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}^C|$ 的行为充分好（具体些，是Lebesgue（勒贝格）可积的），那么根据Riemann-Lebesgue定理⁷，积分(4.3.8)在空间坐标的任意组合趋于无限大时为零。目前，这当然是一个过强的要求。平移不变形告诉我们， S -矩阵的连接部分，像 S -矩阵本身，可以仅与坐标矢量之差相关，因而如果所有的 x_i 和 x'_j 共同变换而保持差不变， S -矩阵的连接部分却根本不变。这要求在一个动量基下， S^C 的矩阵元，像 S 中的那些一样，必须正比于一个保证动量守恒的3-维 δ -函数（以及使 $|S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}^C|$ 不Lebesgue可积），和散射理论所要求的能量守恒 δ -函数。即，我们可以写出

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}^C &= \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \cdots - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \cdots) \\ &\quad \times \delta(E'_1 + E'_2 + \cdots - E_1 - E_2 - \cdots) C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

这是没有问题的：集团分解原理仅要求方程(4.3.8)在某些 \mathbf{x}_i 和/或 \mathbf{x}'_i 之差变得很大时为零。然而，如果方程(4.3.9)中的 C 本身包含一些额外的3-动量的线性组合的 δ -函数，那么这个原理将不

被满足。例如，假定 C 中有一 δ -函数要求对于粒子的某些子集， \mathbf{p}'_i 和 $-\mathbf{p}_j$ 之和为零。那么，如果对于该子集中的粒子， \mathbf{x}'_i 和 $-\mathbf{x}_j$ 共同运动（差不变）以致远离所有其它的 \mathbf{x}'_k 和 \mathbf{x}_ℓ ，方程(4.3.8)不变，这与集团分解原理相矛盾。那么，粗略地讲，集团分解原理就是说：不像 S -矩阵本身， S -矩阵的连接部分仅包含单个动量守恒 δ -函数。

为了使它精确些，我们可以说方程(4.3.9)中的系数函数 $C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\dots\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots}$ 是它动量指标的光滑函数。但是，怎样光滑？最直接的做法就是要求 $C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\dots\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots}$ 在所有 $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \dots = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \dots = 0$ 的动量处解析。当 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}' 中的一个与其它的 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}' 相距神，这个要求确实保证 $S_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\dots\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\dots}^C$ 以指数速度为零。然而， S^C 的指数衰减不是集团分解原理的显著部分，事实上，解析性的要求在所有理论中都没有遇到。最值得注意的是，在有无质量粒子的理论中， S^C 可以在一定的 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}' 值处有极点。例如，我们将在第10章看到，如果在跃迁 $1 \rightarrow 3$ 中发射一个无质量粒子，而在跃迁 $2 \rightarrow 4$ 中吸收它，那么 $S_{34,12}^C$ 将有一项正比于 $1/(p_1 - p_3)^2$ 。在Fourier变换后，这样的极点在 $S_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\dots\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\dots}^C$ 中所产生的项仅以坐标之差的负幂次衰减¹。这里没有必要如此严格地公式化集团分解原理以排除这样的行为。因此 S^C 上的“光滑”条件应该理解为，在一定的 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}' 值处允许各种极点以及分支切割，但不允许充当 δ -函数的奇异性。

4.4 相互作用的结构

我们现在问，什么样的哈密顿量会产生满足集团分解原理的 S -矩阵？这里正是产生和湮灭算符的形式体系的用武之地。答案被包含在如下的定理中， S -矩阵满足集团分解原理当（并且据我所知，仅当）哈密顿量可以表示成方程(4.2.8)中那样：

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \cdots dq'_N dq_1 \cdots dq_M \\
 & \times a^\dagger(q'_1) \cdots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \cdots a(q_1) \\
 & \times h_{NM}(q'_1 \cdots q'_N, q_1 \cdots q_M)
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

其中系数函数 h_{NM} 仅包含单个3-维动量守恒 δ -函数（在这里用回更加清晰的记法）

$$\begin{aligned}
 & h_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1 \cdots \mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1 \cdots \mathbf{p}_M\sigma_Mn_M) \\
 & = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \cdots + \mathbf{p}'_N - \mathbf{p}_1 - \cdots - \mathbf{p}_M) \\
 & \quad \times \tilde{h}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1 \cdots \mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1 \cdots \mathbf{p}_M\sigma_Mn_M),
 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

其中 \tilde{h}_{NM} 不包含 δ -函数因子。注意到方程(4.4.1)本身并没有说明什么——我们在4.2节看到任何算符都可以变成这样的形式。仅当方程(4.4.1)与 h_{NM} 仅有单个方程(4.4.2)中所示的 δ -函数的要求相结合，才能保证 S -矩阵满足集团分解原理。

在我们于第6章发展了Feynman图体系后，该定理在微扰论中的适用性将变得显然。轻信的读者也许倾向于跳过本章的剩余部分，而跳到第5章中对这些定理应用的考察。然而，这个证明有一些启发性特征，这有助于分清在什么情况下，下章的场论是必然的。

为了证明这个定理，我们使用微扰论的时间相关形式。（时间相关微扰论的优点之一是，使潜藏于集团分解原理之中的组合学变得显然；如果 E 是单粒子能量之和，那么 e^{-iEt} 是个体能量

函数的乘积，而 $[E - E_\alpha + i\epsilon]^{-1}$ 则不是。) S -矩阵由方程(3.5.10)给定为*

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n \left(\Phi_\beta, T \left\{ V(t_1) \cdots V(t_n) \right\} \Phi_\alpha \right), \quad (4.4.3)$$

其中哈密顿量被分成了自由部分 H_0 与相互作用部分 V ，而

$$V(t) \equiv \exp(iH_0 t) V \exp(-iH_0 t). \quad (4.4.4)$$

现在，态 Φ_α 和 Φ_β 可以像方程(4.2.2)中那样表示成作用在真空态 Φ_0 上的产生算符的乘积，而 $V(t)$ 本身是产生和湮灭算符之积的和，所以求和(4.4.3)中的每一项都可以写为产生与湮灭算符之积的真空期望值的和。通过使用对易或反对易关系，我们可以将每一湮灭算符依次移至所有产生算符的右边。对于每个绕过一个产生算符的湮灭算符，我们有两项，是将方程(4.2.5)写成如下形式得到的

$$a(q') a^\dagger(q) = \pm a^\dagger(q) a(q') + \delta(q' - q).$$

其它产生算符绕过第一项中的湮灭算符还会生成更多的项。但是方程(4.2.4)证明了一直挪到右边的任何湮灭算符作用到 Φ_0 上给出零。以这种方式，产生和湮灭算符之积的真空期望值由不同项的和给定。每一项等于 δ -函数与源于对易子或反对易子的符号 \pm 的乘积。它得出方程(4.4.3)中的每一项可以表达为求和，求和中的每一项等于 δ -函数与源于对易子或反对易子的符号 \pm 以及 $V(t)$ 所贡献的因子的乘积，然后该乘积对所有时间积分，并对 δ -函数变量中的动量，自旋和种类求和并积分。

以这种方式生成的每一项可以符号化为一个图。(这还不是全部的Feynman图体系，因为我们还没有将数值量与图中的组分相联系；我们在这里仅把图用作保留3-动量 δ -函数标记的方法。)画 n 个点，称为顶点，每一个对应每个 $V(t)$ 算符。对于通过将这些 $V(t)$ 算符之一中的湮灭算符移至初态 Φ_α 中的产生算符的右边所产生的每一 δ -函数，在图中引入一条线连接底部与相对应顶点。对于通过将末态 Φ_β 的共轭中的湮灭算符移至 $V(t)$ 算符之一中的产生算符的右边所产生的每一 δ -函数，从相对应顶点向上画一条线。对于通过将一个 $V(t)$ 中的湮灭算符移至其它 $V(t)$ 中的产生算符右边所产生的每一 δ -函数，用线连接相对应的顶点。最后，对于通过将末态 Φ_β 的共轭中的湮灭算符移至初态 Φ_α 中的产生算符的右边所产生的每一 δ -函数，从底部到顶部画一条线，穿过图。与这些线相联系的每一 δ -函数迫使该线所代表的每对产生和湮灭算符的动量变量相等。另外，每个顶点至少会贡献一个 δ -函数，这使得顶点处的动量守恒。

这样的图可以是连接的(每个点通过一组线与所有其它点相连)，而如果是非连的，它可以分解成几个连接的部分。一个连接组分中顶点所联系的 $V(t)$ 算符实际上与任意其它连接组分中顶点所联系的 $V(t)$ 对易，这是因为对于这个图，我们无法引入任何项，其中一个顶点中的湮灭算符所消灭的粒子被其它顶点中的产生算符创造——如果我们这样做了，这两个顶点将处在同一连接组分中。因此，方程(4.4.3)中的矩阵元可以表示为对来自每个连接组分贡献之积的求和：

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_\beta, T \left\{ V(t_1) \cdots V(t_n) \right\} \Phi_\alpha \right) \\ &= \sum_{\text{clusterings}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \left(\Phi_{\beta_j}, T \left\{ V(t_{j_1}) \cdots V(t_{j_{n_j}}) \right\} \Phi_{\alpha_j} \right)_C. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

*我们现在采取约定，对于 $n = 0$ ，方程(4.4.3)中的编时乘积被取为单位算符，所以求和中 $n = 0$ 的项在 $S_{\beta\alpha}$ 中仅产生项 $\delta(\beta - \alpha)$ 。

这里是对将入粒子，出粒子以及 $V(t)$ 算符分成 ν 个集团的所有方式求和（包含对 ν 从1到 n 的求和），其中 n_j 算符 $V(t_{j1}) \cdots V(t_{jn_j})$ 以及初粒子的子集 α_j 和末粒子的子集 β_j 全部在第 j 个集团中。当然，这意味着

$$n = n_1 + \cdots + n_\nu$$

另外，集合 α 是子集 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ 中所有粒子的并集，对末态亦是如此。方程(4.4.5)中的某些集团也许根本不包含任何粒子，即， $n_j = 0$ ；对于这些因子，除非 β_j 和 α_j 全是单粒子态（在这种情况下它就是一个 δ -函数 $\delta(\alpha_j - \beta_j)$ ），否则方程(4.4.5)中的矩阵元为零，这是因为不包含顶点的唯一连接图有一条线组成，该线总底部到顶部穿过图。最重要的是，方程(4.4.5)中的下标C意味着我们排除了所有与非连图对应的贡献，即，任意的 $V(t)$ 算符或任意的初末粒子与所有其它部分不通过一系列的粒子产生和湮灭相连接时的贡献。

现在，在求和(4.4.3)中使用方程(4.4.5)。每个时间变量从 $-\infty$ 积到 $+\infty$ ，这使得被分到每个集团的 t_1, \cdots, t_n 之间没有差异。对集团的求和因而产生因子 $n!/n_1!n_2! \cdots n_\nu!$ ，等于将 n 个顶点分成 ν 个集团，每个集团分别包含 n_1, n_2, \cdots 个顶点的方法数：

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n (\Phi_\beta, T \{V(t_1) \cdots V(t_n)\} \Phi_\alpha) \\ &= \sum_{\text{PART}} (\pm) \sum_{\substack{n_1 \cdots n_\nu \\ n_1 + \cdots + n_\nu = n}} \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_\nu!} \prod_{j=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j1} \cdots dt_{jn_j} \\ & \quad \times \left(\Phi_{\beta_j}, T \left\{ V(t_{j1}) \cdots V(t_{jn_j}) \right\} \Phi_{\alpha_j} \right)_C . \end{aligned}$$

这里的第一个求和是对将初态和末态中的粒子分到集团 $\alpha_1 \cdots \alpha_\nu$ 与集团 $\beta_1 \cdots \beta_\nu$ （包含对集团数目 ν 的求和）的总方法数求和。这里的因子 $n!$ 与方程(4.4.3)中的 $1/n!$ 相抵消，并且(4.4.5)的置换序列中的因子 $(-i)^n$ 可以写为乘积 $(-i)^{n_1} \cdots (-i)^{n_\nu}$ ，所以取代先对 n 求和再分别对由 $n_1 + \cdots + n_\nu = n$ 所约束的 n_1, \cdots, n_ν 求和，我们可以简单的对每一 n_1, \cdots, n_ν 独立地求和。这最终给出

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \sum_{\text{PART}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j1} \cdots dt_{jn_j} \\ & \quad \times \left(\Phi_{\beta_j}, T \left\{ V(t_{j1}) \cdots V(t_{jn_j}) \right\} \Phi_{\alpha_j} \right)_C . \end{aligned}$$

将其与连接矩阵元 $S_{\beta\alpha}^C$ 的定义(4.3.2)进行比较，我们看到这些矩阵元正好由这里乘积中的因子给定

$$S_{\beta\alpha}^C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n (\Phi_\beta, T \{V(t_1) \cdots V(t_n)\} \Phi_\alpha)_C . \quad (4.4.6)$$

（由于 n 和 j 现在仅是积分变量和求和变量，所以扔掉了它们的下标 j 。）我们看到 $S_{\beta\alpha}^C$ 通过一个非常简单的步骤算出： $S_{\beta\alpha}^C$ 是对连接 S -矩阵的所有贡献，也就是说我们扔掉了任意的初末粒子或任意算符 $V(t)$ 与所有其它部分不通过一系列的粒子产生和消失相连接的所有项。这证明了 S^C 的形容词“连接”。

正如我们所看到的，动量在每个顶点处守恒并沿着每条线守恒，所以 S -矩阵的连接部分单独动量守恒： $S_{\beta\alpha}^C$ 包含一个因子 $\delta^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)$ 。我们想要证明的是 $S_{\beta\alpha}^C$ 不再包含其它 δ -函数。

我们现在做出假定：哈密顿量的产生和湮灭算符形式的表达式(4.4.1)，它的系数部分 h_{NM} 是正比于一个确保动量守恒的3-维 δ -函数。对于自由粒子哈密顿量 H_0 ，这是自动成立的，所以，它

另外对相互所用 V 也是成立的。回到我们所使用的矩阵元的图形表示，这意味着每个顶点贡献一个3-维 δ -函数。（矩阵元 $V_{\gamma\delta}$ 中的其它 δ -函数保持不在相对应顶点产生或湮灭的粒子的动量不变）现在，这些 δ -函数中的大多数用来固定中间态粒子的动量。剩下的没有被这样的 δ -函数固定的动量是那些在内线圈中循环的动量。（任何如果剪断就使图不连接的线，它们携带由动量守恒所固定，为进入或离开该图的线的动量的某种线性组合的动量，如果图有 L 条同时剪断却不破坏连接的线，那么我们称它有 L 个独立的圈，并且有 L 个动量不被动量守恒所固定。）有 V 个顶点， I 条内线以及 L 个圈，则有 V 个 δ -函数，其中 $I - L$ 个用以固定内动量，剩下的 $V - I + L$ 个 δ -函数则与入射和出射粒子相关。但是一个著名的拓扑学等式**告诉我们，对于任何由 C 个连接部分构成的图，顶点，内线以及圈的数量通过如下等式相关

$$V - I + L = C . \quad (4.4.7)$$

因此，对于类似 $S_{\beta\alpha}^C$ 的连接矩阵元，其源于 $C = 1$ 的图，我们仅发现一个3-维 δ -函数 $\delta^3(p_\beta - p_\alpha)$ ，这正是所要证明的。

之少讨论中不重要的是从 $-\infty$ 积分到 $+\infty$ 的时间变量。因此精确相同的讨论可以用来证明，如果哈密顿量中的系数 h_{NM} 仅包含一个 δ -函数，那么 $U(t, t_0)$ 可以分解成连接部分，每个部分包含一个动量守恒 δ -函数因子。另一方面， S -矩阵的连接部分也包含一个能量守恒 δ -函数，并且当我们在第6章进入Feynman图后，我们将看到 $S_{\beta\alpha}^C$ 仅包含一个能量守恒 δ -函数， $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ ，而 $U(t, t_0)$ 却根本不包含能量守恒 δ -函数。

应该强调的是，方程(4.4.1)中的 h_{NM} 只有一个3-动量守恒 δ -函数因子的要求是非常不平庸的，并且有深远的含义。例如，假定 V 在2-粒子态之间有非零矩阵元。那么，方程(4.4.1)必须包含 $N = M = 2$ 的项，以及系数

$$v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) = V_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} . \quad (4.4.8)$$

（在这里我们暂时扔掉了自旋和种类指标。）但接着，3-粒子态之间相互作用的矩阵元是

$$V_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3} = v_{3,3}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) + v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \pm \text{置换} . \quad (4.4.9)$$

正如本章开头所提及的，通过选择 $v_{2,2}$ ，使得两体 S -矩阵是Lorentz不变的，并调整哈密顿量的剩余部分使得在包含3个及其以上粒子的态中没有散射，我们或许会得到一个非场论的相对论量子理论。那么，我们将不得不令 $v_{3,3}$ 与方程(4.4.9)中的其它项相抵消

$$v_{3,3}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) = -v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \mp \text{置换} . \quad (4.4.10)$$

然而，这将意味着 $v_{3,3}$ 中的每一项包含两个 δ -函数因子（回忆， $v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)$ 有一因子 $\delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ ）而这将违反集团分解原理。因此在满足集团分解原理的理论中，包含两个粒子的散射过程的存在使得包含三个及其以上粒子的散射过程不可避免。

**由一个顶点构成的图，其有 $V = 1$ ， $L = 0$ 以及 $C = 1$ 。如果我们增加 $V - 1$ 个顶点以及恰好足够保持图连接的线，我们有 $I = V - 1$ ， $L = 0$ 以及 $C = 1$ 。任何连入（在没有新顶点的情况下）该图的额外的线会产生相同数目的圈，所以 $I = V + L - 1$ 以及 $C = 1$ 。如果一个非连图有 C 个这样的连接部分，每个连接部分中的 I ， V 和 L 之和将会满足 $\sum I = \sum V + \sum L - C$ 。

* * *

当我们着手解决满足集团分解原理的量子理论中的三体问题时，方程(4.4.9)中的项 $v_{3,3}$ 没有产生什么特别的麻烦，但是其它项中的额外 δ -函数使得直接解决Lippmann-Schwinger方程变得困难。困难是，这些 δ -函数使得方程的核 $[E_\alpha - E_\beta + i\epsilon]^{-1}V_{\beta\alpha}$ 不是平方可积的，哪怕是在我们分离出总的动量守恒 δ -函数之后。结果是，它不能近似为一个有限矩阵，即使这个矩阵的阶数很大。为了解决包含三个及其以上粒子的问题，有必要将Lippmann-Schwinger方程换为一个右边为连接的方程。这样的方程为三个及其以上粒子的散射所发展^{8,9}，并且在非相对论散射问题中，它们可以被递归式的解决，但是，在相对论理论中它们没有什么用，所以在这一节不会细节的描述。

然而，将Lippmann-Schwinger方程重塑成这种形式在另一方面是有用的。本节中我们的讨论迄今都依赖与微扰论。我确实不知道本节中主要定理的任何非微扰论证明，但是已经证明⁹了，假定哈密顿量满足我们的条件，即系数函数 h_{NM} 各包含一个动量守恒 δ -函数的情况下，这些再次公式化的非微扰论动力学方程与 $U^C(t, t_0)$ （以及随之的 S^C ）应该也只包含一个动量守恒 δ -函数的要求一致，这正是集团分解原理所要求的。

参考文献

- [1] 集团分解原理似乎首先是由E. H. Wichmann和J. H. Crichton在量子场论中清楚陈述的, *Phys. Rev.* **132**, 2788 (1963).
- [2] 参看B. Bakamjian and L. H. Thomas, *Phys. Rev.* **92**, 1300 (1953).
- [3] 作为参考文献, 见T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **133**, 1165 (1959).
- [4] J. Goldstone *Proc. Roy. Soc. London* **A239**, 267 (1957)
- [5] N. M. Hugenholtz, *Physica* **23**, 481 (1957).
- [6] 参看R. Kubo, *J. Math. Phys.* **4**, 174 (1963).
- [7] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier Intergrals* (Oxford University Press, Oxford, 1937): Section 1.8
- [8] L. D. Faddeev. *Zh. Ekxper. i Teor. Fiz.* **39**. 1459 (1961)(翻译: *Soviet Phys — JETP* **12**, 1014 (1961)); *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **138**, 565 (1961) and **145**, 30 (1962) (翻译*Soviet Phys — Doklady* **6**, 384 (1961) and **7**, 600 (1963)).
- [9] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B232 (1964).

第 5 章 量子场与反粒子

现在我们已经有了激发量子场导引所需要的所有碎片¹。在构建的过程中，我们将遇到一些相对论与量子力学相统一的最显著且最通用的结果：自旋与统计间的联系，反粒子的存在以及粒子与反粒子之间的各种关系，其中包括著名的CPT定理。

5.1 自由场

在第3章中我们看到， S -矩阵将是Lorentz不变的，如果相互作用可以写为

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t), \quad (5.1.1)$$

其中 \mathcal{H} 是一标量，也就是说

$$U_0(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a), \quad (5.1.2)$$

并满足额外的条件：

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{当} (x - x')^2 \geq 0. \quad (5.1.3)$$

正如我们将看到的，存在更普遍的可能性，但是它们中的任何一个都与此相差不大。（暂且，我们将其留为一个开放问题：这里的 Λ 是否限制为一个固有正时Lorentz变换，抑或是可以包含空间反演。）为了同时满足集团分解原理，我们打算有产生和湮灭算符来构建 $\mathcal{H}(x)$ ，但是这里我们将面临一个问题：正如方程(4.2.12)所显示的，在Lorentz变换下，每个这样的算符将乘上依赖于算符所携带动量的矩阵。我们怎样能将这样的算符耦合在一起以构成一个标量？答案是用场——湮灭场 $\psi_\ell^+(x)$ 与产生场 $\psi_\ell^-(x)$ ，来构建 $\mathcal{H}(x)$ ：

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.4)$$

$$\psi_\ell^-(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \quad (5.1.5)$$

对系数^{*} $u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ 和 $v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ 进行选择，使得在Lorentz变换下每个场被乘上一个位置无关矩阵：

$$U_0(\Lambda, a)\psi_\ell^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar{\ell}}^+(\Lambda x + a), \quad (5.1.6)$$

$$U_0(\Lambda, a)\psi_\ell^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar{\ell}}^-(\Lambda x + a), \quad (5.1.7)$$

^{*}一个提醒：指标 n 和 σ 分别取遍所有不同的粒子种类与自旋 z -分量。

(原则上, 对于湮灭场和产生场, 我们可以有不同的变换矩阵 D^\pm , 但是我们将看到, 总可能选择场使得这些矩阵相同。) 通过进行第二次Lorentz变换 $\bar{\Lambda}$, 我们发现

$$D(\Lambda^{-1})D(\bar{\Lambda}^{-1}) = D((\bar{\Lambda}\Lambda)^{-1}),$$

所以取 $\Lambda_1 = (\Lambda)^{-1}$ 以及 $\Lambda_2 = (\bar{\Lambda})^{-1}$, 我们看到 D -矩阵构成了齐次Lorentz群的一个表示:

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \quad (5.1.8)$$

存在很多这样的表示, 包括标量表示 $D(\Lambda) = 1$, 矢量表示 $D(\Lambda)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$, 以及一大堆张量表示和旋量表示。这些特别的表示是不可约的, 也就是说, 不可能通过对基的选择使得所有的 $D(\Lambda)$ 约化为有两个及其以上分块的相同的分块对角形式。然而, 目前我们不要求 $D(\Lambda)$ 是不可约的, 一般而言, 它是一个分块矩阵, 其在分块中有不可约表示的任意阵列。即, 这里的指标 ℓ 包括一个取遍不同分块中所描述的粒子类型和不可约表示的指标, 以及另外一个取遍单个不可约表示分量的指标。稍后我们将把这些场分成不可约场, 其中每个场仅描述一个粒子种类(和它的反粒子)并且在Lorentz群下进行不可约变换。

一旦我们知道如何构建满足Lorentz变换规则(5.1.6)和(5.7.17)的场, 我们能够将相互作用密度构建为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \sum_{NM} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \\ &\times \psi_{\ell'_1}^-(x) \cdots \psi_{\ell'_N}^-(x) \psi_{\ell_1}^+(x) \cdots \psi_{\ell_M}^+(x) \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

如果常系数 $g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M}$ 被选成是Lorentz不变的, 在方程(5.1.2)的意义上来说这是一个标量, 也就是说, 对于所有的 Λ :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} D_{\ell'_1 \bar{\ell}'_1}(\Lambda^{-1}) \cdots D_{\ell'_N \bar{\ell}'_N}(\Lambda^{-1}) D_{\ell_1 \bar{\ell}_1}(\Lambda^{-1}) \cdots D_{\ell_M \bar{\ell}_M}(\Lambda^{-1}) \\ \times g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} = g_{\bar{\ell}'_1 \dots \bar{\ell}'_N, \bar{\ell}_1 \dots \bar{\ell}_M}. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

(注意到我们在这里没有包含导数, 这是因为我们认为这些场分量的导数是另外一种场。) 寻找满足方程(5.1.10)的系数 $g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M}$ 的任务, 原则上, 与利用Clebsch-Gordon系数将3-维旋转群的各种表示耦合在一起以构成旋转标量没什么不同。稍后, 我们将会结合产生场和湮灭场使得该密度在类空间隔上也与其本身对易。

现在, 我们应该将系数函数 $u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ 和 $v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ 取为什么呢? 方程(4.2.12)及其共轭给出了产生和湮灭算符的变换规则**

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, b) a(\mathbf{p}, \sigma, n) U_0^{-1}(\Lambda, b) &= \exp\left(i(\Lambda p) \cdot b\right) \sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \\ &\times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)}\left(W^{-1}(\Lambda, p)\right) a(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n), \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, b) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n) U_0^{-1}(\Lambda, b) &= \exp\left(-i(\Lambda p) \cdot b\right) \sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \\ &\times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)*}\left(W^{-1}(\Lambda, p)\right) a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

**这是针对有质量粒子的。零质量的情况将在5.9节展开。

其中 j_n 是种类 n 粒子的自旋，而 \mathbf{p}_Λ 是 Λp 的3-矢部分。（我们使用了旋转矩阵 $D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}$ 的么正性，将方程(5.1.11)和(5.1.12)变成这里所展示的形式。）另外，正如我们在2.5节中看到的，体积元 d^3p/p^0 是Lorentz-不变的，所以我们可以将方程(5.1.4)和(5.1.5)中的 d^3p 替换为 $d^3(\Lambda p)p^0/(\Lambda p)^0$ ，将这些放在一起，我们发现

$$U_0(\Lambda, b)\psi_\ell^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, b) = \sum_{\sigma\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \\ \times \exp\left(i(\Lambda p) \cdot b\right) D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}\left(W^{-1}(\Lambda, p)\right) \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} a(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma, n)$$

以及

$$U_0(\Lambda, b)\psi_\ell^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, b) = \sum_{\sigma\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \\ \times \exp\left(-i(\Lambda p) \cdot b\right) D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)*}\left(W^{-1}(\Lambda, p)\right) \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n).$$

我们看到，为了使场满足Lorentz变换规则(5.1.6)和(5.7.17)，如下条件是充要的

$$\sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1})u_{\bar{\ell}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_\Lambda, \sigma, n) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \\ \times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}\left(W^{-1}(\Lambda, p)\right) \exp\left(+i(\Lambda p) \cdot b\right) u_\ell(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n)$$

以及

$$\sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1})v_{\bar{\ell}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_\Lambda, \sigma, n) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \\ \times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)*}\left(W^{-1}(\Lambda, p)\right) \exp\left(-i(\Lambda p) \cdot b\right) v_\ell(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n)$$

或者更方便的

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}\left(W(\Lambda, p)\right) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \\ \times \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) \exp\left(i(\Lambda p) \cdot b\right) u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \quad (5.1.13)$$

以及

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)*}\left(W(\Lambda, p)\right) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \\ \times \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) \exp\left(-i(\Lambda p) \cdot b\right) v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n). \quad (5.1.14)$$

有一些基本要求将允许我们以有限个自由参量的形式算出系数函数 u_ℓ 和 v_ℓ 。

我们将在三个步骤中使用方程(5.1.13)和(5.1.14)，依次考察三种不同类型的固有正式Lorentz变换：

平移

首先, 我们考察 $\Lambda = 1$ 以及 b 任意时的方程(5.1.13)和(5.1.14)。立刻地, 我们发现 $u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ 和 $v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ 必须采取如下的形式

$$u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) = (2\pi)^{-3/2} e^{ip \cdot x} u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.15)$$

$$v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x} v_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.16)$$

所以场是Fourier变换:

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_{\sigma, n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.17)$$

以及

$$\psi_\ell^-(x) = \sum_{\sigma, n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p v_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \quad (5.1.18)$$

(因子 $(2\pi)^{-3/2}$ 可以被吸收进 u_ℓ 和 v_ℓ 的定义中, 但是在这些Fourier积分中显式地将它们写出来是方便的。) 利用方程(5.1.15)和(5.1.16), 我们发现, 当且仅当

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) \quad (5.1.19)$$

以及

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*}(W(\Lambda, p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) v_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.20)$$

对于任意的齐次Lorentz平移 Λ , 方程(5.1.13)和(5.1.14)是被满足的。

推动

接下来, 在方程(5.1.19)和(5.1.20)中取 $\mathbf{p} = 0$, 并令 Λ 为使质量为 m 的粒子从静止到某个4-动量 q^μ 的标准推动 $L(q)$ 。那么 $L(p) = 1$, 并且

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) = L^{-1}(q) L(q) = 1.$$

因此, 在这种特殊情况下, 方程(5.1.19)和(5.1.20)给出

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{q}, \sigma, n) = (m/q^0)^{1/2} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(L(q)) u_\ell(0, \sigma, n) \quad (5.1.21)$$

和

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{q}, \sigma, n) = (m/q^0)^{1/2} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(L(q)) v_\ell(0, \sigma, n). \quad (5.1.22)$$

换句话说, 如果我们知道的零动量的量 $u_\ell(0, \sigma, n)$ 和 $v_\ell(0, \sigma, n)$, 那么对于一个齐次Lorentz群的给定表示 $D(\Lambda)$, 我们知道对于所有 \mathbf{p} 的函数 $u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n)$ 和 $v_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n)$ 。(对于齐次Lorentz群的任意表示, 矩阵 $D_{\bar{\ell}\ell}(L(q))$ 的显式表达式将在5.7节给出。)

旋转

接下来, 取 $\mathbf{p} = 0$, 但这时令 Λ 为 $\mathbf{p}_\Lambda = 0$ 的 Lorentz 变换; 即, 取 Λ 为一个旋转 R 。这时显然有 $W(\Lambda, p) = R$, 因而方程(5.1.19)和(5.1.20)变成

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(R) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(R) u_{\ell}(0, \sigma, n) \quad (5.1.23)$$

和

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*}(R) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(R) v_{\ell}(0, \sigma, n), \quad (5.1.24)$$

或者等价地

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(0, \bar{\sigma}, n) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)} = \sum_{\ell} \mathcal{J}_{\bar{\ell}\ell} u_{\ell}(0, \sigma, n) \quad (5.1.25)$$

和

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(0, \bar{\sigma}, n) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*} = - \sum_{\ell} \mathcal{J}_{\bar{\ell}\ell} v_{\ell}(0, \sigma, n), \quad (5.1.26)$$

其中 $\mathbf{J}^{(j)}$ 和 \mathcal{J} 分别是表示 $D^{(j)}(R)$ 和 $D(R)$ 中的角动量矩阵。当 Λ 被限制为旋转 R 时, 齐次 Lorentz 群的任意表示 $D(\Lambda)$ 显然会产生一个旋转群表示; 方程(5.1.25)和(5.1.26)因此告诉我们, 如果场 $\psi_{\ell}^{\pm}(x)$ 所描述的是特定自旋为 j 的粒子, 那么表示 $D(R)$ 包含, 它的不可约分量自旋- j 表示 $D^{(j)}(R)$, 以及描述旋转群的自旋- j 表示是如何出现在 $D(R)$ 的系数 $u_{\ell}(0, \sigma, n)$ 和 $v_{\ell}(0, \sigma, n)$ 。在 5.6 节我们将看到, 固有正时 Lorentz 群的任何不可约表示包含旋转的任何给定不可约表示至多一次, 这使得如果场 $\psi_{\ell}^{+}(x)$ 和 $\psi_{\ell}^{-}(x)$ 进行不可约变换, 那么它们直到总体层次上是唯一的。更一般地讲, 湮灭场或产生场中自由参量的数目 (包括它们的总体层次) 等于场中不可约表示的数目。

可以直接证明由方程(5.1.21)和(5.1.22)所给定的系数函数 $u_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma, n)$ 和 $v_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma, n)$, 以及满足方程(5.1.23)和(5.1.24)的 $u_{\ell}(0, \sigma, n)$ 和 $v_{\ell}(0, \sigma, n)$ 将自动满足更加普遍的要求(5.1.19)和(5.1.20)。这留给读者作为一个练习。

让我们现在回到集团分解原理。在方程(5.1.9)中代入方程(5.1.17)和(5.1.18)并对 \mathbf{x} 积分, 相互作用哈密顿量是

$$\begin{aligned} V = & \sum_{NM} \int d^3 \mathbf{p}'_1 \cdots d^3 \mathbf{p}'_N d^3 \mathbf{p}_1 \cdots d^3 \mathbf{p}_M \sum_{\sigma'_1 \cdots \sigma'_N} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_M} \sum_{n'_1 \cdots n'_N} \sum_{n_1 \cdots n_M} \\ & \times a^{\dagger}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \cdots a^{\dagger}(\mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N) a(\mathbf{p}_M \sigma_M n_M) \cdots a(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) \\ & \times \mathcal{V}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \cdots \mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \cdots \mathbf{p}_M \sigma_M n_M) \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

其中, 系数函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \cdots, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \cdots) = & \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \cdots - \mathbf{p}_1 - \cdots) \\ & \times \tilde{\mathcal{V}}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \cdots, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \cdots), \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1 \cdots \mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1 \cdots \mathbf{p}_M\sigma_Mn_M) &= (2\pi)^{3-3N/2-3M/2} \\ &\times \sum_{\ell'_1 \cdots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \cdots \ell_M} g_{\ell'_1 \cdots \ell'_N, \ell_1 \cdots \ell_M} v_{\ell'_1}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) \cdots v_{\ell'_N}(\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N) \\ &\times u_{\ell_1}(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \cdots u_{\ell_M}(\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M). \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

相互作用的形式显然是，其所生成的 S -矩阵将满足集团分解原理： \mathcal{V}_{NM} 有一个 δ -函数，而系数 $\tilde{\mathcal{V}}_{NM}$ （至少对于一些场类型）在零动量出至多有分支点奇异性。事实上，我们可以反转这个讨论；任何算符可以写成(5.1.27)中那样，而集团分解原理要求系数 \mathcal{V}_{NM} 能够像在方程(5.1.28)中那样写成单个动量守恒 δ -函数与一个光滑函数的乘积。任何充分光滑的函数（但不是包含额外 δ -函数的函数）可以表达成方程(5.1.29)中那样[†]。因而，集团分解原理与Lorentz不变性使得相关作用密度应由湮灭场和产生场构建变得自然。

如果我们所需要的只是构建满足集团分解原理的标量相互作用密度，那么我们可以以任意多项式(5.1.9)的形式结合产生算符和湮灭算符，其中耦合系数 $g_{\ell'_1 \cdots \ell'_N, \ell_1 \cdots \ell_M}$ 仅服从于不变性条件(5.1.10)（以及一个合适的实条件）。然而，由于 S -矩阵的Lorentz不变性，相互作用密度满足对易条件(5.1.3)也是必要的。这一条件对于产生场和湮灭场的任意函数并不满足，这是因为

$$[\psi_\ell^+(x), \psi_{\bar{\ell}}^-(y)]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \sum_{\sigma n} \int d^3p u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot (x-y)} \quad (5.1.30)$$

（其中，如果场分量 $\psi_\ell^+(x)$ 和 $\psi_{\bar{\ell}}^-(y)$ 产生和消灭的粒子分别是玻色子或费米子，则符号 \mp 分别表明对易子或反对易子，）并且一般而言，即使 $x-y$ 是类空的，上式也不为零。显然，不可能通过仅用产生场和湮灭场构建相互作用密度来避免这一问题，因为那样相互作用不可能是厄密的。解决这一困难的唯一方法是以线性组合的方式结合湮灭场和产生场：

$$\psi_\ell(x) \equiv \kappa_\ell \psi_\ell^+(x) + \lambda_\ell \psi_{\bar{\ell}}^-(x), \quad (5.1.31)$$

其中，场中的系数 κ ， λ 和任何其它的任意常数进行调整，使得对于类空的 $x-y$

$$[\psi_\ell(x), \psi_{\ell'}(y)]_{\mp} = [\psi_\ell(x), \psi_{\ell'}^\dagger(y)]_{\mp} = 0. \quad (5.1.32)$$

我们将在本章随后的章节看到对于不同的不可约变换场如何做到这点。（通过在方程(5.1.31)中引入显式常数 κ 和 λ ，使得我们可以以任何看起来方便的形式选择产生场和湮灭场的总体尺度。）如果哈密顿量密度 $\mathcal{H}(x)$ 是由这样的场及其它们的共轭构建的，并且其中产生和湮灭费米子的场分量是偶数个，那么其将满足对易关系(5.1.3)。

条件(5.1.32)通常也称为因果律条件，这是因为，如果 $x-y$ 是类空的，没有信号能从 x 抵达 y ，这使得在点 x 处 ψ_ℓ 的测量不应该被在点 y 处 $\psi_{\ell'}$ 或 $\psi_{\ell'}^\dagger$ 的测量所影响。这种因果律考察对于电磁场是合理的，其分量中的任何一个在给定时空点可以被测量，就像Bohr和Rosenfeld的经典论文中展示的那样²。然而，这里我们将处理的场，类似电子的Dirac场，看起来在任何意义上似乎都不是可测的。这里所采取的观点是，在没有任何有关可测性或因果律的假定下，方程(5.1.32)是 S -矩阵的Lorentz不变性所需要的。

[†]对于一般函数，指标 ℓ 和 ℓ' 所取的范围可以是无限的，将 ℓ 和 ℓ' 限制在有限范围内的原因与可重整原理相关，这将在第12章讨论。

构建满足(5.1.32)的场(5.1.31)存在一个障碍。产生和消灭粒子的场所携带一个或多个守恒量子数，例如电荷，可以不为零。例如，如果种类 n 的粒子对于电荷 Q 携带一值 $q(n)$ ，那么

$$\begin{aligned} [Q, a(\mathbf{p}, \sigma, n)] &= -q(n)a(\mathbf{p}, \sigma, n), \\ [Q, a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)] &= +q(n)a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \end{aligned}$$

为了使 $\mathcal{H}(x)$ 与电荷算符 Q （或者某些其它的对称生成元）对易，所构建的场与 Q 有如下的简单对易关系是必要的：

$$[Q, \psi_\ell(x)] = -q_\ell \psi_\ell(x) \quad (5.1.33)$$

因为这样，我们可以使 $\mathcal{H}(x)$ 与电荷算符 Q 对易，通过将其构建为场 $\psi_{\ell_1} \psi_{\ell_2} \cdots$ 与共轭 $\psi_{m_1}^\dagger \psi_{m_2}^\dagger \cdots$ 之积的和，使得

$$q_{\ell_1} + q_{\ell_2} + \cdots - q_{m_1} - q_{m_2} - \cdots = 0.$$

现在，当且仅当场 $\psi_\ell^+(x)$ 所消灭的所有种类 n 的粒子携带相同电荷 $q(n) = q_\ell$ ，方程(5.1.33)对于湮灭场的特定分量 $\psi_\ell^+(x)$ 是满足的，并且，当且仅当场 $\psi_\ell^-(x)$ 所产生的所有种类 \bar{n} 的粒子携带电荷 $q(\bar{n}) = -q_\ell$ ，方程(5.1.33)对于产生场的特定分量 $\psi_\ell^-(x)$ 是满足的。我们看到，为了使这样的理论对类似电荷的量子数守恒，必存在一个配对的粒子种类，其携带这样一个非零的量子数：如果湮灭场的一特定分量湮灭种类为 n 的粒子，那么产生场的相同分量必产生种类为 \bar{n} 的粒子，这称为种类 n 粒子的反粒子，其有所有守恒量子数的相反值。这是反粒子存在的原因。

如果表示 $D(\Lambda)$ 不是可约的，那么我们对于场可以采用这样的基， $D(\Lambda)$ 在这个基下沿主对角线分解成块，使得属于不同分块的场在Lorentz变换下不能转换到彼此。另外，Lorentz变换在粒子种类上没有效果。因此，取代考察一个大的场，我们引入许多不可约分量以及许多粒子种类，从现在起，我们将注意力所集中的场，其仅湮灭一种粒子（扔掉指标 n ）且只产生相对应的反粒子，并且在Lorentz群下进行不可约变换（之上所讨论的可以也可以不包含空间反演），在这个理解下，一般而言，我们将不得不考虑许多这种不同的场，一些或许是其它场的导数。在之后的章节中，我们将完成系数函数 $u_\ell(\mathbf{p}, \sigma)$ 和 $v_\ell(\mathbf{p}, \sigma)$ 的确定，确定常数 κ 与 λ 的比值，并首次针对场所属的Lorentz群最简不可约表示，即标量表示，矢量表示，以及Dirac旋量表示，简化粒子性质与反粒子性质之间的关系。在这之后，我们将针对一个完整且普遍的不可约表示重复这个分析。

关于场论的一些评述。对方程(5.1.31)，(5.1.17)和(5.1.18)的检查说明一个有限质量 m 的场，其所有分量满足Klein-Gordon方程：

$$(\square - m^2)\psi_\ell(x) = 0. \quad (5.1.34)$$

一些场同时满足其它方程，这取决于是否存在多过独立粒子态的场分量。传统上，在量子场论中，一般从这样的场方程或者是导出它们的拉格朗日量出发，然后利用它们来导出场的单粒子湮灭算符和产生算符表达式。这里所使用的方法，是从粒子开始，并根据Lorentz不变性的指示导出场，其中场方程几乎是过于巧合地，作为该构建的副产品产生。

* * *

在这里必须提及一个技巧。根据4.4节中所证明的定理，保证理论满足集团分解原理的条件是，相互作用可以表示成产生和湮灭算符之积的和，其中所有的产生算符处在所有湮灭算符的左

边，并且系数仅包含一个动量守恒 δ -函数。由于这个原因，我们应将相互作用写成“规范序列”的形式

$$V = \int d^3x : \mathcal{F}(\psi(x), \psi^\dagger(x)) : \quad (5.1.35)$$

冒号表示其中的表达式被改写成了（忽略了非零对易子或反对易子，但包含由于费米算符的置换所产生的负号）所有的产生算符处在所有湮灭算符的左边。通过使用场的对易或反对易关系，任何这类场的规范序列函数也可以写为带有 c -数系数的场的普通乘积之和。以这种方式重写： \mathcal{F} ：使得尽管是规范序列，但当 $x - y$ 是类空时，如果它是由满足方程(5.1.32)的场构成的，并且其中任意费米场分量的数量为偶数个， $: \mathcal{F}(\psi(x), \psi^\dagger(x)) :$ 将明显与 $: \mathcal{F}(\psi(y), \psi^\dagger(y)) :$ 对易。

5.2 因果标量场

我们首先考察单分量湮灭场 $\phi^+(x)$ 与产生场 $\phi^-(x)$ ，它们的变换是Lorentz群的所有表示中最简单的一个，即标量，有 $D(\Lambda) = 1$ 。限制到旋转，这正是旋转群的标量表示，其有 $\mathcal{J} = 0$ ，所以方程(5.1.25)和(5.1.26)除了 $j = 0$ 时没有解，在这种情况下， σ 和 $\bar{\sigma}$ 只能取值零。因此标量场仅能描述自旋零的粒子。又假定当场仅描述一种粒子时，即没有明显的反粒子（因而扔掉种类指标 n ，自旋指标 σ 和场指标 ℓ ），量 $u_\ell(0, \sigma, n)$ 与 $v_\ell(0, \sigma, n)$ 在这里仅是数 $u(0)$ 和 $v(0)$ 。调整湮灭场和产生场的总体尺度使得它们均有值 $(2m)^{-1/2}$ 是方便的。那么方程(5.1.21)和(5.1.22)就给出

$$u(\mathbf{p}) = (2p^0)^{-1/2} \quad (5.2.1)$$

以及

$$v(\mathbf{p}) = (2p^0)^{-1/2} . \quad (5.2.2)$$

那么在标量情况下，场(5.1.17)和(5.1.18)是

$$\phi^+(x) = \int d^3p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} a(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \quad (5.2.3)$$

和

$$\phi^-(x) = \int d^3p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} a^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} = \phi^{+\dagger}(x) . \quad (5.2.4)$$

由 $\phi^+(x)$ 和 $\phi^-(x)$ 的多项式所构成的哈密顿量密度 $\mathcal{H}(x)$ 自动满足要求(5.1.9)，即按照一个标量变换。它是否满足 S -矩阵的Lorentz不变性的另一条件，即对于类空间隔 $x - y$ ， $\mathcal{H}(x)$ 与 $\mathcal{H}(y)$ 对易，仍留待考察。如果 $\mathcal{H}(x)$ 仅是 $\phi^+(x)$ 的多项式，将不存在什么问题。所有的湮灭算符对易或反对易，所以对于所有的 x 和 y ，根据这个粒子是玻色子还是费米子， $\phi^+(x)$ 与 $\phi^+(y)$ 分别是对易或反对易：

$$[\phi^+(x), \phi^+(y)]_{\mp} = 0 . \quad (5.2.5)$$

因此，对于所有的 x 和 y ，由 $\phi^+(x)$ 的多项式所构成的哈密顿量密度 $\mathcal{H}(x)$ （或者，对于费米子，任何这样的偶多项式）将与 $\mathcal{H}(y)$ 对易。当然，问题是，为了使 $\mathcal{H}(x)$ 是厄密的， $\mathcal{H}(x)$ 必须包含 $\phi^{+\dagger}(x) = \phi^-(x)$ 与 $\phi^+(x)$ ，而对于普遍类空间隔， $\phi^+(x)$ 不与 $\phi^-(y)$ 对易或反对易。利用对易关系（对于玻色子）或反对易关系（对于费米子）(4.2.5)，我们有

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} = \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3 (2p^0 \cdot 2p'^0)^{1/2}} e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot y} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

其坍缩为单积分

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} = \Delta_+(x - y), \quad (5.2.6)$$

其中 Δ_+ 是标准函数

$$\Delta_+(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{ip \cdot x}. \quad (5.2.7)$$

这显然是Lorentz不变的，因而对于类空的 x ，它仅取决于不变平方 $x^2 > 0$ 。因此我们对于类空的 x 可以计算 $\Delta_+(x)$ ，通过选择坐标系，使得

$$x^0 = 0, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2}.$$

那么方程(5.2.7)给出

$$\begin{aligned} \Delta_+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{\sin(p\sqrt{x^2})}{p\sqrt{x^2}}. \end{aligned}$$

将积分变量改为 $u \equiv p/m$ ，变成

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}} \int_0^\infty \frac{u du}{\sqrt{u^2 + 1}} \sin(m\sqrt{x^2}u) \quad (5.2.8)$$

或者，以标准Hankel函数的形式，

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}} K_1(m\sqrt{x^2}). \quad (5.2.9)$$

这不为零，我们该如何处理呢？注意到，即使 $\Delta_+(x)$ 不为零，但当 $x^2 > 0$ 时，它关于 x^μ 是偶函数。取代仅使用 $\phi^+(x)$ ，我们尝试以如下线性组合构建 $\mathcal{H}(x)$

$$\phi(x) \equiv \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^-(x).$$

利用方程(5.2.6)，那么对于类空的 $x - y$ ，我们有

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)]_{\mp} &= |\kappa|^2 [\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} + |\lambda|^2 [\phi^-(x), \phi^+(y)]_{\mp} \\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \Delta_+(x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)]_{\mp} &= \kappa\lambda([\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} + [\phi^-(x), \phi^+(y)]_{\mp}) \\ &= \kappa\lambda(1 \mp 1) \Delta_+(x - y). \end{aligned}$$

这两个式子当且仅当粒子是玻色子（即，使用的是上面的符号）且 κ 和 λ 大小相等时为零

$$|\kappa| = |\lambda|.$$

通过重定义态的相位，使得 $a(\mathbf{p}) \rightarrow e^{i\alpha}a(\mathbf{p})$ ， $a^\dagger(\mathbf{p}) \rightarrow e^{-i\alpha}a^\dagger(\mathbf{p})$ 以及随之的 $\kappa \rightarrow \kappa e^{i\alpha}$ ， $\lambda \rightarrow \lambda e^{-i\alpha}$ ，我们可以改变 κ 和 λ 的相对相位。令 $\alpha = \frac{1}{2} \text{Arg}(\lambda/\kappa)$ ，我们可以以这种方式使 κ 和 λ 在相位上相等，因而全部相等。

这不为零，我们该如何处理呢？注意到，即使 $\Delta_+(x)$ 不为零，但当 $x^2 > 0$ 时，它关于 x^μ 是偶函数。取代仅使用 $\phi^+(x)$ ，假设我们尝试以如下线性组合构建 $\mathcal{H}(x)$

$$\phi(x) \equiv \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^-(x) .$$

利用方程(5.2.6)，那么对于类空的 $x - y$ ，我们有

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)]_{\mp} &= |\kappa|^2 [\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} + |\lambda|^2 [\phi^-(x), \phi^+(y)]_{\mp} \\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \Delta_+(x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)]_{\mp} &= \kappa\lambda([\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} + [\phi^-(x), \phi^+(y)]_{\mp}) \\ &= \kappa\lambda(1 \mp 1) \Delta_+(x - y) . \end{aligned}$$

这两个式子当且仅当粒子是玻色子（即使用的是上面的符号）且 κ 和 λ 大小相等时为零

$$|\kappa| = |\lambda| .$$

通过重定义态的相位，使得 $a(\mathbf{p}) \rightarrow e^{i\alpha}a(\mathbf{p})$ ， $a^\dagger(\mathbf{p}) \rightarrow e^{-i\alpha}a^\dagger(\mathbf{p})$ 以及随之的 $\kappa \rightarrow \kappa e^{i\alpha}$ ， $\lambda \rightarrow \lambda e^{-i\alpha}$ ，我们可以改变 κ 和 λ 的相对相位。令 $\alpha = \frac{1}{2} \arg(\lambda/\kappa)$ ，我们可以以这种方式是 κ 和 λ 在相位上相等，因而全部相等。

吸收总因子 $\kappa = \lambda$ 以重新定义 $\phi(x)$ ，那么我们有

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+\dagger}(x) = \phi^\dagger(x) . \quad (5.2.10)$$

若相互作用密度 $\mathcal{H}(x)$ 由自伴标量场 $\phi(x)$ 的多项式构成，那么在类空间隔 $x - y$ 上， $\mathcal{H}(x)$ 与 $\mathcal{H}(y)$ 对易。

即便方程(5.2.10)中两项的相对相位的选择是约定的问题，约定一旦被采纳，无论该粒子的标量场出现在相互作用哈密顿量密度的什么地方，都要一直使用。例如，假定相互作用密度不仅包括场(5.2.10)，也包含相同粒子的另一标量场

$$\tilde{\phi}(x) = e^{i\alpha}\phi^+(x) + e^{-i\alpha}\phi^{+\dagger}(x)$$

其中 α 是一任意相位。这个 $\tilde{\phi}$ ，像 ϕ 一样，是因果的，也就是说当 $x - y$ 是类空间隔时， $\tilde{\phi}(x)$ 与 $\tilde{\phi}(y)$ 对易，但 $\tilde{\phi}(x)$ 与 $\phi(y)$ 在类空间隔上不对易，因而在相同理论中，这两个场不能同时出现。

如果 $\phi(x)$ 所产生或湮灭的粒子携带一些类似电荷的守恒量子数，那么当且仅当出现在 $\mathcal{H}(x)$ 中的每一项包含相同数目的 $a(\mathbf{p})$ 算符和 $a(\mathbf{p})^\dagger$ 算符， $\mathcal{H}(x)$ 才会对该量子数守恒。但是，如果 $\mathcal{H}(x)$ 由 $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+\dagger}(x)$ 的多项式构成，这将是是不可能的。以另一种方式加以陈述，为了使 $\mathcal{H}(x)$ 与电荷 Q （或其它某些对称生成元）对易，构成 $\mathcal{H}(x)$ 的场与 Q 有简单的对易关系是必要的。这对于 $\phi^+(x)$ 与它的厄密伴是正确的，其中

$$\begin{aligned} [Q, \phi^+(x)]_- &= -q\phi^+(x) , \\ [Q, \phi^{+\dagger}(x)]_- &= +q\phi^{+\dagger}(x) , \end{aligned}$$

但对于自伴场(5.2.10)却不是这样。

为了解决这个问题，我们必须假定存在两个无自旋玻色子，其有相同的质量 m ，但电荷分别为 $+q$ 和 $-q$ 。将 $\phi^+(x)$ 与 $\phi^{+c}(x)$ 记为这两个粒子的湮灭场，并有*

$$\begin{aligned} [Q, \phi^+(x)]_- &= -q\phi^+(x), \\ [Q, \phi^{+c}(x)]_- &= +q\phi^{+c}(x). \end{aligned}$$

将 $\phi(x)$ 定义为线性组合

$$\phi(x) = \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^{+c}(x),$$

其显然与 Q 有同 $\phi^+(x)$ 一样的对易关系

$$[Q, \phi(x)]_- = -q\phi(x).$$

那么在类空间隔上， $\phi(x)$ 与其厄密伴的对易子或反对易子为

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)]_{\mp} &= |\kappa|^2 [\phi^+(x), \phi^{+\dagger}(y)] + |\lambda|^2 [\phi^{+c\dagger}(x), \phi^{+c}(y)]_{\mp} \\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \Delta_+(x-y), \end{aligned}$$

而 $\phi(x)$ 与 $\phi(y)$ 对于所有的 x 和 y 都自动对易或反对易，这是因为 ϕ^+ 和 $\phi^{+c}(x)$ 产生湮灭的粒子不同。在这个结果的导出中，我们默认粒子和反粒子有相同的质量，使得对易子或反对易子包含相同的函数 $\Delta_+(x-y)$ 。费米统计在这里又一次排除在外，这是因为除非 $\kappa = \lambda = 0$ ，在该情况下场为零，否则 $\phi(x)$ 在类空间隔上不可能与 $\phi^\dagger(y)$ 对易，所以一个无自旋粒子必须是玻色子。

对于玻色统计，为了使一个复的 $\phi(x)$ 与 $\phi^\dagger(y)$ 在类空间隔上对易， $|\kappa|^2 = |\lambda|^2$ 以及粒子和反粒子有相同的质量是充分且必要的。通过重定义这两个粒子态的相对相位，我们可以再一次地赋予 κ 和 λ 相同的相位，在这种情况下 $\kappa = \lambda$ 。共同的相位因子又一次用过场 ϕ 的重定义被消除，使得

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{c\dagger}(x)$$

或者更细致些

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2p^0)^{1/2}} [a(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + a^{c\dagger}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}]. \quad (5.2.11)$$

这显然是唯一的因果标量场。这个公式既可用于反粒子是其本身的纯中性的无自旋粒子（在这种情况下，我们取 $a^{c\dagger}(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$ ），也可用于有明显反粒子的粒子（这时 $a^{c\dagger}(\mathbf{p}) \neq a(\mathbf{p})$ ）。

为了将来的使用，我们在这里将复标量场与其厄密伴的对易子记为

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \Delta(x-y), \quad (5.2.12)$$

其中

$$\Delta(x-y) \equiv \Delta_+(x-y) - \Delta_+(y-x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} [e^{ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (x-y)}]. \quad (5.2.13)$$

*指标“c”代表“荷共轭”。应该记住不携带量子数的粒子可以是它自己的反粒子，即 $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$ ，也可以不是。

现在，让我们考察各种反演对称性在场上的效应。首先，从4.2节的结果，我们可以很容易地看到空间反演算符在产生算符和湮灭算符上的效应是**：

$$Pa(\mathbf{p})P^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}), \quad (5.2.14)$$

$$Pa^{c\dagger}(\mathbf{p})P^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}), \quad (5.2.15)$$

其中 η 和 η^c 分别是粒子和反粒子的内禀宇称。将这些结果应用于湮灭场(5.2.3)和产生场的荷共轭(5.2.4)，并将积分变量 \mathbf{p} 改为 $-\mathbf{p}$ ，我们看到

$$P\phi^+(x)P^{-1} = \eta^* \phi^+(\mathcal{P}x) \quad (5.2.16)$$

$$P\phi^{+c\dagger}(x)P^{-1} = \eta^c \phi^{+c\dagger}(\mathcal{P}x), \quad (5.2.17)$$

其中，像往常一样， $\mathcal{P}x = (-\mathbf{x}, x^0)$ 。我们看到，一般而言，将空间反演算符作用于标量场 $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+c\dagger}(x)$ 将会给出一个不同的场 $\phi_P = \eta^* \phi^+ + \eta^c \phi^{+c\dagger}$ 。两个场分别是因果的，但如果 ϕ 与 ϕ_P^\dagger 出现在同一相互作用中，那么我们就有麻烦了，这是因为它们在类空间隔上一般不对易。保护Lorentz不变性，宇称守恒和相互作用的厄密性的唯一方法是，要求 ϕ_P 正比于 ϕ ，因而

$$\eta^c = \eta^*. \quad (5.2.18)$$

即，包含一个无质量粒子和它的反粒子的态，其内禀宇称 $\eta\eta^c$ 为偶。我们现在就有

$$P\phi(x)P^{-1} = \eta^* \phi(\mathcal{P}x). \quad (5.2.19)$$

当无自旋粒子的反粒子是其本身时，即 $\eta^c = \eta$ ，这些结果同样适用，并且暗示了这种粒子的内禀宇称为实： $\eta = \pm 1$ 。

荷共轭可以用大致相同的方法处理。从4.2节的结果，我们有

$$Ca(\mathbf{p})C^{-1} = \xi^* a(\mathbf{p}), \quad (5.2.20)$$

$$Ca^{c\dagger}(\mathbf{p})C^{-1} = \xi^c a^\dagger(\mathbf{p}), \quad (5.2.21)$$

其中， ξ 和 ξ^c 是作用在单粒子态上的荷共轭算符所附带的相位。那么由此得出

$$C\phi^+(x)C^{-1} = \xi^* \phi^{+c}(x), \quad (5.2.22)$$

$$C\phi^{+c\dagger}(x)C^{-1} = \xi^c \phi^{+\dagger}(x). \quad (5.2.23)$$

为了使 $C\phi(x)C^{-1}$ 正比于场 $\phi^\dagger(x)$ ，这样它在类空间隔上对易，显然有必要使

$$\xi^c = \xi^*. \quad (5.2.24)$$

正如普通宇称一样，对于由一个无自旋粒子及其反粒子构成的态，其内禀荷共轭宇称 $\xi\xi^c$ 为偶。现在，我们就有

$$C\phi(x)C^{-1} = \xi^* \phi^\dagger(x). \quad (5.2.25)$$

**我们省略了反演算符P,C和T上的下标0，这是因为，实际上在这些反演是好对称性的所有情况中，在“入”态和“出”态上和自由粒子态上引出反演变换的算符是相同的。

再一次地，这些结果同样适用于反粒子为其本身的情况，即 $\xi^c = \xi$ 。在这种情况下，像普通宇称一样，荷共轭宇称必须为实， $\xi = \pm 1$ 。

最终，我们来到时间反演。从4.2节中我们得到

$$\mathbb{T}a(\mathbf{p})\mathbb{T}^{-1} = \zeta^* a(-\mathbf{p}) , \quad (5.2.26)$$

$$\mathbb{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p})\mathbb{T}^{-1} = \zeta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}) , \quad (5.2.27)$$

回忆起 \mathbb{T} 是反么正的，并再一次将积分变量 \mathbf{p} 改为 $-\mathbf{p}$ ，我们发现

$$\mathbb{T}\phi^+(x)\mathbb{T}^{-1} = \zeta^* \phi^+(-\mathcal{P}x) \quad (5.2.28)$$

$$\mathbb{T}\phi^{+c\dagger}(x)\mathbb{T}^{-1} = \zeta^c \phi^{+c\dagger}(-\mathcal{P}x) , \quad (5.2.29)$$

为了使 $\mathbb{T}\phi(x)\mathbb{T}^{-1}$ 在时间反演点 $-\mathcal{P}x$ 上与场 ϕ 简单相关，我们必须有

$$\zeta^c = \zeta^* \quad (5.2.30)$$

以及随之的

$$\mathbb{T}\phi(x)\mathbb{T}^{-1} = \zeta^{**} \phi(-\mathcal{P}x) . \quad (5.2.31)$$

5.3 因果矢量场

现在我们着手处理下一个最简单的场，其按照4-矢变换，是齐次Lorentz群的最简单的非平庸表示。存在有质量粒子， W^\pm 和 Z^0 ，其在低能下被这种场描述并且在现代基本粒子物理中扮演日趋重要的角色，所以这个例子不仅仅是教学范畴。（另外，尽管我们在这里仅考察有质量粒子，建立量子电动力学的方法之一是，在质量非常小的极限下，以有质量矢量场的方式描述光子。）暂且，我们将假定该场所描述的粒子只有一种（扔掉种类指标 n ）；那么我们将考察场所描述的粒子和反粒子不同的可能性。

在Lorentz群的4-矢表示中，表示矩阵 $D(\Lambda)$ 的行与列被4-分量指标 μ, ν 等所标记，其有

$$D(\Lambda)^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu . \quad (5.3.1)$$

矢量场的湮灭部分和产生部分被写为

$$\phi^{+\mu}(x) = \sum_\sigma (2\pi)^{-3/2} \int d^3p u^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} , \quad (5.3.2)$$

$$\phi^{-\mu}(x) = \sum_\sigma (2\pi)^{-3/2} \int d^3p v^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} , \quad (5.3.3)$$

对任意动量的系数函数 $u^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ 和 $v^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ 以它们的零动量形式由方程(5.1.21)和(5.1.22)给定，在这里写为

$$u^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = (m/p^0)^{1/2} L(p)^\mu_\nu u^\nu(0, \sigma) , \quad (5.3.4)$$

$$v^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = (m/p^0)^{1/2} L(p)^\mu_\nu v^\nu(0, \sigma) . \quad (5.3.5)$$

(我们对时空指标 μ, ν 等使用了通常的求和约定) 另外, 在零动量处的系数函数服从于条件(5.1.25)和(5.1.26):

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^{\mu}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \mathcal{J}_{\nu}^{\mu} u^{\nu}(0, \sigma) \quad (5.3.6)$$

和

$$-\sum_{\bar{\sigma}} v^{\mu}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \mathcal{J}_{\nu}^{\mu} v^{\nu}(0, \sigma) . \quad (5.3.7)$$

4-矢表示中的旋转生成元由方程(5.3.1)给定为

$$(\mathcal{J}_k)_0^0 = (\mathcal{J}_k)_i^0 = (\mathcal{J}_k)_0^i = 0 , \quad (5.3.8)$$

$$(\mathcal{J}_k)_j^i = -i\epsilon_{ijk} , \quad (5.3.9)$$

其中 i, j, k 在这里取遍值1, 2和3。特别地, 我们注意到 \mathcal{J}^2 有如下的形式

$$(\mathcal{J}^2)_0^0 = (\mathcal{J}^2)_i^0 = (\mathcal{J}^2)_0^i = 0 , \quad (5.3.10)$$

$$(\mathcal{J}^2)_j^i = 2\delta_j^i . \quad (5.3.11)$$

那么从方程(5.3.6)和(5.3.7)得出

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^0(0, \bar{\sigma}) (\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 0 , \quad (5.3.12)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^i(0, \bar{\sigma}) (\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 2u^i(0, \sigma) \quad (5.3.13)$$

和

$$\sum_{\bar{\sigma}} v^0(0, \bar{\sigma}) (\mathbf{J}^{(j)*})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 0 , \quad (5.3.14)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v^i(0, \bar{\sigma}) (\mathbf{J}^{(j)*})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 2v^i(0, \sigma) \quad (5.3.15)$$

另外, 我们回忆熟悉的结果 $(\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = j(j+1)\delta_{\bar{\sigma}\sigma}$ 。从方程(5.3.12)—(5.3.15), 我们看到对于由矢量场所描述的粒子, 其自旋仅有两种可能性: 要么 $j = 0$, 这时在 $\mathbf{p} = 0$ 处只有 u^0 和 v^0 是非零的, 要么 $j = 1$ (使得 $j(j+1) = 2$), 这时在 $\mathbf{p} = 0$ 处仅有空间分量 u^i 和 v^i 是非零的。让我们更细致的看一下这两种可能性。

自旋零

通过对场的归一化的合适选择, 我们可以令 $u^{\mu}(0)$ 和 $v^{\mu}(0)$ 仅存的非零分量有如下约定值

$$\begin{aligned} u^0(0) &= i(m/2)^{1/2} \\ v^0(0) &= -i(m/2)^{1/2} . \end{aligned}$$

(指标 σ 在这里只能取值零, 因而被扔掉了。) 那么对于一般动量, 方程(5.3.4)和(5.3.5)得出

$$u^{\mu}(\mathbf{p}) = ip^{\mu}(2p^0)^{-1/2} \quad (5.3.16)$$

以及

$$v^{\mu}(\mathbf{p}) = -ip^{\mu}(2p^0)^{-1/2} . \quad (5.3.17)$$

这里的矢量湮灭场和产生场只不过是标量湮灭场和产生场 $\phi^\pm(x)$ 的导数，而 $\phi^\pm(x)$ 正是之前章节所定义的无自旋粒子的标量场：

$$\phi^{+\mu}(x) = \partial^\mu \phi^+(x) \quad \phi^{-\mu}(x) = \partial^\mu \phi^-(x) . \quad (5.3.18)$$

显然无自旋粒子的因果矢量场也仅是因果标量场的导数：

$$\phi^\mu(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{-\mu}(x) = \partial^\mu \phi(x) . \quad (5.3.19)$$

因此我们不需要在这里进一步探索这种情况。

自旋一

从方程(5.3.6)和(5.3.7)中，我们立即看到 $\sigma = 0$ 的矢量 $u^i(0,0)$ 和 $v^i(0,0)$ 处在3-方向上。通过一个合适的场的归一化选择，我们可以令这些矢量有如下值

$$u^\mu(0,0) = v^\mu(0,0) = (2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.20)$$

其中，4-矢分量总以1, 2, 3, 0的顺序排列。为了找到其它分量，我们使用方程(5.3.6)，(5.3.7)和(5.3.9)计算上升和下降算符 $J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)}$ 在 u 和 v 上的效应。给出：

$$u^\mu(0,+1) = -v^\mu(0,-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (5.3.21)$$

$$u^\mu(0,-1) = -v^\mu(0,+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (5.3.22)$$

应用方程(5.3.4)和(5.3.5)现在给出

$$u^\mu(\mathbf{p},\sigma) = v^{\mu*}(\mathbf{p},\sigma) = (2p^0)^{-1/2} e^\mu(\mathbf{p},\sigma) \quad (5.3.23)$$

其中

$$e^\mu(\mathbf{p},\sigma) \equiv L^\mu_\nu(\mathbf{p}) e^\nu(0,\sigma) \quad (5.3.24)$$

并有

$$e^\mu(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad e^\mu(0,+1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad e^\mu(0,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (5.3.25)$$

湮灭场(5.3.2)和产生场(5.3.3)在这里是

$$\phi^{+\mu}(x) = \phi^{-\mu\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} \quad (5.3.26)$$

场 $\phi^{+\mu}(x)$ 和 $\phi^{-\nu}(y)$ 当然对于所有的 x 和 y 对易（或反对易），但是 $\phi^{+\mu}(x)$ 和 $\phi^{-\nu}(y)$ 却不是这样。它们的对易子（对于玻色子）或反对易子（对于费米子）是

$$[\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ip \cdot (x-y)} \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) \quad (5.3.27)$$

其中

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) e^{\nu*}(\mathbf{p}, \sigma) . \quad (5.3.28)$$

利用方程(5.3.25)的一个直接运算显示了 $\Pi^{\mu\nu}(0)$ 是垂直于时间方向的空间上的投影矩阵，并且方程(5.3.24)随之证明了 $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$ 是垂直于4-矢 p^{μ} 方向的空间上的投影矩阵：

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) = \eta^{\mu\nu} + p^{\mu} p^{\nu} / m^2 . \quad (5.3.29)$$

那么，以上节所定义的 Δ_{+} 函数的形式，对易子（或反对易子）(5.3.27)可以写为

$$[\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu} \partial^{\nu}}{m^2} \right] \Delta_{+}(x-y) . \quad (5.3.30)$$

对于我们当前的目的，这个表达式的关键是，对于类空的 $x-y$ ，其不为零且对于 $x-y$ 是偶函数。因此，我们可以重复上一节寻求构建因果场的推理：我们构造湮灭场和产生场的一个线性组合

$$v^{\mu}(x) \equiv \kappa \phi^{+\mu}(x) + \lambda \phi^{-\mu}(x)$$

对于类空的 $x-y$ ，这时有，

$$[v^{\mu}(x), v^{\nu}(y)]_{\mp} = \kappa \lambda [1 \mp 1] \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu} \partial^{\nu}}{m^2} \right] \Delta_{+}(x-y)$$

以及

$$[v^{\mu}(x), v^{\nu\dagger}(y)]_{\mp} = (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu} \partial^{\nu}}{m^2} \right] \Delta_{+}(x-y) .$$

为了使二者对于类空的 $x-y$ 都为零，自旋1的粒子是玻色子且 $|\kappa| = |\lambda|$ 是充分且必要的。通过对单粒子态相位的一个合适选择，我们可以赋予 κ 和 λ 相同的相位，使得 $\kappa = \lambda$ ，并通过场的总归一化扔掉共同的因子 κ 。在这之后，我们发现自旋一的有质量粒子的矢量场是

$$v^{\mu}(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{+\mu\dagger}(x) . \quad (5.3.31)$$

我们注意到这是实的：

$$v^{\mu}(x) = v^{\mu\dagger}(x) . \quad (5.3.32)$$

然而，如果粒子携带了一非零的守恒量子数 Q ，那么我们无法用这种场构建与 Q 守恒的相互作用。反而，我们必须假定存在另一玻色子，其与原先的玻色子有相同的质量和自旋但携带 Q 的相反值，这样，则将因果场构建为

$$v^{\mu}(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{+c\mu\dagger}(x) \quad (5.3.33)$$

或者更细致一些

$$v^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \times [e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}], \quad (5.3.34)$$

其中，下标“c”表明算符所产生的反粒子与被 $\phi^{+\mu}(x)$ 湮灭的粒子是荷共轭的。又一次地，这是因果场，但不再是实的。通过令 $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$ ，我们同样能将该公式用于纯中性的情况，即自旋一粒子是其本身的反粒子。在这两种情况下，矢量场与其厄密伴的对易子是

$$[v^\mu(x), v^{\nu\dagger}(y)] = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta(x - y), \quad (5.3.35)$$

其中 $\Delta(x - y)$ 是函数(5.2.13)。

针对有质量的自旋1粒子，我们所构建的实场和复场满足有趣的场方程。首先，因为在方程(5.3.26)中，指数中的 p^μ 满足 $p^2 = -m^2$ ，场满足Klein-Gordon方程：

$$(\square - m^2)v^\mu(x) = 0, \quad (5.3.36)$$

这恰与标量场是相同的。另外，因为方程(5.3.24)表明了

$$e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) p_\mu = 0, \quad (5.3.37)$$

我们现在有另一方程

$$\partial_\mu v^\mu(x) = 0. \quad (5.3.38)$$

在小质量极限下，方程(5.3.36)和(5.3.38)正是所谓Lorentz规范下电动力学4-矢势的方程。

然而，我们不能通过令质量趋于零从任何有质量的自旋一粒子的理论中获得电动力学。通过考察相互作用密度 $\mathcal{H} = J_\mu v^\mu$ 产生自旋一粒子的速率可以看到这个问题，其中 J_μ 是任意4-矢流。对矩阵元取平方并对自旋一粒子的自旋z-分量求和，其给出的速率正比于

$$\sum_\sigma |\langle J_\mu \rangle e^\mu(p, \sigma)^*|^2 = \langle J_\mu \rangle \langle J_\nu \rangle^* \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}),$$

其中 \mathbf{p} 是出射自旋一粒子的动量，而 $\langle J_\mu \rangle$ 是流（在 $x = 0$ 处）在所有其它粒子的初态和末态之间矩阵元。 $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$ 中的项 $p^\mu p^\nu / m^2$ ，一般而言，在 $m \rightarrow 0$ 时会引起发射速率爆炸。避免这一灾难的唯一方法是令 $\langle J_\mu \rangle p^\mu$ 为零，其在坐标空间正是陈述：流 J^μ 必须是守恒的，也就是说 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 。诚然，流守恒的需要可以通过对态的简单计数看到。一个有质量自旋一粒子有三个自旋态，而任何无质量自旋一粒子，例如光子，只能有螺旋度+1和-1：流守恒条件正好确保了自旋一粒子的零螺旋度态在零质量极限下不被发射。

同上节讨论的标量场一样，反演可以以大致相同的方式处理。为了计算空间反演的效应，我们需要 $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ 的公式。利用 $L_\nu^\mu(-\mathbf{p}) = \mathcal{P}_\rho^\mu L_\tau^\rho(\mathbf{p}) \mathcal{P}_\nu^\tau$ 以及方程(5.3.24)，我们有

$$e^\mu(-\mathbf{p}, \sigma) = -\mathcal{P}_\nu^\mu e^\nu(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.3.39)$$

另外，为了计算时间反演的效应，我们需要 $(-1)^{1+\sigma} e^{\mu*}(-\mathbf{p}, -\sigma)$ 的公式。利用 $(-1)^{1+\sigma} e^{\mu*}(0, -\sigma) = -e^\mu(0, \sigma)$ 以及之上 $L_\nu^\mu(-\mathbf{p})$ 的公式，我们发现

$$(-1)^{1+\sigma} e^{\mu*}(-\mathbf{p}, -\sigma) = \mathcal{P}_\nu^\mu e^\nu(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.3.40)$$

利用这些结果以及4.2节中所给出的湮灭算符和产生算符的变换性质，得到湮灭场和产生场的反演变换性质是直接的。我们再一次发现，为了使因果场变换后的场在类空间隔上与之前场对易，自旋一粒子的内禀空间反演，荷共轭和时间反演相位有如下关系是必要的

$$\eta^c = \eta^* , \quad (5.3.41)$$

$$\xi^c = \xi^* , \quad (5.3.42)$$

$$\zeta^c = \zeta^* . \quad (5.3.43)$$

（特别地，如果自旋一粒子的反粒子是其本身，则所有相位必须是实的。）满足了这些相位条件，我们的因果矢量场(5.3.34)有反演变换性质

$$Pv^\mu(x)P^{-1} = -\eta^* \mathcal{P}^\mu_\nu v^\nu(\mathcal{P}x) , \quad (5.3.44)$$

$$Cv^\mu(x)C^{-1} = \xi^* v^{\mu\dagger}(x) , \quad (5.3.45)$$

$$Tv^\mu(x)T^{-1} = \zeta^* \mathcal{P}^\mu_\nu v^\nu(-\mathcal{P}x) . \quad (5.3.46)$$

特别地，方程(5.3.44)中的负号意味着，在没有伴随矩阵 \mathcal{P}^μ_ν 的额外的相位或符号时，矢量场按照一个极矢量变换，其描述了一个内禀宇称 $\eta = -1$ 的自旋一粒子。

5.4 Dirac形式体系

在齐次Lorentz群的所有表示中，有一个表示在物理中扮演了特殊的角色。正如我们在1.1节中看到的，这个表示被Dirac引入到电子理论中³，但是像往常一样，数学家已经知道它了⁴，这是因为它提供了任意维数中旋转群或Lorentz群（实际上，是它们的覆盖群——见2.7节）的两大类表示之一的基。从我们在这里所遵循的观点看，齐次Lorentz群的表示决定了在该群下变换的量子场的结构和性质，所以，以它首次出现在数学的方式，而不是由Dirac引入的方式，来描述Dirac形式体系对于我们来说将是自然的。

齐次Lorentz群的一个表示，我们通常是指一组满足群的乘法法则的矩阵 $D(\Lambda)$

$$D(\bar{\Lambda})D(\Lambda) = D(\bar{\Lambda}\Lambda) .$$

正如么正算符 $U(\Lambda)$ 一样，我们可以通过考察无限小情形来研究这些矩阵的性质，

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu , \quad (5.4.1)$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} , \quad (5.4.2)$$

这时

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu} \quad (5.4.3)$$

其中， $\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$ 是一组满足对易关系(2.4.12)的矩阵：

$$i[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} \mathcal{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \mathcal{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} \mathcal{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} \mathcal{J}^{\rho\mu} . \quad (5.4.4)$$

为了找到这样的一组矩阵，假定我们先构建出了满足如下反对易关系的矩阵 γ^μ

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (5.4.5)$$

并暂且定义

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (5.4.6)$$

利用方程(5.4.5)不难证明

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = -i\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} + i\gamma^\nu\eta^{\mu\rho} \quad (5.4.7)$$

并且，从此我们不难看到方程(5.4.6)确实满足所需的对易关系(5.4.4)。我们进一步假定矩阵 γ_μ 是不可约的；即，不存在对这些矩阵不变的固有子空间。否则，我们可以选择一组更小的场分量，其像方程(5.4.3)和(5.4.6)中那样变换，并有一组不可约的 γ_μ 。

任何一组满足类似方程(5.4.5)（或者它的欧几里得类比，其中 $\eta_{\mu\nu}$ 被替换为克罗内克 δ -符号）的关系的矩阵，被称为Clifford(克利福德)代数。这个齐次Lorentz群（或者，更精确些，它的覆盖群）的特殊表示的数学重要性源于如下事实（见5.6节）：最普遍的Lorentz群的不可约表示要么是张量，要么是按照方程(5.4.3)和(5.4.6)变换的旋量，要么是一个张量和一个旋量的直积。

对易关系(5.4.7)可以被总结为， γ^ρ 是一矢量，也就是说方程(5.4.3)满足

$$D(\Lambda)\gamma^\rho D^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\rho_\sigma \gamma^\sigma. \quad (5.4.8)$$

在同样的意义下，单位矩阵是一平庸的标量

$$D(\Lambda)\mathbf{1}D^{-1}(\Lambda) = \mathbf{1} \quad (5.4.9)$$

而方程(5.4.4)说明 $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ 是反对称张量

$$D(\Lambda)\mathcal{J}^{\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \mathcal{J}^{\mu\nu}. \quad (5.4.10)$$

矩阵 γ^μ 可以用来构建其它的全反对称张量

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} \equiv \gamma^{[\rho}\gamma^\sigma\gamma^{\tau]}, \quad (5.4.11)$$

$$\mathcal{D}^{\rho\sigma\tau\eta} = \gamma^{[\rho}\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^{\eta]}. \quad (5.4.12)$$

这里的中括号是一标准记法，表明我们对括号内指标的所有置换求和，其中正号和负号分别对应偶置换和奇置换。例如，方程(5.4.11)的完整表达式是

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} &\equiv \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau - \gamma^\rho\gamma^\tau\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\tau \\ &\quad + \gamma^\tau\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\rho - \gamma^\tau\gamma^\sigma\gamma^\rho. \end{aligned}$$

通过重复使用方程(5.4.5)，我们可以将 γ 的任何乘积写为 γ 的反对称乘积之和乘以度规张量之积，所以全反对称张量构成了任何矩阵集合的一个完全基，这些矩阵可以通过Dirac矩阵构建。

这个形式体系自动包含了一个宇称变换，通常取为

$$\beta \equiv i\gamma^0. \quad (5.4.13)$$

应用于Dirac矩阵给出

$$\beta\gamma^i\beta^{-1} = -\gamma^i, \quad \beta\gamma^0\beta^{-1} = +\gamma^0 \quad (5.4.14)$$

(我们这里指标的标记使得 μ 取遍值 $0, 1, 2, \dots$ 。)应用于 γ -矩阵的任意乘积, 相同的相似变换则仅产生一个正号或负号, 其中根据乘积中带有空间指标的 γ 是偶数个还是奇数个, 符号分别为正号和负号。特别地,

$$\beta\mathcal{J}^{ij}\beta^{-1} = \mathcal{J}^{ij}, \quad (5.4.15)$$

$$\beta\mathcal{J}^{i0}\beta^{-1} = -\mathcal{J}^{i0}. \quad (5.4.16)$$

迄今为止, 本节中的一切结果适用于任何的时空维数以及任意“度规” $\eta_{\mu\nu}$ 。然而, 在四维时空中有一特殊的特征, 即全反对称张量的指标不能超过4个, 所以张量序列 $\mathbf{1}, \gamma^\rho, \mathcal{J}^{\rho\sigma}, \mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}, \dots$ 终结于张量(5.4.12)。进一步的, 这些张量在Lorentz变换和/或宇称变换下进行不同地变换, 所以它们是完全线性独立的*。这些张量的线性独立分量的数目是: 对于 $\mathbf{1}$ 有1个, 对于 γ^ρ 有4个, 对于 $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ 有6个, 对于 $\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}$ 有4个, 对于 $\mathcal{D}^{\mu\nu\rho\sigma}$ 有1个, 总共则是16个独立分量。(普遍规则是, d -维中带有 n 个指标的全反对称张量, 其独立分量的数目等于二项式系数 $d!/n!(d-n)!$) 最多有 ν^2 个 $\nu \times \nu$ 矩阵, 所以它们至少必须有 $\sqrt{16} = 4$ 行和列。维数最小的Dirac矩阵必须是不可约的; 如果可约, 对于这些矩阵不变的子空间将构成一个维数更低的表示。因而我们将 γ 矩阵取为 4×4 矩阵。

(更普遍地, 在任意偶数 d 维时空中, 可以建立有 $0, 1, \dots, d$ 个指标的全反对称张量, 其所包含的独立分量个数总共为

$$\sum_{n=0}^d \frac{d!}{n!(d-n)!} = 2^d,$$

所以 γ 矩阵至少必须有 $2^{d/2}$ 个行和列。在奇数维的空间或时空中, n 阶和 $d-n$ 阶的全反对称张量通过如下条件线性相关**

$$\gamma^{[\mu_1\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_r}]} \propto \epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_d} \gamma_{[\mu_{r+1}\gamma^{\mu_{r+2}} \dots \gamma^{\mu_d}]},$$

其中 $r = 0, 1, 2, \dots, d-1$, $\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_d}$ 是全反对称的, 左边在 $r = 0$ 时取为单位矩阵。在这些条件下, 仅有 2^{d-1} 个独立张量, 这要求 γ -矩阵的最低维数为 $2^{(d-1)/2}$ 。)

现在回到4-维时空, 我们将选择一组明确的 4×4 γ -矩阵。一个非常普遍的选择是

$$\gamma^0 = -i \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = -i \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4.17)$$

其中 $\mathbf{1}$ 是 2×2 单位矩阵, 而 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分量是通常的Pauli矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.18)$$

*另外, 可以通过它们构成正交基来证明它们是线性独立的, 其中两个矩阵的标量积定义为它们乘积的迹。注意, 这些矩阵没有一个为零, 这是因为每一个矩阵的每个分量正比于不同 γ -矩阵的乘积, 并且这种乘积的平方等于正的或负的平方积, 因而等于 ± 1 。

**这一约束并不干扰把空间反演列入奇数维时空中Lorentz群的Dirac表示, 这是因为, 这里的张量 $\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_d}$ 在空间坐标的反演下为偶。如果我们不关心空间反演, 通过附加之上将 r 个Dirac矩阵之积与 $d-r$ 个Dirac矩阵之积关联起来的条件, 我们也能在偶数维时空中构建固有正时Lorentz群的 $2^{(d-1)/2}$ -维不可约表示。之后, 方程(5.4.19)和(5.4.20)中的子矩阵将提供一个例子。

(σ_i 正是三维中的 2×2 的 γ -矩阵。) 可以证明⁵任何其它不可约的 γ -矩阵组可以通过一个相似变换与此关联。从方程(5.4.17)中, 我们可以简单地计算出Lorentz群生成元(5.4.6):

$$\mathcal{J}^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix} \quad (5.4.19)$$

$$\mathcal{J}^{i0} = +\frac{i}{2} \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix}. \quad (5.4.20)$$

(其中, ϵ_{ijk} 是三维中的全反对称张量, 其有 $\epsilon_{123} \equiv +1$ 。) 我们注意到它们是分块对角的, 所以Dirac矩阵提供了固有正时Lorentz群的一个可约表示, 即两个不可约表示的直和, 并有 $\mathcal{J}^{ij} = \pm i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}^{k0}$ 。

将全反对称张量(5.4.11)和(5.4.12)写成一种更简单的方式是方便的。矩阵(5.4.12)是全反对称矩阵, 因而正比于赝张量 $\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}$, 其定义为一个全反对称量, 并有 $\epsilon^{0123} = +1$ 。令 ρ, σ, τ, η 分别等于0, 1, 2, 3, 我们看到

$$\mathcal{P}^{\rho\sigma\tau\eta} = 4! i \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta} \gamma_5, \quad (5.4.21)$$

其中

$$\gamma_5 \equiv -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (5.4.22)$$

矩阵 γ_5 是一赝标量, 也就是说

$$[\mathcal{J}^{\rho\sigma}, \gamma_5] = 0, \quad (5.4.23)$$

$$\beta \gamma_5 \beta^{-1} = -\gamma_5. \quad (5.4.24)$$

类似地, $\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}$ 必须正比于 $\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}$ 与某矩阵 \mathcal{A}_η 的收缩, 令 ρ, σ, τ 依次等于0, 1, 2或0, 1, 3或0, 2, 3或1, 2, 3, 我们发现

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} = 3! i \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta} \gamma_5 \gamma_\eta. \quad (5.4.25)$$

因而, 16个独立的 4×4 矩阵可以取为标量 $\mathbf{1}$, 矢量 γ^ρ , 反对称张量 $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$, “轴”矢量 $\gamma_5 \gamma_\eta$ 和赝标量 γ_5 的分量。很容易看到矩阵 γ_5 的平方等于 $\mathbf{1}$

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1} \quad (5.4.26)$$

并与所有的 γ^μ 反对易

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (5.4.27)$$

记号 γ_5 是非常合适的, 因为反对易关系(5.4.26)和(5.4.27)与方程(5.4.5)一起证明了 $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma_5$ 提供了五维时空中的Clifford代数。对于 γ -矩阵的特定 4×4 表示(5.4.17), 矩阵 γ_5 是

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (5.4.28)$$

这个表示是实用的, 因为它将 $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ 和 γ_5 简化成了分块对角形式。正如我们将看到的, 这使其在处理 $v \rightarrow c$ 的极端相对论极限下的粒子变得非常有用。(但是它不是1.1节中由Dirac最初引入的表示, 这是因为对于Dirac所关注的原子中的电子, $v \ll c$, 而在这种情况下, 采取 γ^0 而非 γ_5 是对角形式将更加方便。)

我们在这里构建的齐次Lorentz群表示不是么正的，这是因为生成元 $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ 无法全部表示成厄密矩阵。特别地，在表示(5.4.17)中， \mathcal{J}^{ij} 是厄密的，但 \mathcal{J}^{i0} 是反厄密的。通过引入方程(5.4.13)中的矩阵 $\beta \equiv i\gamma^0$ ，这种实条件可以方便地写成显然Lorentz不变的形式， β 在表示(5.4.17)中的形式为

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.29)$$

代入方程(5.4.17)给出

$$\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta = -\gamma^\mu \quad (5.4.30)$$

因而，尽管不么正，矩阵 $D(\Lambda)$ 满足赝么正关系

$$\beta D(\Lambda)^\dagger \beta = D(\Lambda)^{-1}. \quad (5.4.31)$$

另外， γ_5 是厄密的且与 β 对易，所以

$$\beta\gamma_5^\dagger\beta = -\gamma_5 \quad (5.4.32)$$

由此得出

$$\beta\beta(\gamma_5\gamma_\mu) = -\gamma_5\gamma_\mu. \quad (5.4.33)$$

Dirac矩阵及其相关矩阵也有重要的对称性质。方程(5.4.17)和(5.4.18)的插入说明 γ_μ 在 $\mu = 0, 2$ 时是对称的，在 $\mu = 1, 3$ 时是反对称的，所以

$$\gamma_\mu^T = -\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.34)$$

其中T代表转置，并且

$$\mathcal{C} \equiv \gamma_2\beta = -i \begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (5.4.35)$$

由此立即得出

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}^T = -\mathcal{C}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.36)$$

$$\gamma_5^T = +\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.37)$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^T = +\mathcal{C}\gamma_5\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}. \quad (5.4.38)$$

当我们在下一节中考察不同流的荷共轭性质时，这些符号将会表现出非凡的意义。当然，我们可以结合转置和厄密伴的结果以获得Dirac矩阵及其联合矩阵的复共轭：

$$\gamma_\mu^* = \beta\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}\beta, \quad (5.4.39)$$

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}^* = -\beta\mathcal{C}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1}\beta, \quad (5.4.40)$$

$$\gamma_5^* = -\beta\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1}\beta, \quad (5.4.41)$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^* = -\beta\mathcal{C}\gamma_5\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}\beta. \quad (5.4.42)$$

5.5 因果Dirac场

我们现在希望构建在Lorentz群下，按照上节多讨论的Dirac表示变换的粒子湮灭场和反粒子产生场。一般而言，它们采取方程(5.1.17)和(5.1.18)所给出的形式：

$$\psi_{\ell}^{+}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) \quad (5.5.1)$$

和

$$\psi_{\ell}^{-c}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p v_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) . \quad (5.5.2)$$

在这里省略了粒子种类指标。为了计算出现这些公式中的系数函数 $u_{\ell}(p, \sigma)$ 和 $v_{\ell}(p, \sigma)$ ，我们必须先使用方程(5.1.25)和(5.1.26)以找到动量为零时的 u_{ℓ} 和 v_{ℓ} ，然后使用方程(5.1.21)和(5.1.22)计算出任意动量时的 u_{ℓ} 和 v_{ℓ} ，在这两种情况中 $D_{\ell\ell}$ 上节所讨论的齐次Lorentz群的 4×4 Dirac表示。

利用方程(5.4.19)，零动量条件(5.1.25)和(5.1.26)变成*

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{m}\pm}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \sum_m \frac{1}{2} \sigma_{\bar{m}m} u_{m\pm}(0, \sigma)$$

和

$$- \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{m}\pm}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \sum_m \frac{1}{2} \sigma_{\bar{m}m} v_{m\pm}(0, \sigma) .$$

换句话说，如果我们认为 $u_{m\pm}(0, \sigma)$ 和 $v_{m\pm}(0, \sigma)$ 是矩阵 U_{\pm} 和 V_{\pm} 的 m, σ 元，那么我们就有了如下矩阵表示

$$U_{\pm} \mathbf{J}^{(j)} = \frac{1}{2} \sigma U_{\pm} \quad (5.5.3)$$

和

$$- V_{\pm} \mathbf{J}^{(j)*} = \frac{1}{2} \sigma V_{\pm} . \quad (5.5.4)$$

现在， $(2j + 1)$ -维表示 $\mathbf{J}^{(j)}$ 和 $-\mathbf{J}^{(j)*}$ 以及 2×2 矩阵 $\frac{1}{2} \sigma$ 完全提供了旋转群Lie代数的不可约表示。群论中一个称为Schur引理⁶的普遍定理告诉我们，当像 U_{\pm} 或 V_{\pm} 的一个矩阵连接了方程(5.5.3)和(5.5.4)中那样的两个表示，那么这个矩阵要么为零（在这里对这种可能性不感兴趣）要么是可平方且非奇异的。因此，Dirac场仅能描述自旋 $j = \frac{1}{2}$ 的粒子（使得 $2j + 1 = 2$ ），并且矩阵 $\mathbf{J}^{(1/2)}$ 和 $-\mathbf{J}^{(1/2)*}$ 与 $\frac{1}{2} \sigma$ 只相差一个相似变换。事实上，在旋转生成元的标准表示(2.5.21)，(2.5.22)中，我们有 $\mathbf{J}^{(1/2)} = \frac{1}{2} \sigma$ 和 $-\mathbf{J}^{(1/2)*} = \frac{1}{2} \sigma_2 \sigma \sigma_2$ 。由此得出 U_{\pm} 和 V_{\pm} 必须与 σ 对易，因而正比于一个单位矩阵：

$$u_{m\pm}(0, \sigma) = c_{\pm} \delta_{m\sigma} , \quad v_{m\pm}(0, \sigma) = -i d_{\pm} (\sigma_2)_{m\sigma} . \quad (5.5.5)$$

换句话说

$$u(0, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} c_{+} \\ 0 \\ c_{-} \\ 0 \end{bmatrix} , \quad u(0, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{+} \\ 0 \\ c_{-} \end{bmatrix} ,$$

*我们在这里扔掉了种类指标 n ，并将4-分量指标 ℓ 替换为一对指标，一个是2-值指标 m ，用来标记方程(5.4.19)和(5.4.20)中子矩阵的行与列；另一个指标取值 \pm ，用来标记方程(5.4.19)和(5.4.20)中超矩阵的行与列

$$v(0, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_+ \\ 0 \\ c_- \end{bmatrix}, \quad v(0, -\frac{1}{2}) = - \begin{bmatrix} d_+ \\ 0 \\ d_- \\ 0 \end{bmatrix}$$

而有限动量的旋量是

$$u(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} D(L(p)) u(0, \sigma), \quad (5.5.6)$$

$$v(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} D(L(p)) v(0, \sigma). \quad (5.5.7)$$

还需讨论的只剩常数 c_{\pm} 和 d_{\pm} 。一般而言，存在很大的任意性——如果我们想，我们甚至可以选择 c_- 和 d_- 或 c_+ 和 d_+ 为零，这使得Dirac场将只有两个非零分量。能够告诉我们 c_{\pm} 或 d_{\pm} 的相对值的唯一物理原理是宇称守恒。我们回忆一下，在空间反演下，粒子湮灭算符和反粒子产生算符经历变换：

$$P a(\mathbf{p}, \sigma) P^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma) \quad (5.5.8)$$

$$P a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) P^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma) \quad (5.5.9)$$

因而

$$P \psi_{\ell}^{+}(x) P^{-1} = \eta^* (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p u_{\ell}(-\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot \mathcal{P}x} a(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.10)$$

$$P \psi_{\ell}^{-c}(x) P^{-1} = \eta^c (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p v_{\ell}(-\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot \mathcal{P}x} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.11)$$

另外，方程(5.4.16)，(5.1.21)和(5.1.22)给出

$$u(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} \beta D(L(\mathbf{p})) \beta u(0, \sigma) \quad (5.5.12)$$

$$v(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} \beta D(L(\mathbf{p})) \beta v(0, \sigma). \quad (5.5.13)$$

(由于 $\beta^2 = 1$ ，我们不再区分 β 和 β^{-1} 。)为了使宇称算符将点 x 处的场变换为正比于点 $\mathcal{P}x$ 处的场的某个量， $\beta u(0, \sigma)$ 和 $\beta v(0, \sigma)$ 分别正比于 $u(0, \sigma)$ 和 $v(0, \sigma)$ 是必要的：

$$\beta u(0, \sigma) = b_u u(0, \sigma), \quad \beta v(0, \sigma) = b_v v(0, \sigma), \quad (5.5.14)$$

其中 b_u 和 b_v 是符号因子， $b_u^2 = b_v^2 = 1$ 。在该情况下，场有简单的空间反演性质：

$$P \psi^{+}(x) P^{-1} = \eta^* b_u \beta \psi^{+}(\mathcal{P}x), \quad (5.5.15)$$

$$P \psi^{-c}(x) P^{-1} = \eta^c b_v \beta \psi^{-c}(\mathcal{P}x). \quad (5.5.16)$$

通过调整场的总体尺度，我们可以选择零动量处的系数函数有如下形式：

$$u(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(0, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_u \end{bmatrix}, \quad (5.5.17)$$

$$v(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_v \end{bmatrix}, \quad v(0, -\frac{1}{2}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.18)$$

现在, 让我们尝试把湮灭场和产生场放进一个线性组合中

$$\psi(x) = \kappa\psi^+(x) + \lambda\psi^{-c}(x) \quad (5.5.19)$$

使其与本身以及处在类空间隔上的厄密伴对易或反对易。一个直接的计算给出

$$[\psi_\ell(x), \psi_{\bar{\ell}}^\dagger(x)]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \int d^3p [|\kappa|^2 N_{\ell\bar{\ell}}(\mathbf{p})e^{ip \cdot (x-y)} \mp |\lambda|^2 M_{\ell\bar{\ell}}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot (x-y)}], \quad (5.5.20)$$

其中

$$N_{\ell\bar{\ell}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} u_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma) u_{\bar{\ell}}^*(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.21)$$

$$M_{\ell\bar{\ell}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} v_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma) v_{\bar{\ell}}^*(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.22)$$

通过使用本征值条件(5.5.14)或者显然的公式(5.5.17)和(5.5.18), 我们发现动量为零时

$$N(0) = \frac{1 + b_u\beta}{2}, \quad M(0) = \frac{1 + b_v\beta}{2}. \quad (5.5.23)$$

那么从方程(5.5.6)和(5.5.7)中我们得到

$$N(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0} D(L(p)) [1 + b_u\beta] D^\dagger(L(p)), \quad (5.5.24)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0} D(L(p)) [1 + b_v\beta] D^\dagger(L(p)). \quad (5.5.25)$$

赝么正条件(5.4.31)产生

$$D(L(p))\beta D^\dagger(L(p)) = \beta$$

以及

$$D(L(p))D^\dagger(L(p)) = D(L(p))\beta D^{-1}(L(p))\beta.$$

我们又想起 $\beta = i\gamma^0$, 所以, 通过使用Lorentz变换规则(5.4.8), 我们有

$$D(L(p))\beta D^{-1}(L(p)) = iL_\mu^0 \gamma^\mu = -ip_\mu \gamma^\mu / m. \quad (5.5.26)$$

将这个也加进来, 我们发现**

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + b_u m] \beta, \quad (5.5.27)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + b_v m] \beta. \quad (5.5.28)$$

**有时Dirac旋量中会包含一个额外因子 $\sqrt{p^0/m}$, 使得 m 取代自旋求和(5.5.27)和(5.5.28)分母中的 p^0 。这里所采用的归一化的优点是光滑地经过 $m=0$ 的情况。

在方程(5.5.20)中利用这个, 最终得出

$$[\psi_\ell(x), \psi_\ell^\dagger(x)]_{\mp} = (|\kappa|^2 [-\gamma^\mu \partial_\mu + b_u m] \beta \Delta_+(x-y) \mp |\lambda|^2 [-\gamma^\mu \partial_\mu + b_v m] \beta \Delta_+(x-y))_{\ell\bar{\ell}}. \quad (5.5.29)$$

其中 $\Delta_+(x-y)$ 是5.2节所引入的函数

$$\Delta_+(x) \equiv \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} e^{ip \cdot x}.$$

我们在5.2节看到, 对于类空的 $x-y$, $\Delta_+(x-y)$ 是 $x-y$ 的偶函数, 显然, 它的一阶导数是 $x-y$ 的奇函数。因此为了使对易子或反对易子中的导数项和非导数项在类空间隔上都为零, 有如下充分必要条件

$$|\kappa|^2 = \mp |\lambda|^2 \quad (5.5.30)$$

和

$$|\kappa|^2 b_u = \mp |\lambda|^2 b_v. \quad (5.5.31)$$

显然, 仅当我们选择上面的符号, $\mp = -$, 方程(5.5.30)才可能成立; 即, 由Dirac场所描述的粒子必是费米子。那么必有 $|\kappa|^2 = |\lambda|^2$ 和 $b_u = -b_v$ 。像标量场一样, 我们可以重定义产生和湮灭算符的相对相位以使比值 κ/λ 为正实数, 在这种情况下 $\kappa = \lambda$, 并且通过调整场 ψ 的总体尺度与相位, 我们可以令

$$\kappa = \lambda = 1. \quad (5.5.32)$$

最后, 如果我们想, 我们可将 ψ 替换为 $\gamma_5 \psi$, 这改变了 b_u 和 b_v 的符号, 所以我们总可以令

$$b_u = -b_v = +1. \quad (5.5.33)$$

为了将来的使用, 我们在这里重新写成Dirac场

$$\psi_\ell(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p [u_\ell(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + v_\ell(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)] \quad (5.5.34)$$

其中在零动量处的系数函数是

$$u(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(0, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.5.35)$$

$$v(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v(0, -\frac{1}{2}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.36)$$

自旋和是

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + m] \beta, \quad (5.5.37)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + m] \beta, \quad (5.5.38)$$

所以，反对易子由方程(5.5.20)给定为

$$[\psi_\ell(x), \psi_\ell^\dagger(x)]_+ = \{[-\gamma^\mu \partial_\mu + m]\beta\}_{\ell\bar{\ell}} \Delta(x-y). \quad (5.5.39)$$

现在回到要求：场 $\psi(x)$ 在空间反演下必须变换成正比于 $\psi(\mathcal{P}x)$ 的某个量。要使之成为可能，方程(5.5.15)和(5.5.16)中的相位必须相等，因而粒子以及它们反粒子的内禀宇称必须有如下关系

$$\eta^c = -\eta^*. \quad (5.5.40)$$

即，由自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子及其反粒子构成的态，其内禀宇称为奇。正是由于这个原因，类似 ρ^0 和 J/ψ 的粒子才能解释为夸克-反夸克对的s-波束缚态。方程(5.5.15)和(5.5.16)现在给出因果Dirac场在空间反演下的变换

$$P\psi(x)P^{-1} = \eta^* \beta \psi(\mathcal{P}x). \quad (5.5.41)$$

在继续讨论其它反演之前，在这里很适合提起，方程(5.5.14)，(5.5.33)和(5.5.26)说明了 $u(\mathbf{p}, \sigma)$ 和 $v(\mathbf{p}, \sigma)$ 分别是 $-ip^\mu \gamma_\mu / m$ 本征值为+1和-1的本征矢：

$$(ip^\mu \gamma_\mu + m)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (-ip^\mu \gamma_\mu + m)v(\mathbf{p}, \sigma) = 0. \quad (5.5.42)$$

那么由此得出场(5.5.34)满足微分方程

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0. \quad (5.5.43)$$

这正是著名的自旋 $\frac{1}{2}$ 的自由粒子的Dirac方程。根据这里所采取的观点，将固有正时Lorentz群的两个不可约表示放在一起以构成在空间反演下也简单变换的场，我们使用过一个约定，Dirac方程只不过是该约定的Lorentz不变再录。

为了得到Dirac场的荷共轭性质与时间反演性质，我们需要系数函数 u 和 v 的复共轭表达式。这些函数在零动量处是实的，但为了获得有限动量的系数函数，我们不得不乘以复矩阵 $D(L(p))$ 。从方程(5.4.40)中，我们看到对于一般实的 $\omega_{\mu\nu}$ ：

$$[\exp(\frac{1}{2}i \mathcal{J}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu})]^* = \beta \mathcal{C} \exp(\frac{1}{2}i \mathcal{J}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}) \mathcal{C}^{-1} \beta$$

并且，特别地

$$D(L(p))^* = \beta \mathcal{C} D(L(p)) \mathcal{C}^{-1} \beta.$$

我们同时注意到 $\mathcal{C}^{-1} \beta u(0, \sigma) = -v(0, \sigma)$ 及 $\mathcal{C}^{-1} \beta v(0, \sigma) = -u(0, \sigma)$ ，所以

$$u^*(\mathbf{p}, \sigma) = -\beta \mathcal{C} v(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.44)$$

$$v^*(\mathbf{p}, \sigma) = -\beta \mathcal{C} u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.45)$$

为了使场在荷共轭下所变换的场与其在类空间隔上对易，粒子和反粒子的荷共轭宇称又一次要有如下关系

$$\xi^c = \xi^*. \quad (5.5.46)$$

在这种情况下，场的变换为

$$C\psi(x)C^{-1} = -\xi^* \beta \mathcal{C} \psi^*(x). \quad (5.5.47)$$

(我们将右边场的厄密伴写为 ψ^* 而非 ψ^\dagger , 是为了强调这依旧是个列向量而非行向量。)

尽管我们对粒子及其它们的反粒子做了区分, 但是我们排除这两种粒子实际是一种的可能性。这种自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子称为*Majorana*费米子。根据导出方程(5.5.47)的依据, 这种粒子的Dirac场必须满足实条件

$$\psi(x) = -\beta \mathcal{C} \psi^*(x). \quad (5.5.48)$$

对于Majorana费米子, 内禀空间反演宇称必须是虚的, $\eta = \pm i$, 而荷共轭宇称必须是实的, $\xi = \pm 1$ 。

如果一个态由一个粒子与一个反粒子构成, 那么费米子和玻色子在这种态的内禀荷共轭相位上有一个重要的差异。这种态可以写为

$$\Phi \equiv \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3p \int d^3p' \chi(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}', \sigma') \Phi_0,$$

其中 Φ_0 是真空态。在荷共轭下, 这个态变换成

$$\mathcal{C}\Phi = \xi \xi^c \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3p \int d^3p' \chi(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma') \Phi_0.$$

交换积分变量和求和变量, 并利用产生算符的反对易关系和方程(5.5.46), 我们可以将其重写为

$$\mathcal{C}\Phi = - \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3p \int d^3p' \chi(\mathbf{p}', \sigma; \mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}', \sigma') \Phi_0.$$

即, 如果一个粒子由Dirac场描述, 对于由该粒子及其反粒子构成的态, 其内禀荷共轭宇称为奇, 也就是说, 如果态的波函数 χ 在粒子动量及自旋的交换下为偶或奇, 那么作用在该态上的荷共轭算符分别给出符号 -1 或 $+1$ 。这里的经典例子是电子偶素, 一个电子和一个正电子构成的束缚态。最低的两个态是总自旋分别为 $s = 0$ 和 $s = 1$ 的一对近简并 s -波态, 分别被称为仲电子偶素和正电子偶素。这两个态的波函数在动量的交换下为偶, 而在自旋 z -分量的交换下分别为奇和偶, 所以仲电子偶素和正电子偶素分别有 $C = +1$ 和 $C = -1$ 。电子偶素的衰变模型戏剧性地证实了这些值: 仲电子偶素快速衰变成一对光子(其每一个有 $C = -1$), 而正电子偶素只能以慢得多的速率衰变成三个或者更多的光子。以同样的方法, 在经历一个单光子中间态的高能电子-正电子湮灭中, 单个 ρ^0 和 ω^0 介子作为一个共振产生, 所以它们必须有 $C = -1$, 这与它们解释成夸克-反夸克对的轨道角动量为零而总夸克自旋为1的束缚态是一致的。

现在我们来处理时间反演。回忆由方程(4.2.15)给出的粒子湮灭算符和反粒子产生算符的变换性质:

$$\mathcal{T} a(\mathbf{p}, \sigma) \mathcal{T}^{-1} = \zeta^* (-1)^{\frac{1}{2} - \sigma} a(-\mathbf{p}, -\sigma), \quad (5.5.49)$$

$$\mathcal{T} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) \mathcal{T}^{-1} = \zeta^c (-1)^{\frac{1}{2} - \sigma} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma). \quad (5.5.50)$$

因此, 场的时间反演给出

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \psi_\ell(x) \mathcal{T}^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p (-1)^{\frac{1}{2} - \sigma} \\ &\times [\zeta^* u_\ell^*(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a(-\mathbf{p}, -\sigma) + \zeta^c v_\ell^*(p, \sigma) e^{ip \cdot x} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma)] \end{aligned}$$

为了将其变成 ψ 的形式，我们将积分变量和求和变量重新定义为 $-\mathbf{p}$ 和 $-\sigma$ ，所以我们 $u_\ell^*(-\mathbf{p}, -\sigma)$ 的 $u_\ell(\mathbf{p}, \sigma)$ 表达式和 $v_\ell^*(-\mathbf{p}, -\sigma)$ 的 $v_\ell(\mathbf{p}, \sigma)$ 表达式。对于这个目的，我们可以利用 \mathcal{J}^{i0} 与 β 反对易与 γ_5 对易以及之前 $D(L(p))^*$ 的结果写出

$$D^*(L(-\mathbf{p})) = \gamma_5 \beta D^*(L(\mathbf{p})) \beta \gamma_5 = \gamma_5 \mathcal{C} D(L(\mathbf{p})) \mathcal{C}^{-1} \gamma_5 .$$

另外，方程(5.4.35)和(5.5.35)—(5.5.36)给出

$$\gamma_5 \mathcal{C}^{-1} u(0, -\sigma) = (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} u(0, \sigma) ,$$

$$\gamma_5 \mathcal{C}^{-1} v(0, -\sigma) = (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} v(0, \sigma) ,$$

因而

$$(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} u_\ell^*(-\mathbf{p}, -\sigma) = -\gamma_5 \mathcal{C} u_\ell(\mathbf{p}, \sigma) , \quad (5.5.51)$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} v_\ell^*(-\mathbf{p}, -\sigma) = -\gamma_5 \mathcal{C} v_\ell(\mathbf{p}, \sigma) . \quad (5.5.52)$$

那么，我们看到为了使时间反演把Dirac场变换成正比于它在时间反演点的某个量（与其在类空间隔上对易），内禀时间反演相位必须有如下的关系

$$\zeta^c = \zeta^* \quad (5.5.53)$$

并且在这种情况下

$$\mathbb{T}\psi(x)\mathbb{T}^{-1} = -\zeta^* \gamma_5 \mathcal{C} \psi(-\mathcal{P}x) . \quad (5.5.54)$$

现在让我们考察如果用Dirac场及它们的厄密伴构建标量相互作用密度。之前已经提到Dirac表示不是么正的，所以 $\psi^\dagger\psi$ 不是标量。为了解决这个问题，定义一种新的伴将是方便的：

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \beta . \quad (5.5.55)$$

利用么正条件(5.4.31)，我们看到与 $\bar{\psi}$ 双线性收缩的费米有如下Lorentz变换性质

$$U_0(\Lambda)[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]U_0^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(\Lambda x)D(\Lambda)MD^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x) . \quad (5.5.56)$$

另外，在空间反演下

$$\mathbb{P}[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]\mathbb{P}^{-1} = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\beta M\beta\psi(\mathcal{P}x) . \quad (5.5.57)$$

取该矩阵 M 为 $\mathbf{1}$, γ^μ , $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$ 和 γ_5 所产生的双线性 $\bar{\psi}M\psi$ 分别按照一个标量，矢量，张量，轴矢量和赝标量变换。（“轴”和“赝”代表它们有着与普通矢量和标量相反的空间反演性质：赝标量宇称为负，而轴矢量的空间部分和时间部分的宇称分别为正和负。）当双线性中的两个费米场代表不同的粒子种类，除了空间反演会产生一个内禀宇称的比值，这些结果同样成立。

例如， β 衰变的原始理论包含一个正比于 $\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu$ 的相互作用。稍后意识到最普遍的Lorentz不变且宇称守恒的非导数 β -衰变相互作用的形式为，如下乘积的线性组合， γ_μ 被替换成5个协变 4×4 矩阵 $\mathbf{1}$, γ^μ , $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$ 和 γ_5 中的一个。（正如在第2章所讨论的，我们对空间反演算符进行定义使得光子，中子和电子都有宇称+1。如果中微子是无质量的，如有必要，通过将中微子场替换为 $\gamma_5\psi_\nu$ ，那么它的宇称也可以被定义为+1。）当李政道和杨振宁⁷在1956年

将宇称守恒划为一个问题时，他们展开了可能的非导数相互作用的列表，这个列表包含正比于 $\bar{\psi}_p M \psi_n \bar{\psi}_e M \psi_\nu$ 以及 $\bar{\psi}_p M \psi_n \bar{\psi}_e M \gamma_5 \psi_\nu$ 的十项，其中 M 取遍了矩阵 $\mathbf{1}, \gamma^\mu, \mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma_5 \gamma^\mu$ 和 γ_5 。

研究这些双线性的荷共轭性质也是有某些用处的。利用方程(5.5.47)和(5.4.34)—(5.4.38)，我们有

$$\begin{aligned} C(\bar{\psi} M \psi) C^{-1} &= (\beta \mathcal{C} \psi)^T \beta M (\beta \mathcal{C} \psi^*) = -(\beta \mathcal{C} \psi^*)^T M^T \mathcal{C} \psi \\ &= \bar{\psi} \mathcal{C}^{-1} M^T \mathcal{C} \psi = \pm \bar{\psi} M \psi \end{aligned} \quad (5.5.58)$$

最后一个表达式中的符号对于矩阵 $\mathbf{1}, \gamma_5 \gamma^\mu$ 和 γ_5 是 $+$ ，对于 γ^μ 和 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 则是 $-$ 。（第一行中的负号源于Fermi统计。我们忽视了c-数反对易子。）因此，一个与流 $\bar{\psi} M \psi$ 相互作用的玻色场，对于标量，赝标量和轴矢量必须有 $C = +1$ ，而对于矢量和反对易张量则有 $C = -1$ 。这是证明 π^0 （其与赝标量或轴矢量核子流耦合）有 $C = +1$ 而光子有 $C = -1$ 的一种方法。

5.6 齐次Lorentz群的一般不可约表示*

我们现在将矢量场和Dirac场的特殊情况推广至场在齐次Lorentz群的一般不可约表示下变换的情况。所有的场可以构建为这些不可约场的直和。

固有正时Lorentz群的一般表示（或者更恰当些，它的无限小部分）由一组矩阵 $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ 提供，这组矩阵满足群生成元的对易关系(5.4.4)

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] = i(\mathcal{J}_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu} + \mathcal{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \mathcal{J}_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} - \mathcal{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}), \quad (5.6.1)$$

（当然， $\mathcal{J}_{\mu\nu} = -\mathcal{J}_{\nu\mu}$ ，并且 $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ 的指标像往常一样通过与 $\eta^{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 收缩进行上升和下降。）为了看到如何构建这样的场，首先将 $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ 的6个独立分量分成两个3-矢：一个角动量矩阵

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_{23}, \quad \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_{31}, \quad \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_{12} \quad (5.6.2)$$

和一个推动

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{J}_{10}, \quad \mathcal{K}_2 = \mathcal{J}_{20}, \quad \mathcal{K}_3 = \mathcal{J}_{30}. \quad (5.6.3)$$

那么方程(5.6.1)变成

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k, \quad (5.6.4)$$

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{K}_j] = i\epsilon_{ijk} \mathcal{K}_k, \quad (5.6.5)$$

$$[\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = -i\epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k, \quad (5.6.6)$$

其中， i, j, k 取遍值1, 2, 3，而 ϵ_{ijk} 是 $\epsilon_{123} = +1$ 的全反对称张量。方程(5.6.4)说明了矩阵 \mathcal{J} 生成了Lorentz群的旋转子群的一个表示，而方程(5.6.5)则表示 \mathcal{K} 是一个3-矢。方程(5.6.6)右边中的负号源于 $\eta_{00} = -1$ ，并在下文中扮演了一个关键角色。

用两个退耦自旋3-矢替换矩阵 \mathcal{J} 和 \mathcal{K} 是非常实用的，写为

$$\mathcal{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{J} + i\mathcal{K}) \quad (5.6.7)$$

$$\mathcal{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{J} - i\mathcal{K}) \quad (5.6.8)$$

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外，可以在第一次阅读时省略。

很容易看到对易关系(5.6.4)—(5.6.6)等价于

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{A}_k, \quad (5.6.9)$$

$$[\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_k, \quad (5.6.10)$$

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j] = 0, \quad (5.6.11)$$

我们找到满足方程(5.6.9)—(5.6.11)的矩阵的方法与找到表示一对非耦合粒子自旋的矩阵的方法是相同的——当做一个直和。即，我们用一对整数和/或半整数 a, b 标记这些矩阵的行与列， a, b 取遍如下的值

$$a = -A, -A + 1, \dots, +A, \quad (5.6.12)$$

$$b = -B, -B + 1, \dots, +B \quad (5.6.13)$$

并令**

$$(\mathcal{A})_{a'b', ab} = \delta_{b'b}\mathbf{J}_{a'a}^{(A)}, \quad (5.6.14)$$

$$(\mathcal{B})_{a'b', ab} = \delta_{a'a}\mathbf{J}_{b'b}^{(B)}, \quad (5.6.15)$$

其中 $\mathbf{J}^{(A)}$ 和 $\mathbf{J}^{(B)}$ 是自旋 A 和 B 的标准自旋矩阵：

$$\left(\mathbf{J}_3^{(A)}\right)_{a'a} = a\delta_{a'a}, \quad (5.6.16)$$

$$\left(\mathbf{J}_1^{(A)} \pm i\mathbf{J}_2^{(A)}\right)_{a'a} = \delta_{a', a\pm 1}\sqrt{(A \mp a)(A \pm a + 1)}, \quad (5.6.17)$$

对 $\mathbf{J}^{(B)}$ 类似。这个表示被正的整数和/或半整数 A 和 B 所标记。我们看到 (A, B) 表示的维数为 $(2A + 1)(2B + 1)$ 。

齐次Lorentz群的有限维表示不是幺正的，这是因为 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是厄密的，因而 \mathcal{J} 是厄密的而 \mathcal{K} 是反厄密的。这源于方程(5.6.7)和(5.6.8)中的 i ，这个 i 是(5.6.6)中的负号所要求的，因而源于齐次Lorentz群与紧致4-维旋转群 $SO(4)$ 不是相同的事实，它相反是被称为 $SO(3, 1)$ 的非紧致群。只有紧致群才能有有限维幺正表示（除了表示中的非紧致部分平庸地被单位元表示）。用非幺正表示处理不存在问题，这是因为我们目前所关心的是场，而不是波函数，它不需要有Lorentz不变正定范数。

相比之下，旋转群被幺正地表示，其生成元被厄密矩阵表示

$$\mathcal{J} = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \quad (5.6.18)$$

通过平常的矢量加法规则，我们可以看到根据齐次Lorentz群的 (A, B) 表示变换的场，其分量像自旋 j 的物体旋转，其中

$$j = A + B, A + B - 1, \dots, |A - B|.$$

这足以将 (A, B) 表示与或许更熟悉的张量和旋量等同起来。例如，一个 $(0, 0)$ 场显然是标量，其仅有单个 $j = 0$ 的分量。一个 $(\frac{1}{2}, 0)$ 或 $(0, \frac{1}{2})$ 场仅能有 $j = +\frac{1}{2}$ ；它们是Dirac旋量的上两个分

**有另一种形式体系⁸，基于旋转群的自旋 j 表示可以写为 $2j$ 个自旋 $1/2$ 表示的对称之积——即，一个有 $2j$ 个二值指标的对称 $SU(2)$ 张量。因此，我们能够写出属于 (A, B) 表示的场，该场有 $2A$ 个二值 $(1/2, 0)$ 指标和 $2B$ 个二值 $(0, 1/2)$ 指标，后者写时加点用以与前者区分。

量（即， $\gamma_5 = +1$ ）和下两个分量（ $\gamma_5 = -1$ ）。一个 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 场有 $j = 1$ 的分量和 $j = 0$ 的分量，对应于4-矢 v^μ 的空间部分 \mathbf{v} 和时间分量 v^0 。更普遍地，一个 (A, A) 场包含的项仅有整数自旋 $2A, 2A - 1, \dots, 0$ ，并对应一个 $2A$ 阶的无迹对称张量。（注意，四维中， $2A$ 阶对称张量的独立分量的数目是

$$\frac{4 \cdot 5 \cdots (4 + 2A - 1)}{(2A)!} = \frac{(3 + 2A)!}{6(2A)!}$$

而无迹条件将其减少为

$$\frac{(3 + 2A)!}{6(2A)!} - \frac{(1 + 2A)!}{6(2A - 2)!} = (2A + 1)^2,$$

这正是一个 (A, A) 场所预期的。) 另外一个例子：一个 $(1, 0)$ 场或 $(0, 1)$ 场仅能有 $j = 1$ ，并对应于一个反对称张量 $F^{\mu\nu}$ ，其对于 $(1, 0)$ 场和 $(0, 1)$ 场分别满足进一步的不可约“对偶”条件

$$F^{\mu\nu} = \pm \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}.$$

当然，仅在四维中，一个二指标反对称张量 $F^{\mu\nu}$ 才能被分成这样的“自对偶”部分和“反自对偶”部分。

一个 N 阶一般张量按照 N 个 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 4-矢表示的直积变换。因而它能被分解成（通过恰当的对称化和反对称化以及取迹）不可约项 (A, B) ，其中 $A = N/2, N/2 - 1, \dots$ 而 $B = N/2, N/2 - 1, \dots$ 。以这种方式，我们可以构建 $A + B$ 是整数的任何不可约表示 (A, B) 。对于 $A + B$ 是半奇数的自旋表示，其可以类似地用这些张量表示的直积和Dirac表示 $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ 构建。例如，取矢量 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 表示与Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ 表示的直积，这给出一个旋量-矢量 ψ^μ ，其根据如下可约表示变换

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})] = (\frac{1}{2}, 1) \oplus (\frac{1}{2}, 0) \oplus (1, \frac{1}{2}) \oplus (0, \frac{1}{2}).$$

$\gamma_\mu \psi^\mu$ 将按照一个普通的 $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ Dirac场变换，所以通过要求 $\gamma_\mu \psi^\mu = 0$ ，我们可以孤立出 $(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})$ 表示[†]。这是Rarita-Schwinger场⁹。

迄今为止，我们在本节中仅考察了固有正时Lorentz群的表示。在包含时间反演的Lorentz群的任何表示中，必存在一个矩阵 β ，其反转带有奇数个空间指标的张量的符号，并且，特别地

$$\beta \mathcal{J} \beta^{-1} = +\mathcal{J}, \quad \beta \mathcal{K} \beta^{-1} = -\mathcal{K}. \quad (5.6.19)$$

以矩阵(5.6.7)和(5.6.8)的形式则是

$$\beta \mathcal{A} \beta^{-1} = \mathcal{B}, \quad \beta \mathcal{B} \beta^{-1} = \mathcal{A}. \quad (5.6.20)$$

因此，除非 $A = B$ ，固有正时齐次Lorentz群的不可约 (A, B) 表示不提供包含空间反演的Lorentz群的表示。正如我所看到的，这些 (A, A) 表示是标量，矢量和对称无迹张量。若 $A \neq B$ ，包含空间反演的Lorentz群的不可约表示是直和 $(A, B) \oplus (B, A)$ ，维数为 $2(2A + 1)(2B + 1)$ 。这些表示中的一个就是5.4节所讨论的 $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ Dirac表示。 4×4 矩阵(5.4.29)提供了该表示的 β -矩阵。另一较熟悉的例子是 $(1, 0) \oplus (0, 1)$ 表示，正如我们所看到的，其是包含自对偶部分和反自对偶部分的二阶反对称张量。

[†]根据方程(5.6.18)，这种场在普通旋转下按照两个 $j = 3/2$ 分量与两个 $j = \frac{1}{2}$ 分量的直和变换。通过附加Dirac方程 $[\gamma^\nu \partial_\nu + m]\psi^\mu = 0$ ，加倍被消除，而剩余的 $j = \frac{1}{2}$ 分量被 $\partial_\mu \psi^\mu = 0$ 的要求消除。在这些条件下，场描述一个自旋 $j = 3/2$ 的粒子。

5.7 一般因果场*

我们现在接着构建上节所描述的一般不可约 (A, B) 表示变换的场。指标 ℓ 在这里被替换为一对指标 a, b ，其取遍范围(5.6.12)，(5.6.13)，所以场现在写为

$$\begin{aligned} \psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p \left[\kappa a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \right. \\ \left. + \lambda a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \right] \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

其中 κ 和 λ 是任意常数。我们在这里保留反粒子是其本身的可能性，在该情况下 $a^c(\mathbf{p}, \sigma) = a(\mathbf{p}, \sigma)$ 。

我们首个任务还是找到零动量系数函数 $u_{ab}(0, \sigma)$ 和 $v_{ab}(0, \sigma)$ 。 $u(0, \sigma)$ 和 $v(0, \sigma)$ 上的基本条件(5.1.25)—(5.1.26)在这里则是

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} &= \sum_{a,b} \mathcal{J}_{\bar{a}\bar{b},ab} u_{ab}(0, \sigma), \\ - \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} &= \sum_{a,b} \mathcal{J}_{\bar{a}\bar{b},ab} v_{ab}(0, \sigma), \end{aligned}$$

或者利用方程(5.6.14)—(5.6.15)

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \sum_a \mathbf{J}_{\bar{a}a}^{(A)} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \sigma) + \sum_b \mathbf{J}_{\bar{b}b}^{(B)} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \sigma), \quad (5.7.2)$$

$$- \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \sum_a \mathbf{J}_{\bar{a}a}^{(A)} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \sigma) + \sum_b \mathbf{J}_{\bar{b}b}^{(B)} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \sigma). \quad (5.7.3)$$

但是方程(5.7.2)是Clebsch-Gordon系数 $C_{AB}(j\sigma; ab)$ 的定义条件！这些系数被如下的要求所定义，如果态 Ψ_{ab} 在无限小旋转的变换为

$$\delta \Psi_{ab} = i \sum_{\bar{a}} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{a}a}^{(A)} \Psi_{\bar{a}b} + i \sum_{\bar{b}} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{b}b}^{(B)} \Psi_{a\bar{b}}$$

那么，在相同旋转下，态

$$\Psi_{\sigma}^j \equiv \sum_{ab} C_{AB}(j\sigma; ab) \Psi_{ab}$$

的变换为

$$\delta \Psi_{\sigma}^j = i \sum_{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} \Psi_{\bar{\sigma}}^j.$$

代入方程(5.7.2)说明系数 $u_{ab}(0, \sigma)$ 是满足这个要求的，因而，除了一个可能的比例因子， $u_{ab}(0, \sigma)$ 正是 $C_{AB}(j\sigma; ab)$ 。这个常数通常选择使得

$$u_{ab}(0, \sigma) = (2m)^{-1/2} C_{AB}(j\sigma; ab). \quad (5.7.4)$$

这个结果是唯一的，这是因为齐次Lorentz群的每个不可约 (A, B) 表示至多包含旋转群的自旋 j 表示一次。类似的，代入方程(5.6.16)—(5.6.17)说明角动量矩阵的复共轭是

$$- \mathbf{J}_{\sigma\sigma'}^{(j)*} = (-1)^{\sigma-\sigma'} \mathbf{J}_{-\sigma, -\sigma'}^{(j)}. \quad (5.7.5)$$

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外，可以在第一次阅读时省略。

因此, 如果我们将方程(5.7.3)写成 $(-1)^{j+\sigma}v_{ab}(\mathbf{p}, -\sigma)$ 的形式, 它的形式与方程(5.7.2)相同。对常数因子进行一个合适的调整后, $v(0, \sigma)$ 的唯一解是

$$v_{ab}(0, \sigma) = (-1)^{j+\sigma}u_{ab}(0, -\sigma) . \quad (5.7.6)$$

我们现在必须施加一个推动以计算有限动量的系数函数。对于一固定方向 $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, 我们可以将推动(2.5.24)写成参量 θ 的函数, θ 的定义为

$$\cosh \theta = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}/m , \quad \sinh \theta = |\mathbf{p}|/m \quad (5.7.7)$$

取代 $L^\mu_\nu(p)$, 我们写成 $L^\mu_\nu(\theta)$, 其中

$$\begin{aligned} L^i_k(\theta) &= \delta_{ik} + (\cosh \theta - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k , \\ L^i_0(\theta) &= L^0_i(p) = \hat{p}_i \sinh \theta , \\ L^0_0(\theta) &= \cosh \theta . \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

这种参量化的优点是

$$L(\bar{\theta})L(\theta) = L(\bar{\theta} + \theta) . \quad (5.7.9)$$

对于无限小的 θ , 我们有 $[L(\theta)]^\mu_\nu \rightarrow \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, 其中 $\omega^i_0 = \omega^0_i = \hat{p}_i\theta$ 且 $\omega^i_j = \omega^0_0 = 0$ 。依照从方程(2.2.24)中导出方程(2.2.26)的依据, 得出

$$D(L(p)) = \exp(-i\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{K}\theta) . \quad (5.7.10)$$

这是针对齐次Lorentz群的任意表示; 对于不可约 (A, B) 表示, 方程(5.6.7)和(5.6.8)给出

$$i\mathcal{K} = \mathcal{A} - \mathcal{B} \quad (5.7.11)$$

并且, 因为 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是对易矩阵

$$D(L(p)) = \exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{A}\theta) \exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{B}\theta) \quad (5.7.12)$$

更详细一点, 利用方程(5.6.14)和(5.6.15)

$$D(L(p))_{a'b', ab} = \left(\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta) \right)_{a'a} \left(\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta) \right)_{b'b} . \quad (5.7.13)$$

那么, 方程(5.7.4)和(5.7.6)给出了有限动量的系数函数

$$\begin{aligned} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a'b'} \left(\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta) \right)_{aa'} \left(\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta) \right)_{bb'} \\ &\quad \times C_{AB}(j\sigma; a'b') \end{aligned} \quad (5.7.14)$$

和

$$v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) = (-1)^{j+\sigma}u_{ab}(\mathbf{p}, -\sigma) . \quad (5.7.15)$$

这些结果清晰地给出了变换类型 (A, B) 的场, 所以这类场在除开常数因子 κ 和 λ 的选择后是唯一的。

在这个形式体系下构建Lorentz标量相互作用密度是很容易的。齐次Lorentz群的 (A, B) 表示正是 $(A, 0)$ 表示和 $(0, B)$ 表示的直积，所以一般Lorentz变换规则(5.1.6)，(5.7.17)在这里是

$$U_0(\Lambda)\psi_{ab}(x)U_0^{-1}(\Lambda) = \sum_{a'b'} D_{a,a'}^{A0}(\Lambda^{-1})D_{b,b'}^{0B}(\Lambda^{-1})\psi_{a'b'}(\Lambda x). \quad (5.7.16)$$

更进一步，方程(5.6.14)和(5.6.15)说明 $(A, 0)$ 表示和 $(0, B)$ 表示的矩阵表示恰好分别是自旋 A 和 B 的自旋矩阵。因此我们可以构建如下形式的标量 $_{ac}$

$$\sum_{a_1 a_2 \cdots a_n} \sum_{b_1 b_2 \cdots b_n} g_{a_1 a_2 \cdots a_n; b_1 b_2 \cdots b_n} \psi_{a_1 b_1}^{(1)}(x) \psi_{a_2 b_2}^{(2)}(x) \cdots \psi_{a_n b_n}^{(n)}(x) \quad (5.7.17)$$

其中 $g_{a_1 a_2 \cdots a_n; b_1 b_2 \cdots b_n}$ 是耦合自旋 A_1, A_2, \cdots, A_n 以构建标量的系数与耦合自旋 B_1, B_2, \cdots, B_n 以构建标量的系数的乘积。（尽管我们不显式地考察包含导数的相互作用，以这种方式，我们将获得包含 n 个场的最普遍相互作用，这是因为 (A, B) 类场的导数总能分解成没有导数的其它类型的场）例如，由三个变换类型 $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ 和 (A_3, B_3) 场的乘积所构成的最普遍的Lorentz标量是

$$g \sum_{a_1 a_2 a_3} \sum_{b_1 b_2 b_3} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \psi_{a_1 b_1}^{(1)} \psi_{a_2 b_2}^{(2)} \psi_{a_3 b_3}^{(3)} \quad (5.7.18)$$

其中 g 是一个自由参量。这是最普遍的3-场相互作用。（(5.7.18)中的括号代表Wigner“3-j”符号¹⁰：

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \sum_{m'_3} C_{j_1 j_2}(j_3 m'_3, m_1 m_2) C_{j_3 j_3}(00, m'_3 m_3)$$

其描述了耦合三个自旋以构造一个旋转不变标量。）

对于Lorentz不变的 S -矩阵，相互作用密度 $\mathcal{H}(x)$ 是类似(5.7.18)的标量是不够的；同样必要的是 $\mathcal{H}(x)$ 与 $\mathcal{H}(y)$ 在类空间隔 $x - y$ 上对易。为了看到如何满足这个条件，考察同种粒子的两个场的对易子或反对易子，一个是 (A, B) 类场 ψ ，一个是 (\tilde{A}, \tilde{B}) 类场 $\tilde{\psi}$ 的厄密伴 $\tilde{\psi}^\dagger$ 。我们发现

$$\begin{aligned} \left[\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}_{\tilde{a}\tilde{b}}^\dagger(y) \right]_{\mp} &= (2\pi)^{-3} \int d^3 p (2p^0)^{-1} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \\ &\times \left[\kappa \tilde{\kappa}^* e^{ip \cdot (x-y)} \mp \lambda \tilde{\lambda}^* e^{-ip \cdot (x-y)} \right], \end{aligned} \quad (5.7.19)$$

其中 $\pi(\mathbf{p})$ 是自旋和

$$(2p^0)^{-1} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{u}_{\tilde{a}\tilde{b}}^*(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{\sigma} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{v}_{\tilde{a}\tilde{b}}^*(\mathbf{p}, \sigma) \quad (5.7.20)$$

并且，像往常一样，上面的符号和下面的符号分别对应玻色子和费米子。（我们在这里允许场 $\tilde{\psi}$ 中的系数 $\tilde{\kappa}$ 和 $\tilde{\lambda}$ 不同。）更详细些

$$\begin{aligned} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) &= \sum_{a'b'} \sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'} \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma; a'b') C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma; \tilde{a}'\tilde{b}') \\ &\times \left(\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta) \right)_{aa'} \left(\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta) \right)_{bb'} \\ &\times \left(\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta) \right)_{\tilde{a}\tilde{a}'}^* \left(\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta) \right)_{\tilde{b}\tilde{b}'}^*. \end{aligned} \quad (5.7.21)$$

函数 $\pi(\mathbf{p})$ 已经被显式地算出了¹¹。我们关心的是它表现为 \mathbf{p} 和 p^0 的多项式函数 P 的质量壳值:

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \quad (5.7.22)$$

并且根据 $2A + 2\tilde{B}$ 是偶整数还是奇整数, P 分别是偶的和奇的

$$P(-\mathbf{p}, -p^0) = (-)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}, p^0). \quad (5.7.23)$$

我们在这里仅对 \mathbf{p} 的一个特定方向检验这些。令 \mathbf{p} 为3-方向, (5.7.21)给出

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma; ab) C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma; \tilde{a}\tilde{b}) \exp\left([-a + b - \tilde{a} + \tilde{b}]\theta\right)$$

除非 $\sigma = a + b$ 且 $\sigma = \tilde{a} + \tilde{b}$, 否则Clebsch-Gordon系数为零, 所以我们可以做替换

$$-a + b - \tilde{a} + \tilde{b} = -2a + \sigma + 2\tilde{b} - \sigma = 2\tilde{b} - 2a.$$

我们可以将 $\exp(\pm\theta)$ 写为 $(p^0 + p^3)/m$, 所以这里

$$\begin{aligned} \pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) &= \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma; ab) C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma; \tilde{a}\tilde{b}) \\ &\times \begin{cases} \left[(p^0 + p^3)/m\right]^{2\tilde{b}-2a} & (\tilde{b} \geq a) \\ \left[(p^0 - p^3)/m\right]^{2a-2\tilde{b}} & (a \geq \tilde{b}) \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, 我们看到 $\pi(\mathbf{p})$ 确实能写成多项式 $P(\mathbf{p}, p^0)$ 的质量壳值。另外, $2\tilde{b} - 2a$ 等于 $2\tilde{B} + 2A$ 减去一个偶数, 所以该多项式满足反射条件(5.7.23)。

任何 \mathbf{p} 和 $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 的多项式都可写成一个对 $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 是线性的形式(通过以 \mathbf{p} 的形式表示 $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 的偶幂次), 所以 $\pi(\mathbf{p})$ 可以写成

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) + 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}), \quad (5.7.24)$$

其中 P 和 Q 现在只是 \mathbf{p} 的多项式, 并有

$$P(-\mathbf{p}) = (-)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}) \quad (5.7.25)$$

$$Q(-\mathbf{p}) = -(-)^{2A+2\tilde{B}} Q(\mathbf{p}). \quad (5.7.26)$$

对于类空的 $x - y$, 我们可以选择Lorentz参考系使得 $x^0 = y^0$, 并将方程(5.7.19)写为

$$\begin{aligned} [\psi_{ab}(x), \psi_{\tilde{a}\tilde{b}}^{\dagger}(y)]_{\mp} &= [\kappa\tilde{\kappa}^* \mp (-)^{2A+2\tilde{B}} \lambda\tilde{\lambda}^*] P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-i\nabla) \Delta_{+}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) \\ &+ [\kappa\tilde{\kappa}^* \pm (-)^{2A+2\tilde{B}} \lambda\tilde{\lambda}^*] Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-i\nabla) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

为使其在 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ 时为零, 我们必有

$$\kappa\tilde{\kappa}^* = \pm (-)^{2A+2\tilde{B}} \lambda\tilde{\lambda}^*. \quad (5.7.27)$$

现在让我们考察 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 相同的特殊情况，那么就有 $A = \tilde{A}$ 和 $B = \tilde{B}$ 。（这种对易子或反对易子出现在 $[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)]$ ，这是因为哈密顿量的厄密性要求如果 $\mathcal{H}(x)$ 包含 ψ ，那么它也得包含 ψ^\dagger 。）在这种情况下，方程(5.7.27)给出

$$|\kappa|^2 = \pm(-1)^{2A+2B} |\lambda|^2 .$$

当且仅当

$$\pm(-1)^{2A+2B} = +1 \quad (5.7.28)$$

以及

$$|\kappa|^2 = |\lambda|^2 , \quad (5.7.29)$$

这才是可能的。当然 $2A + 2B$ 与 $2j$ 相差一个偶数，所以方程(5.7.28)说明 $2j$ 是偶还是奇，我们的粒子分别是玻色子和费米子。这是自旋与统计之间的普遍关系¹²，其中我们已经看到几个特殊情况——标量场，矢量场和Dirac场所描述的粒子。

现在回到一般情况，即场 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 可以不同。利用方程(5.7.27)，并对两边同除以 $|\tilde{\kappa}|^2 = |\tilde{\lambda}|^2$ ，我们有

$$\frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} = (-1)^{2B+2\tilde{B}} \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} .$$

由此得出，对于任何场

$$\lambda = (-1)^{2B} c \kappa , \quad (5.7.30)$$

其中因子 c 对于给定粒子的所有场都相同。进一步，方程(5.7.29)说明 c 正是相位， $|c| = 1$ 。因此通过对算符 $a(\mathbf{p}, \sigma)$ 和 $a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)$ 的相对相位的重定义，使得 $c = 1$ 和随之的 $\lambda = (-1)^{2B} \kappa$ ，所以对于所有场我们可以消除 c 。另外，通过对场的总体尺度的重定义，对于每一种场类型，因子 κ 都可以被消除。对于给定粒子的 (A, B) 场，我们可以用一个公式摆脱所有的这些因子，这个公式直到总体尺度上是唯一的

$$\begin{aligned} \psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p \left[u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} \right. \\ \left. + (-1)^{2B} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} \right] . \end{aligned} \quad (5.7.31)$$

给定粒子的不同场并不是真的表示物理上可分辨的可能系。例如， $j = 0$ 的可能场是那些 (A, A) 类的（因为三角不等式 $|A - B| \leq 2j \leq A + B$ 在这里要求 $A = B$ ）。从 $(0, 0)$ 标量场开始，我们能够轻松地用 $2A$ 阶导数构建这里 (A, A) 场

$$\{\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{2A}}\} \phi , \quad (5.7.32)$$

其中 $\{\}$ 在这里代表无迹部分；例如

$$\{\partial_{\mu} \partial_{\nu}\} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square .$$

（回忆根据 $(N/2, N/2)$ 表示变换的 N 阶无迹对称张量。）但是方程(5.7.31)代表自旋为 j 的给定粒子的唯一因果 (A, B) 场，所以 $j = 0$ 的 (A, A) 场(5.7.31)只能是标量场的 $2A$ 阶导数(5.7.32)的线性组合。

更普遍地, 自旋 j 的给定粒子的任意场 (A, B) 可以表示为作用在 $(j, 0)$ 类场¹³ φ_σ 的 $2B$ 阶微分算符(或者作用在 $(0, j)$ 类场上的 $2A$ 阶微分算符)。为了看到这点, 考察场

$$\{\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{2B}}\} \varphi_\sigma . \quad (5.7.33)$$

其按照表示 (B, B) 与表示 $(j, 0)$ 的直积变换, 因而通过通常的矢量叠加规则, 它可以分解成全部根据不可约表示 (A, B) 变换的场, 其中 $|j - B| \leq A \leq j + B$ 或等价的 $|A - B| \leq j \leq A + B$ 。既然方程(5.7.31)对于自旋 j 的给定粒子代表 (A, B) 类的唯一场, 它只能^{**}是通过导数(5.7.33)获得的 (A, B) 场。

现在从空间反演开始, 考察这些场在反演下的性质。利用4.2节的结果, 粒子湮灭算符和反粒子产生算符的空间反演性质是:

$$Pa(\mathbf{p}, \sigma)P^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma) , \quad (5.7.34)$$

$$Pa^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)P^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma) , \quad (5.7.35)$$

其中 η 和 η^c 分别是粒子和反粒子的内禀宇称。一般因果 (A, B) 场(5.7.31)因而在宇称变换下转换成

$$\begin{aligned} P\psi_{ab}^{AB}(x)P^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p \left[\eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \right. \\ &\quad \left. + \eta^c (-)^{2B} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} v_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \right] . \end{aligned} \quad (5.7.36)$$

我们想将积分变量从 \mathbf{p} 变为 $-\mathbf{p}$, 由于这个原因, 我们需要计算 $u_{ab}(-\mathbf{p}, \sigma)$ 和 $v_{ab}(-\mathbf{p}, \sigma)$ 。为了做到这点, 我们仅需要回头看一下(5.7.14)和(5.7.15), 并利用Clebsch-Gordon系数的对称性质¹⁴

$$C_{AB}(j\sigma; ab) = (-)^{A+B-j} C_{BA}(j\sigma, ba) . \quad (5.7.37)$$

这给出

$$u_{ab}^{AB}(-\mathbf{p}, \sigma) = (-)^{A+B-j} u_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma) , \quad (5.7.38)$$

$$v_{ab}^{AB}(-\mathbf{p}, \sigma) = (-)^{A+B-j} v_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma) , \quad (5.7.39)$$

所以

$$\begin{aligned} P\psi_{ab}^{AB}(x)P^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p (-1)^{A+B-j} \\ &\quad \times \left[\eta^* a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot \mathcal{P}x} u_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma) + \eta^c (-)^{2B} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot \mathcal{P}x} v_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma) \right] , \end{aligned} \quad (5.7.40)$$

其中, 像之前一样, $\mathcal{P}x = (-\mathbf{x}, x^0)$ 。这是在 $\mathcal{P}x$ 上算出的因果场 ψ_{ba}^{BA} , 除了湮灭项和产生项的系数与方程(5.7.31)中称为湮灭项和产生项的系数不同。但是这些系数必须与方程(5.7.31)中的系数仅相差一个总的常数因子, 这是因为除了尺度以外, 方程(5.7.31)对于每一类场都是唯一的。

^{**}这个讨论中唯一可能的瑕疵是, 以这种方式获得的 (A, B) 场实际为零。但是在这种情况下, $(j, 0)$ 场将满足场方程 $\sum_{\sigma} M_{\sigma}(\partial/\partial x)\varphi_{\sigma}(x) = 0$, 因而对于每一 σ , $\sum_{\sigma} M_{\sigma}(ip)u_{\sigma}(\mathbf{p}, \sigma) = 0$ 。对于 (j, σ) 表示, Clebsch-Gordon系数 $C_{j_0}(j\sigma; \sigma 0)$ 就是克罗内克符号 $\delta_{\sigma\sigma}$, 所以这将要求 $\sum_{\sigma} M_{\sigma}(ip)D_{\sigma\sigma'}(L(p)) = 0$, 因为 $D(\Lambda)$ 有逆 $D(\Lambda^{-1})$, 所以除非所有的 $M_{\sigma}(ip)$ 为零, 否则这是不可能的。 $(j, 0)$ 场 $\varphi_{\sigma}(x)$ 因此将不满足除Klein-Gordon方程 $(\square - m^2)\varphi_{\sigma}(x) = 0$ 之外的任何场方程, 因而从(5.7.33)获得的 (A, B) 场不能为零。

因此方程(5.7.40)中两项系数的比值必须与方程(5.7.31)相同（因为这是一个\$(B, A)\$场，所以\$B\$被替换为\$A\$）：

$$\eta^c(-)^{2B}/\eta^* = (-)^{2A} . \quad (5.7.41)$$

但是\$(A - B)\$与自旋\$j\$仅相差一个整数，所以这给出

$$\eta^c = \eta^*(-)^{2j} . \quad (5.7.42)$$

我们在5.2节，5.3节和5.5节分别看到\$j = 0\$，\$j = 1\$和\$j = \frac{1}{2}\$的特殊情况。我们现在看到，这一结果是普遍的：粒子-反粒子对的内禀宇称\$\eta^c\eta\$对于玻色子是\$+1\$，对于费米子是\$-1\$。在方程(5.7.40)中使用方程(5.7.42)，空间反演的最终结果是

$$\mathbf{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{P}^{-1} = \eta^*(-)^{A+B-j}\psi_{ba}^{BA}(-\mathbf{x}, x^0) . \quad (5.7.43)$$

我们来看一下这是如何应用于Dirac场的。对于Dirac场的上\$(\frac{1}{2}, 0)\$分量和下\$(0, \frac{1}{2})\$分量，符号\$(-)^{A+B-j}\$就是\$+1\$，所以宇称算符简单地令\$\mathbf{x}\$变成\$-\mathbf{x}\$；交换上分量和下分量；并用\$\eta^*\$乘以场。Dirac场的上分量和下分量的交换是由(5.5.41)中的矩阵\$\beta\$完成的。

现在来考察荷共轭。它在粒子湮灭算符和反粒子产生算符上的效应是

$$\mathbf{C}a(\mathbf{p}, \sigma)\mathbf{C}^{-1} = \xi^*a^c(\mathbf{p}, \sigma) , \quad (5.7.44)$$

$$\mathbf{C}a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)\mathbf{C}^{-1} = \xi^ca^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) , \quad (5.7.45)$$

其中，\$\xi\$和\$\xi^c\$分别是粒子和反粒子的荷共轭宇称。将这个变换应用与场(5.7.31)，我们发现

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{C}^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \\ &\times \left[\xi^*a^c(\mathbf{p}, \sigma)e^{ip \cdot x} + \xi^c(-)^{2B}a^\dagger(\mathbf{p}, -\sigma)(-)^{j-\sigma}e^{-ip \cdot x} \right] . \end{aligned} \quad (5.7.46)$$

将\$(A, B)\$场的该荷共轭公式与同一粒子的\$(B, A)\$场的厄密伴进行比较是有用的：

$$\begin{aligned} \psi_{ba}^{BA\dagger}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{ba}^{BA*}(\mathbf{p}, \sigma) \\ &\times \left[(-1)^{2A}(-1)^{j-\sigma}a^c(\mathbf{p}, -\sigma)e^{ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)e^{-ip \cdot x} \right] . \end{aligned} \quad (5.7.47)$$

为了计算\$u^*\$，我们使用之前的结果

$$\mathbf{J}^{(j)*} = -\mathcal{C}\mathbf{J}^{(j)}\mathcal{C}^{-1} , \quad \mathcal{C}_{\bar{\sigma}\sigma} \propto (-1)^{j-\sigma}\delta_{\bar{\sigma}, -\sigma} .$$

方程(5.7.14)中的Clebsch-Gordon系数是实的，所以

$$\begin{aligned} u_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma)^* &= \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a'b'} \left(\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta) \right)_{-a, -a'} \left(\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta) \right)_{-b, -b'} \\ &\times (-)^{a'-a}(-)^{b'-b}C_{BA}(j\sigma; b'a') . \end{aligned}$$

我们使用Clebsch-Gordon系数的反射性质¹⁴

$$C_{BA}(j, -\sigma; -b', -a') = C_{AB}(j\sigma; a'b') \quad (5.7.48)$$

以及除非 $a' + b' = \sigma$ ，否则这些系数为零的性质，写出

$$u_{-b,-a}^{BA}(\mathbf{p}, -\sigma)^* = (-)^{a+b-\sigma} u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.7.49)$$

那么场厄密伴是（做替换 $a \rightarrow -a, b \rightarrow -b, \sigma \rightarrow -\sigma$ ）

$$\begin{aligned} \psi_{ba}^{BA\dagger}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p (-)^{a+b-\sigma} u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \\ &\times \left[(-)^{2A} (-)^{j+\sigma} a^c(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} \right]. \end{aligned}$$

利用符号关系 $(-)^{-2A-j} = (-)^{2B+j}$ ，这变成

$$\begin{aligned} (-)^{-2A-a-b-j} \psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \\ &\times \left[a^c(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + (-)^{j-\sigma+2B} a^{\dagger}(\mathbf{p}, -\sigma) e^{-ip \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (5.7.50)$$

为了使 $C\psi_{ab}^{AB}(x)C^{-1}$ 与处在类空间隔上的普通场对易或反对易，其正比于 $\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x)$ 是必要的，这是因为它是变换类 (B, A) 的唯一因果场的厄密伴。比较方程(5.7.50)与方程(5.7.46)，我们看到只有荷共轭宇称有关系

$$\xi^* = \xi^c \quad (5.7.51)$$

才是可能的，在这种情况下

$$C\psi_{ab}^{AB}(x)C^{-1} = \xi^* (-)^{-2A-a-b-j} \psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x). \quad (5.7.52)$$

我们在5.2节，5.3节和5.5节遇到了针对自旋0，自旋1和自旋 $\frac{1}{2}$ 的关系(5.7.51)，并在5.5节看到了它在电子-正电子对和夸克-反夸克态上的某些应用。

特别地，对于反粒子是其本身的粒子，方程(5.7.52)在左边没有任何荷共轭算符作用其上时或右边没有相位 ξ^* 时是满足的：

$$\psi_{ab}^{AB}(x) = (-)^{-2A-a-b-j} \psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x). \quad (5.7.53)$$

在5.5节中，对于Majorana自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子，我们已经看到这类实条件的一个粒子。

最后我们来到时间反演。作用与粒子湮灭算符和反粒子产生算符给出

$$\mathbb{T}a(\mathbf{p}, \sigma)\mathbb{T}^{-1} = \zeta^* (-1)^{j-\sigma} a(-\mathbf{p}, -\sigma), \quad (5.7.54)$$

$$\mathbb{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)\mathbb{T}^{-1} = \zeta^c (-1)^{j-\sigma} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma), \quad (5.7.55)$$

因此不可约场(5.7.31)有变换性质

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathbb{T}^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{ab}^{AB*}(\mathbf{p}, \sigma) (-1)^{j-\sigma} \\ &\times \left[\zeta^* a(-\mathbf{p}, -\sigma) e^{-ip \cdot x} + \zeta^c (-1)^{2B} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma) e^{ip \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (5.7.56)$$

为了计算系数函数的复共轭，我们使用方程(5.7.14)和标准公式¹⁴

$$C_{AB}(j, \sigma; a, b) = (-)^{A+B-j} C_{AB}(j, -\sigma; -a, -b) \quad (5.7.57)$$

进而发现:

$$u_{ab}^{AB*}(-\mathbf{p}, -\sigma) = (-)^{a+b+\sigma+A+B-j} u_{-a,-b}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.7.58)$$

将方程(5.7.56)中的积分变量和求和变量改为 $-\mathbf{p}$ 和 $-\sigma$, 为了使 (A, B) 场在时间反演下变换后的场正比于另一 (A, B) 场, 我们发现必有

$$\zeta^c = \zeta^*, \quad (5.7.59)$$

在该情况下

$$\mathbb{T}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathbb{T}^{-1} = (-)^{a+b+\sigma+A+B-j} \zeta^* \psi_{-a,-b}^{AB}(\mathbf{x}, -x^0). \quad (5.7.60)$$

* * *

应该提一下, 在自旋 $j \geq 3/2$ 的粒子的场论中, 会时不时地出现各种困难¹⁵。普遍地, 研究高自旋场在有 c -数外场的情况下的传播时会遇到这些问题。取决于理论的细节, 这些问题包括非因果性, 不相容性, 非物质的质量态, 以及么正性破坏。我在这里不会讨论这些问题的细节, 因为对于我来说它们似乎与本章所描述的计算方法不相关, 不相关的原因如下:

(1) 场 $\psi_{ab}(x)$ 是由物质粒子的产生算符和湮灭算符直接构建的, 所以不可能会有不相容性或非物质质量态的问题。这些是自由场, 但是通过将它们纳入相互作用绘景中的相互作用哈密顿量密度, 我们可以用微扰论计算自动满足集团分解原理的 S -矩阵元。只要相互作用哈密顿量是厄密的, 在么正性上就不会存在困难。只要我们在哈密顿量密度中增加的尽管不协变但定域的项是恰当的, Lorentz不变性在微扰论中会被保证; 尽管缺乏一个严格的证明, 但没有理由怀疑这总是可能的。因此, 伴随高自旋的任何问题仅当我们尝试超出微扰论时才会出现。

(2) 正如13.6节将要讨论的, 在有 c -数外场时(这一环境下, 伴随高自旋的所有问题都会出现), 场方程的解确实超出了微扰论, 因为结果对应于对微扰展开中的一个无限子集的求和。这个部分和被证明, 即使对于弱的外场, 如果场的变化充分缓慢, 能量分母的微弱抵消了场的微弱。然而, 以这种方式获得的结果依赖于高自旋粒子与外场相互作用的全部细节: 不仅是粒子的多极分量, 还有在外场中是非线性的相互作用可能项。仅当高自旋粒子与外场的相互作用被假定是非常简单的, 才会遇到伴随高自旋所提出的问题。还没有人证明这些问题对于任意的相互作用依然存在, 并且我们将在第12章看到, 高自旋粒子预期有对称性所允许的所有可能类型的相互作用。

(3) 事实上, 有一个很好的理由相信, 如果与外场的相互作用充分复杂, 伴随高自旋的问题会消失。首先, 高自旋粒子的存在是毋庸置疑的, 其包含各种不同的稳定核子与强子共振。如果高自旋时存在任何问题, 它可能仅是针对“点”粒子的, 即, 那些与外场的相互作用特别简单的粒子。应该铭记于心: 简单性的要求依赖于我们选择用以表示高自旋粒子的场。回忆, 给定粒子的任何自由场类型都可以表示成作用在任何其它场类型上的微分算符, 所以在相互作用绘景中, 任何与外场的相互作用都可以写成任何我们想要的场类型形式, 然而在一种场类型下形式简单的相互作用在另一场类型下形式可能非常复杂。所以简单性的要求似乎没有任何客观内容。

(4) 另外, 高维“Kaluza-Klein”理论和弦论提供了一个例子: 自旋为2的带电有质量粒子与电磁背景场相互作用的相容理论¹⁶。(理论的相容性被发现是依赖于现实外场是满足场方程这一假定的, 这一点在早期工作中通常被忽视了。)在相互作用绘景中再次公式化这个工作, 自旋2粒子被 $(1, 1)$ 自由场表示, 但正如之上所提到的, 相互作用在相互作用绘景中可以以包含旋转群的 $j = 2$ 表示的任意 (A, B) 类场重新表示。

5.8 CPT定理

我们已经看到想要把相对论同量子力学结合起来要求反粒子的存在。每个粒子都有反粒子不仅是必要的（对于纯中性粒子其反粒子是其本身）；在粒子性质和反粒子性质之间还存在一个精确关系，其可以总结为如下陈述：通过对反演相位的一个恰当选择，所有反演的乘积CPT是守恒的。这是著名的CPT定理*。

这个证明的第一步，是得到CPT乘积在各种类型的自由场上的效应。对于标量场，矢量场和Dirac场，5.2节，5.3节和5.5节的结果给出

$$\text{CPT } \phi(x) [\text{CPT}]^{-1} = \zeta^* \xi^* \eta^* \phi^\dagger(-x), \quad (5.8.1)$$

$$\text{CPT } \phi_\mu(x) [\text{CPT}]^{-1} = -\zeta^* \xi^* \eta^* \phi_\mu^\dagger(-x), \quad (5.8.2)$$

$$\text{CPT } \psi(x) [\text{CPT}]^{-1} = -\zeta^* \xi^* \eta^* \gamma_5 \psi^*(-x). \quad (5.8.3)$$

（当然，相位 ζ ， ξ 和 η 依赖于每个场所描述的粒子种类。）我们将选择相位，使得对于所有粒子

$$\zeta \xi \eta = 1. \quad (5.8.4)$$

那么，由任意一组标量场，矢量场及其它们的导数组合而成的任意张量 $\phi_{\mu_1 \dots \mu_n}$ ，其变换为

$$\text{CPT } \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) [\text{CPT}]^{-1} = (-)^n \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}^\dagger(-x). \quad (5.8.5)$$

（由于CPT是反么正的，出现在这些张量中的任何复系数会变换成它的复共轭。）我们可以轻松地看到，对于由Dirac场的双线性组合构成的张量，这个变换规则同样适用。将方程(5.8.3)应用于这样的双线性积给出

$$\begin{aligned} \text{CPT} [\bar{\psi}_1(x) M \psi_2(x)] [\text{CPT}]^{-1} &= \psi_1^\dagger(-x) \gamma_5 \beta M^* \gamma_5 \psi_2^*(-x) \\ &= [\bar{\psi}_1(-x) \gamma_5 \beta M \gamma_5 \psi_2(-x)]^\dagger. \end{aligned} \quad (5.8.6)$$

（ β 和 γ_5 的反对易所产生的负号与费米算符的反对易产生的负号相抵消。）如果这个双线性积是个 n 阶张量，那么 M 是 n 模2个Dirac矩阵的乘积，所以 $\gamma_5 M \gamma_5 = (-1)^n M$ ，因而这个双线性积满足方程(5.8.5)。

构成厄密标量相互作用密度 $\mathcal{H}(x)$ 的张量，其时空指标的总数必须是偶数个，因而

$$\text{CPT } \mathcal{H}(x) [\text{CPT}]^{-1} = \mathcal{H}(-x). \quad (5.8.7)$$

更一般地（并且更加简单些），我们可以看到，如果构成厄密标量的场 $\psi_{ab}^{AB}(x)$ 属于齐次Lorentz群的一个或多个一般不可约表示，这同样是正确的。把之前章节中反演在这种场上的效应放在一起，我们发现

$$\text{CPT } \psi_{ab}^{AB}(x) [\text{CPT}]^{-1} = (-1)^{2B} \psi_{ab}^{AB\dagger}(-x). \quad (5.8.8)$$

*这个定理的原始证明是由Lüders和Pauli给出的¹⁷。在公理化场论中被严格地证明¹⁸，通过使用交换性假定，将理论的Lorentz不变性扩张到复Lorentz群，然后使用复Lorentz变换来显现场乘积的真空期望值的反演性质，然后再利用这个反演性质推断出诱导场上CPT变换的反么正算符的存在。

(对于Dirac场, 因子 $(-1)^{2B}$ 由方程(5.8.3)中的矩阵 γ_5 提供。) 为了将乘积 $\psi_{a_1 b_1}^{A_1 B_1}(x) \psi_{a_2 b_2}^{A_2 B_2} \dots$ 耦合成一个标量 $\mathcal{H}(x)$, $A_1 + A_2 + \dots$ 和 $B_1 + B_2 + \dots$ 均是整数是必要的, 所以 $(-1)^{2B_1 + 2B_2 + \dots} = 1$, 因而厄密标量 $\mathcal{H}(x)$ 将自动满足方程(5.8.7)。

从方程(5.8.7)可以立即得出CPT与相互作用 $V \equiv \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}, 0)$ 对易:

$$\text{CPT } V [\text{CPT}]^{-1} = V . \quad (5.8.9)$$

另外, 在任何理论中, CPT与自由粒子哈密顿量 H_0 对易。因此算符CPT, 其在这里被它在自由粒子算符上的作用所定义, 以3.3节所描述的方式作用在“入”态和“出”态上。在3.3节和3.6节中已经描述了这个对称性原理的物理推论。

5.9 无质量粒子场

直到现在, 我们仅处理了有质量粒子的场。对于其中的一些场, 诸如5.2节和5.5节所讨论的标量场和Dirac场, 在取无质量极限时没有特殊的问题。另一方面, 我们在5.3节看到, 对于自旋1粒子, 在取矢量场的无质量极限时存在一个困难: 至少有一个极化矢量在这个极限下爆炸。事实上, 我们将在本节看到, 用于构建有限质量粒子的所有的不可约 (A, B) 场, 无法构建自旋 $j \geq 1$ 的无质量物质粒子的产生算符和湮灭算符。场类型上的这个特别的限制将会自然地导致规范不变性的引入。

正如我们对有质量粒子所做的, 我们尝试将无质量粒子的一般自由场构建成, 动量为 \mathbf{p} 螺旋度为 σ 的粒子的湮灭算符 $a(\mathbf{p}, \sigma)$ 与相对应的反粒子产生算符 $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)$ 的线性组合*:

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_\sigma \left[\kappa a(\mathbf{p}, \sigma) u_\ell(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} \right. \\ \left. + \lambda a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) v_\ell(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} \right] \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

其中, 现在有 $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$ 。产生算符就像方程(2.5.42)中的单粒子态那样变换

$$U(\Lambda) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma), \quad (5.9.2)$$

$$U(\Lambda) a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) a^{\dagger}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma), \quad (5.9.3)$$

因而

$$U(\Lambda) a(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda)) a(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma), \quad (5.9.4)$$

其中 $p_\Lambda \equiv \Lambda p$, θ 是方程(2.5.43)所定义的角度。因此, 如果我们希望场按照齐次Lorentz群的某些表示 $D(\Lambda)$ 变换

$$U(\Lambda) \psi_\ell(x) U^{-1}(\Lambda) = \sum_{\tilde{\ell}} D_{\ell\tilde{\ell}}(\Lambda^{-1}) \psi_{\tilde{\ell}}(\Lambda x), \quad (5.9.5)$$

*我们在这里仅处理单个种类的粒子, 并扔掉种类指标 n 。另外, 系数常数 κ 和 λ 通过因果性的要求与对系数函数 u_ℓ 和 v_ℓ 进行归一化时的某些方便选择决定。

那么，我们必须令系数函数 u 和 v 满足关系

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma) \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) u_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.9.6)$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma) \exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) v_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma) \quad (5.9.7)$$

而不是方程(5.1.19)和(5.1.20)。(再次地， $p_\Lambda \equiv \Lambda p$ 。)就像有质量粒子情况中的那样，我们可以通过令

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma) = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\mathcal{L}(p)) u_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.8)$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma) = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\mathcal{L}(p)) v_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma) \quad (5.9.9)$$

(而不是方程(5.1.21)和(5.1.22))来满足这些要求，其中 \mathbf{k} 是标准动量，写为 $(0, 0, k)$ ，而 $\mathcal{L}(p)$ 是使无质量粒子动量从 \mathbf{k} 变为 \mathbf{p} 的标准Lorentz变换。另外，取代方程(5.1.23)和(5.1.24)，标准动量处的系数函数必须满足

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{k}, \sigma) \exp(i\sigma\theta(k, W)) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(W) u_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma) \quad (5.9.10)$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{k}, \sigma) \exp(-i\sigma\theta(k, W)) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(W) v_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma) \quad (5.9.11)$$

其中 W_{ν}^{μ} 是4-动量 $k = (\mathbf{k}, |\mathbf{k}|)$ 的“小群”，即，保持4-动量不变的Lorentz变换构成的群的任意群元。

通过分别考察方程(2.5.28)中的两类小群群元，我们能够提取出方程(5.9.10)和(5.9.11)的实质。方程(2.5.27)给出一个绕 z -轴角度为 θ 的旋转 $R(\theta)$

$$R_{\nu}^{\mu}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

我们从方程(5.9.10)和(5.9.11)中发现

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\sigma\theta} = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(R(\theta)) u_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma) \quad (5.9.12)$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{k}, \sigma) e^{-i\sigma\theta} = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(R(\theta)) v_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.13)$$

对于 x - y 平面中的旋转推动组合 $S(\alpha, \beta)$ ，则由方程(2.5.26)给出，

$$S_{\nu}^{\mu}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma & 1 + \gamma \end{bmatrix},$$

$$\gamma \equiv (\alpha^2 + \beta^2)/2,$$

方程(5.9.10)和(5.9.11)给出

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{k}, \sigma) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(S(\alpha, \beta)) u_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.14)$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{k}, \sigma) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(S(\alpha, \beta)) v_{\ell}(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.15)$$

方程(5.9.12)—(5.9.15)是决定标准动量 \mathbf{k} 处系数函数 u 和 v 的条件；然后方程(5.9.8)和(5.9.9)给出任意动量处的系数函数。 v 的方程与 u 的方程互为复共轭，所以在对常数 κ 和 λ 的进行一个恰当的调整后，我们可以对系数函数归一化，使得

$$v_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma) = u_{\ell}(\mathbf{p}, \sigma)^*. \quad (5.9.16)$$

问题是，对于齐次Lorentz群的一般表示，即使那些表示在 $m \neq 0$ 的情况下有可能用来构建螺度给定的粒子的场，我们都找不到满足方程(5.9.14)的 u_{ℓ} 。

为了看到这里的问题，我们先试着建立螺度为 ± 1 的无质量粒子的4-矢 $[(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$ 场。在4-矢表示中，我们有

$$D_{\nu}^{\mu}(\Lambda) = \Lambda_{\nu}^{\mu}.$$

在这里将系数函数 u_{μ} 写成“极化矢量” e_{μ} 的形式将是方便的：

$$u_{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) \equiv (2p^0)^{-1/2} e_{\mu}(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.9.17)$$

这使得方程(5.9.8)给出

$$e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) = \mathcal{L}(\mathbf{p})_{\nu}^{\mu} e^{\nu}(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.18)$$

另外，方程(5.9.12)和(5.9.14)在这里变成

$$e^{\mu}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\sigma\theta} = R(\theta)_{\nu}^{\mu} e^{\nu}(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.19)$$

$$e^{\mu}(\mathbf{k}, \sigma) = S(\alpha, \beta)_{\nu}^{\mu} e^{\nu}(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.20)$$

方程(5.9.19)要求（相差一个可以吸收进系数 κ 和 λ 的常数），

$$e^{\mu}(\mathbf{k}, \pm 1) = (1, \pm i, 0, 0)/\sqrt{2}. \quad (5.9.21)$$

但是之后方程(5.9.20)将要求 $\alpha \pm i\beta = 0$ ，这对于一般的实 α, β 是不可能的。因此，我们无法满足基础要求(5.9.14)或(5.9.10)，反而，我们在这里有

$$\begin{aligned} D_{\nu}^{\mu}(W(\theta, \alpha, \beta)) e^{\nu}(\mathbf{k}, \pm 1) &= S_{\lambda}^{\mu}(\alpha, \beta) R_{\nu}^{\lambda} e^{\nu}(\mathbf{k}, \pm 1) \\ &= \exp(\pm i\theta) \left\{ e^{\mu}(\mathbf{k}, \pm 1) + \frac{(\alpha \pm i\beta)}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|} k^{\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (5.9.22)$$

因此我们得到结论，4-矢量场无法通过螺度为 ± 1 的零质量粒子的产生算符和湮灭算符构建。

我们暂时无视这个困难，不为所动地继续往前走，用方程(5.9.18)和(5.9.21)定义任意动量的极化矢量，并取这个场为

$$\begin{aligned} a_{\mu}(x) &= \int d^3p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \left[e_{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + e_{\mu}(\mathbf{p}, \sigma)^* e^{-ip \cdot x} a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) \right]. \end{aligned} \quad (5.9.23)$$

我们稍后将回来继续考察这样的场是如何被用作物理理论中的一个元素。

场(5.9.23)当然满足

$$\square a^\mu(x) = 0. \quad (5.9.24)$$

场的其它性质源于极化矢量的性质。(当我们之后研究量子电动力学是,我们将需要极化矢量的这些性质。)注意,使无质量粒子动量从 \mathbf{k} 变为 \mathbf{p} 的Lorentz变换 $\mathcal{L}(p)$ 可以写成,一个沿 z -轴的,使粒子能量从 $|\mathbf{k}|$ 变为 $|\mathbf{p}|$ 的“推动” $\mathcal{B}(|\mathbf{p}|)$,再加上一个是 z -轴朝向 \mathbf{p} 方向的标准旋转 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 。既然 $e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1)$ 是仅有 x 分量和 y 分量的纯空间矢量,它不被沿 z -轴的推动影响,因而

$$e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}})^\mu_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1). \quad (5.9.25)$$

特别的, $e^0(\mathbf{k}, \pm 1) = 0$ 且 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, \pm 1) = 0$, 所以

$$e^0(\mathbf{p}, \pm 1) = 0 \quad (5.9.26)$$

以及

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{p}, \pm 1) = 0. \quad (5.9.27)$$

它得出

$$a^0(x) = 0 \quad (5.9.28)$$

以及

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(x) = 0. \quad (5.9.29)$$

正如我们将第9章看到的, 这些是电动力学真空矢势在所谓的库仑规范或辐射规范下满足的条件。

a^0 在所有的Lorentz参考系下为零, 这一事实清晰地证明了 a^μ 不可能是一个4-矢。反而, 方程(5.9.22)证明了, 对于一般动量 \mathbf{p} 和一般Lorentz变换 Λ , 取代方程(5.9.6), 我们有

$$e^\mu(\mathbf{p}_\Lambda, \pm 1) \exp(\pm i\theta(\mathbf{p}, \Lambda)) = D^\mu_\nu(\Lambda) e^\nu(\mathbf{p}, \pm 1) + p^\mu \Omega_\pm(\mathbf{p}, \Lambda), \quad (5.9.30)$$

这使得在一般Lorentz变换下

$$U(\Lambda) a_\mu(x) U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\nu_\mu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu \Omega(x, \Lambda), \quad (5.9.31)$$

其中 $\Omega(x, \Lambda)$ 是产生算符和湮灭算符的线性组合, 我们在这里并不关系它的精确形式。我们将在第8章看到更多的细节, 如果 $a^\mu(x)$ 的耦合不仅形式上是Lorentz不变的(即, 在形式Lorentz变换 $a^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu a^\nu$ 下不变), 并且在“规范”变换 $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \Omega$ 下不变, 那么我们可以将类似 $a^\mu(x)$ 的场用作Lorentz不变物理理论中的一个元素。这一点是通过取 a_μ 的耦合为 $a_\mu j^\mu$ 的形式实现的, 其中 j^μ 是满足 $\partial_\mu j^\mu = 0$ 的4-矢流。

尽管对于螺度为 ± 1 的无质量粒子不存在普通的4-矢量场, 但是在这种粒子的反对称张量场的构建中不存在问题。从方程(5.9.22)和 k^μ 在小群下不变, 我们立即看到

$$\begin{aligned} D^\mu_\rho(W(\theta, \alpha, \beta)) D^\nu_\sigma(W(\theta, \alpha, \beta)) (k^\rho e^\sigma(\mathbf{k}, \pm 1) - k^\sigma e^\rho(\mathbf{k}, \pm 1)) \\ = e^{\pm i\theta} (k^\mu e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1) - k^\nu e^\mu(\mathbf{k}, \pm 1)). \end{aligned} \quad (5.9.32)$$

这说明满足方程(5.9.6)的系数函数对于齐次Lorentz群的反对称张量表示是（在归一化的合适选择下）

$$w^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \pm 1) = i(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-3/2} [p^\mu e^\nu(\mathbf{p}, \pm 1) - p^\nu e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1)] , \quad (5.9.33)$$

其中 $e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1)$ 由方程(5.9.25)给出。利用这个方程与方程(5.9.23)给出的螺度为 ± 1 的无质量粒子的一般反对称张量场的形式为

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu . \quad (5.9.34)$$

注意，即使 a^μ 不是4-矢，这也是一个张量，这因为方程(5.9.31)中的额外项在方程(5.9.34)中被抵消了。又注意到方程(5.9.34)，(5.9.24)，(5.9.28)和(5.9.29)说明了 $f^{\mu\nu}$ 满足真空Maxwell方程组：

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0 , \quad (5.9.35)$$

$$\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \partial_\sigma f_{\mu\nu} = 0 . \quad (5.9.36)$$

为了计算张量场的对易关系，我们需要对双线性积 $e^\mu e^{\nu*}$ 的螺度求和。明确的公式(5.9.21)给出

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^i(\mathbf{k}, \sigma) e^j(\mathbf{k}, \sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2}$$

因而，使用方程(5.9.25)

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^i(\mathbf{p}, \sigma) e^j(\mathbf{p}, \sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2} . \quad (5.9.37)$$

那么，一个直接的计算给出

$$\begin{aligned} [f_{\mu\nu}(x), f_{\rho\sigma}(y)^\dagger] &= (2\pi)^{-3} [-\eta_{\mu\rho} \partial_\nu \partial_\sigma + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu \partial_\sigma + \eta_{\mu\sigma} \partial_\nu \partial_\rho - \eta_{\nu\sigma} \partial_\mu \partial_\rho] \\ &\times \int d^3p (2p^0)^{-1} [|\kappa|^2 e^{ip \cdot (x-y)} - |\lambda|^2 e^{-ip \cdot (x-y)}] . \end{aligned} \quad (5.9.38)$$

当且仅当

$$|\kappa|^2 = |\lambda|^2 , \quad (5.9.39)$$

其对于 $x^0 = y^0$ 显然为零，在这个情况下，因为 $f_{\mu\nu}$ 是张量，对易子对于所有的类空间隔也为零。方程(5.9.39)也暗示了 a^μ 的对易子在等时间隔上为零，并且我们将在第8章看到，这足以产生一个Lorentz不变S-矩阵。产生算符和湮灭算符的相对相位可以进行调整使得 $\kappa = \lambda$ ；那么如果粒子是它们本身的荷共轭，那么这个场是厄密的，光子正是这种情况。

为什么我们希望在构建自旋1的无质量粒子的理论中使用像 $a^\mu(x)$ 那样的场，而不是满足于像 $f^{\mu\nu}$ 那样有简单Lorentz变换性质的场？方程(5.9.34)中导数的出现意味着，对于能量和动量比较小的无质量粒子，仅由 $f_{\mu\nu}$ 和它的导数构建的相互作用密度会有比用矢量场 a_μ 构建的相互作用密度衰减更快的矩阵元。在这种理论的相互作用在长程时会有一个快速衰减，这个衰减要比平常的平方反比率快得多。使用张量场构建是完全可能的，但是对于无质量自旋1粒子，使用矢量场的规范不变理论代表一类更普遍的理论，其中包含那些在自然中真实实现的理论。

相同的讨论适用于引力子，即螺度为 ± 2 的无质量粒子。从这种粒子的产生算符和湮灭算符出发，我们可以构建出一个张量 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ，其有着Riemann-Christoffel曲率张量的代数性质：在 μ, ν 和 ρ, σ 之间是反对称的，而在这两对之间是对称的。为了兼容通常的平方反比引力相互作用

用, 我们需要引入一个按照对称张量变换的场 $h_{\mu\nu}$, 其可以相差与广义相对论中的广义坐标变换相联系的一类规范变换。因此, 为了使所构建的螺度为 ± 2 的无质量粒子的理论能够纳入长程相互作用, 这个理论有类似广义协变的对称性是必要的。正如电磁规范不变的情况, 通过用一个守恒“流” $\theta^{\mu\nu}$ 与场耦合可以实现它, 不过这个“流”现在有两个时空指标, 并满足 $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$ 。除开可能的不影响所产生力的长程行为的全导数项, 唯一的这类守恒张量是能动量张量^{**}。自旋 $j \geq 3$ 的无质量粒子的场将不得不与时空指标不少于三个的守恒张量耦合, 但除了全导数外不存在这类张量, 所以高自旋粒子无法产生长程力。

* * *

在构建螺度 ± 1 的4-矢量场或螺度 ± 2 的对称张量场中我们所遇到的问题, 只是一个更普遍极限的特殊情况。为了看到这点, 让我们考察如何构建属于齐次Lorentz群的任意表示的粒子的场。正如我们在5.6节看到的, 齐次Lorentz群的任何表示 $D(\Lambda)$ 可以分解成 $(2A + 1)(2B + 1)$ -维表示 (A, B) , 这时齐次Lorentz群的生成元被表示为

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_{ij})_{a'b', ab} &= \epsilon_{ijk} \left[(J_k^{(A)})_{a'a} \delta_{b'b} + (J_k^{(B)})_{b'b} \delta_{a'a} \right], \\ (\mathcal{J}_{k0})_{a'b', ab} &= -i \left[(J_k^{(A)})_{a'a} \delta_{b'b} - (J_k^{(B)})_{b'b} \delta_{a'a} \right], \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{J}^{(j)}$ 自旋 j 的角动量矩阵。对于无限小的 θ , $D(R(\theta)) = 1 + i \mathcal{J}_{12} \theta$, 所以方程(5.9.12)和(5.9.13)给出

$$\begin{aligned} \sigma u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) &= (a + b) u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma), \\ -\sigma v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) &= (a + b) v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma), \end{aligned}$$

因而, 除非分别有 $\sigma = a + b$ 和 $\sigma = -a - b$, $u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ 和 $v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ 必须为零。另外, 在方程(5.9.14)中令 θ 为无限小给出

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{J}_{31} + \mathcal{J}_{01})_{ab, a'b'} u_{a'b'}(\mathbf{k}, \sigma) \\ &= (J_2^{(A)} + iJ_1^{(A)})_{aa'} u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) + (J_2^{(B)} - iJ_1^{(B)})_{bb'} u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma), \\ 0 &= (\mathcal{J}_{32} + \mathcal{J}_{02})_{ab, a'b'} u_{a'b'}(\mathbf{k}, \sigma) \\ &= (-J_1^{(A)} + iJ_2^{(A)})_{aa'} u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) + (-J_1^{(B)} - iJ_2^{(B)})_{bb'} u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma), \end{aligned}$$

或者更简化的

$$\begin{aligned} (J_1^{(A)} - iJ_2^{(A)})_{aa'} u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) &= 0, \\ (J_1^{(B)} + iJ_2^{(B)})_{bb'} u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma) &= 0. \end{aligned}$$

这要求 $u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ 为零, 除非

$$a = -A, \quad b = +B \tag{5.9.40}$$

^{**}如果 $\theta^{\mu_1 \dots \mu_N}$ 是满足 $\partial_{\mu_1} \theta^{\mu_1 \dots \mu_N} = 0$ 的张量流, 那么 $\int d^3x \theta^{0\mu_2 \dots \mu_N}$ 是按照 $N - 1$ 阶张量变换的守恒量。唯一可能的这类守恒量是各种连续对称性附带的标量“荷”, 以及能动量4-矢。任何其它4-矢, 或者高阶的任意张量的守恒, 除了向前碰撞都会被禁止。

并且这对于 $v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ 显然也是正确的。将其放在一起，我们看到一个 (A, B) 类场仅能从螺度 σ 的无质量粒子的湮灭算符和螺度 $-\sigma$ 的反粒子的产生算符构建，其中

$$\sigma = B - A. \quad (5.9.41)$$

例如，对于无质量粒子，Dirac场的 $(\frac{1}{2}, 0)$ 部分和 $(0, \frac{1}{2})$ 部分仅能分别湮灭螺度为 $-\frac{1}{2}$ 的粒子和螺度为 $+\frac{1}{2}$ 的粒子。在中微子的“二分量”理论中，仅存在 $(\frac{1}{2}, 0)$ 场和它的厄密伴，所以在这个理论中，中微子螺度为 $-\frac{1}{2}$ 而反中微子螺度为 $+\frac{1}{2}$ 。

通过5.7节中使用的方法，对于自旋 j （即，螺度 $\mp j$ ）的无质量粒子，可以证明，如果方程(5.9.1)中产生项和湮灭项的系数满足方程(5.9.39)， $(j, 0)$ 场与 $(0, j)$ 场在类空间隔上彼此对易且与其厄密伴对易。那么产生算符和湮灭算符的相对相位可以进行调整使得这些系数相等。很容易看到自旋 j 的无质量粒子的 $(A, A + j)$ 类场或 $(B + j, B)$ 类场正好分别是 $(0, j)$ 类场的 $2A$ 阶导数和 $(j, 0)$ 类场的 $2B$ 阶导数，所以在这里不需要另外考虑这些更普遍的场。

现在我们能明白，对于螺度为 ± 1 的无质量粒子，为什么构建矢量场是不可能的。一个矢量场按照 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 表示变换，因而根据方程(5.9.41)只能描述螺度零。（当然，构建螺度为零的矢量场是可能的——仅需要取无质量标量场 ϕ 的导数 $\partial_\mu \phi$ 即可。）螺度为 ± 1 的最简单无质量矢量场有Lorentz变换类 $(1, 0) \oplus (0, 1)$ ；即，它是一个反对称张量 $f_{\mu\nu}$ 。类似地，螺度为 ± 2 的最简单协变无质量场有Lorentz变换类 $(2, 0) \oplus (0, 2)$ ：一个四阶张量，其像Riemann-Christoffel曲率张量那样在每对指标之间是反对称的而两对指标是对称的。

之前章节所给出的P,C,T反演的讨论在经过一个显然的修正后可以挪到无质量的情况。

参考文献

- [1] 本章所采用的观点出现在一系列的论文中: S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B1318 (1964); **134**, B882 (1964); **138**, B988 (1965); **181**, 1893, (1969). 类似的方法出现在E. Wichmann未发表的文章中.
- [2] N. Bohr and L. Rosenfeld, *Kgl. Danske Vidensk. Selskab Mat.-Fys. Medd.*, No. 12 (1933)(翻译在*Selected Papers of Leon Rosenfeld*, ed. by R. S. Cohen and J. Stachel (Reidel, Dordrecht, 1979)); *Phys. Rev.* **78**, 794 (1950).
- [3] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A117**, 610 (1928).
- [4] E. Cartan, *Bull. Soc. Math. France* **41**, 53 (1913).
- [5] 参看J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, Cambridge, MA 1955): Appendix A2; H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1982): pp. 15, 198. 原始文献是I. Schur, *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905).
- [6] 参看H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1982):pp. 15, 198. 原始文献是I. Schur, *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406(1905).
- [7] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).

- [8] 参看B. L. van der Waerden, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (Springer Verlag, Berlin 1932); G. Ya. Lyubarski, *The Applications of Group Theory in Physics*, S. Dedijer翻译(Pergamon Press, New York, 1960).
- [9] W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **60**, 61 (1941).
- [10] 参看A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957): Chapter 3.
- [11] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **181**, 1893 (1969), Section V.
- [12] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12**, 3 (1939); W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940). 公理化场论中的非微扰证明: G. Lüders and B. Zumino, *Phys. Rev.* **110**, 1450 (1958) and N. Burgoyne, *Nuovo Cimento* **8**, 807 (1958). 另见R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin & Statistics, and All That* (Benjamin, New York, 1968).
- [13] $(j, 0) + (0, j)$ 表示中场的引入: H. Joos, *Fortschr. Phys.* **10**, 65 (1962); S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B1318 (1964).
- [14] A. R. Edmonds, Ref. 10, or M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957): Chapter III.
- [15] G. Velo and D. Zwanziger, *Phys. Rev.* **186**, 1337 (1969); **188**, 2218 (1969); A. S. Wightman, in *Proceedings of the Fifth Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High Energy*, ed. by T. Gudehus, G. Kaiser, and A. Perlmutter (Gordon and Breach, New York, 1969); B. Schroer, R. Seiler, and J. A. Swieca, *Phys. Rev. D* **2**, 2927 (1970); 以及其中引用的其它文献.
- [16] C. R. Nappi and L. Witten, *Phys. Rev. D* **40**, 1095 (1989); P. C. Argyres and C. R. Nappi, *Phys. Lett.* **B224**, 89 (1989). 从Kaluza-Klein理论中导出外场中 $j = 3/2$ 粒子的相容性理论, 参看S. D. Rindani and M. Sivakumar, *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **12** 1335 (1986); *J. Phys. C: Particles & Fields* **49**, 601 (1991).
- [17] G. Lüders. *Dansk. Vid. Selskab, Mat.-Fys. Medd.* **28**, 5 (1954); *Ann. Phys.* **2**, 1 (1957); W. Pauli, *Nuovo Cimento* **6**, 204 (1957). 当Lüders首次考察反演是如何相互关联时, P守恒被认为是理所应当的, 所以他的定理陈述为C等价于T不变.
- [18] R. Jost, *Helv. Phys. Acta* **30**, 409 (1957); F. J. Dysons, *Phys. Rev.* **110**, 579 (1958). 另见Streater and Wightman, Ref. 12.

第 6 章 Feynman 规则

上一章中，在哈密顿量密度的构建中协变自由场的使用是出于 S -矩阵要满足 Lorentz 不变性和集团分解原理的要求。以这种方式构建的哈密顿量密度，使得我们用以计算 S -矩阵的微扰论形式不会产生影响；在相互作用密度的每一阶中，结果将自动满足这些不变性与集团分解条件。然而，使用这一版本的微扰论有着明显的实用优点，在计算的每一步中，明显保持着 S -矩阵的 Lorentz 不变性与集团分解性质。对于 20 世纪 30 年代所使用的微扰论就不是这样，这个微扰论现在被称为“旧形式微扰论”，我们在 3.5 节开头描述过它。Feynman, Schwinger 和 Tomonaga 在 20 世纪 40 年代后期的最大成就就是发展计算 S -矩阵的微扰技巧，在这个技巧中，Lorentz 不变性和集团分解性质自始至终都是显然的。这一章将概述首先由 Feynman 在 1948 年的 Poconos (波科诺庄园) 会议上描述的图形计算技巧。Feynman 导出这些规则部分是通过他发展的路径积分方法，这将是第 9 章的主题。在本章，我们将使用 Dyson¹ 在 1949 年提出的方法，这个方法直到 20 世纪 70 年代都是量子场论中几乎所有的微扰论分析的基础，并且仍然提供着 Feynman 规则的一个特别显然的引入。

6.1 规则推导

我们的出发点是 S -矩阵的公式，通过将 Dyson 级数 (3.5.10) 与自由粒子态的表达式 (4.2.2) 合并获得：

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1; \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1; \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2; \dots} \\ = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_N \left(\Phi_0, \cdots a(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) a(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \right. \\ \left. \times T \left\{ \mathcal{H}(x_1) \cdots \mathcal{H}(x_N) \right\} a^\dagger(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) \cdots \Phi_0 \right). \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

一个提醒： \mathbf{p} , σ 和 n 标记粒子的动量，自旋与种类；加撇代表这是末态粒子的指标； Φ_0 是自由粒子真空态； a 和 a^\dagger 是湮灭算符和产生算符； T 代表编时，其使 $\mathcal{H}(x)$ 处在变量 x^0 从左到右依次递减的序列中；而 $\mathcal{H}(x)$ 是相互作用哈密顿量密度，取为场及其厄密伴的多项式

$$\mathcal{H}(x) = \sum_i g_i \mathcal{H}_i(x), \quad (6.1.2)$$

每一项 \mathcal{H}_i 是每类场与其厄密伴的有限乘积。种类 n 粒子的场在齐次 Lorentz 群（有或者没有空间反演）的一个特定表示下变换为

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) = \sum_\sigma (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \left[u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} \right. \\ \left. + v_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n^c) e^{-ip \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

这里 n^c 标记种类 n 粒子的反粒子，而 $\exp(\pm ip \cdot x)$ 是在 p^0 等于 $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}$ 处计算的。系数函数 u_ℓ 和 v_ℓ 依赖于场的Lorentz变换性质以及场所描述粒子的自旋；在第5章计算了它们。（例如，在标量场中， u_ℓ 对于能量为 E 的粒子就是 $(2E)^{-1/2}$ ，而在Dirac场中， u_ℓ 和 v_ℓ 是5.5节所引入的归一化Dirac旋量。）指标 ℓ 在这里应该理解为粒子类型和场变换所遵循的Lorentz群表示的标记，以及用以标记表示中分量的跑动指标。不需要另外处理包含场的导数的相互作用；以我们的观点来看，一个场(6.1.3)的导数就是(6.1.3)所描述的另一个场，只不过 u_ℓ 和 v_ℓ 不同。这里，对于武断地称为“粒子”的粒子种类，诸如电子，质子等，与武断地称为“反粒子”的粒子种类，诸如正电子和反质子，我们要做一区分。湮灭粒子且产生反粒子的场算符就称为“场”；它们的厄密伴，其湮灭反粒子产生正粒子，被称为“场厄密伴”。当然，某些类似光子和 π^0 的粒子种类，反粒子是其本身；对于这些粒子，场厄密伴正比于场。

我们接着把方程(6.1.1)中的所有湮灭算符挪到右边，由于这个原因，重复使用对易或反对易关系：

$$a(\mathbf{p} \sigma n) a^\dagger(\mathbf{p}' \sigma' n') = \pm a^\dagger(\mathbf{p}' \sigma' n') a(\mathbf{p} \sigma n) + \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\sigma' \sigma} \delta_{n' n} \quad (6.1.4)$$

$$a(\mathbf{p} \sigma n) a(\mathbf{p}' \sigma' n') = \pm a(\mathbf{p}' \sigma' n') a(\mathbf{p} \sigma n) \quad (6.1.5)$$

$$a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n) a^\dagger(\mathbf{p}' \sigma' n') = \pm a^\dagger(\mathbf{p}' \sigma' n') a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n) \quad (6.1.6)$$

（对于反粒子同样如此），右边的符号 \pm 在粒子 n, n' 都是费米子时是 $-$ 号，如果有一个是玻色子或者都是玻色子则是 $+$ 号。无论何时，只要一个湮灭算符出现在最右边（或者一个产生算符出现在最左边），对方程(6.1.1)的贡献为零，这是因为这些算符湮灭真空态：

$$a(\mathbf{p} \sigma n) \Phi_0 = 0, \quad (6.1.7)$$

$$\Phi_0^\dagger a(\mathbf{p}' \sigma' n') = 0. \quad (6.1.8)$$

对方程(6.1.1)的其余贡献来自于方程(6.1.4)右边的 δ -函数项，这时初末态或相互作用哈密顿量密度中每一产生算符和湮灭算符以这种方式与其它湮灭算符或产生算符成对。

以这种方式，在多项式 $\mathcal{H}(\psi(x), \psi^\dagger(x))$ 中每一项 \mathcal{H}_i ，对序列给定的方程(6.1.1)的贡献是一求和，这个求和是对产生算符和湮灭算符的所有配对方法求和²，结果是因子乘积的积分之和，如下：

(a) 量子数为 \mathbf{p}', σ', n' 的末态粒子与 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的场厄密伴 $\psi_\ell^\dagger(x)$ 配对产生因子

$$\left[a(\mathbf{p}' \sigma' n'), \psi_\ell^\dagger(x) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip' \cdot x} u_\ell^*(\mathbf{p}' \sigma' n'). \quad (6.1.9)$$

(b) 量子数为 $\mathbf{p}', \sigma', n^c$ 的末态粒子与 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的场 $\psi_\ell(x)$ 配对产生因子

$$\left[a(\mathbf{p}' \sigma' n^c), \psi_\ell(x) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip' \cdot x} v_\ell(\mathbf{p}' \sigma' n'). \quad (6.1.10)$$

(c) 量子数为 \mathbf{p}, σ, n 的初态粒子与 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的场 $\psi_\ell(x)$ 配对产生因子

$$\left[\psi_\ell(x), a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x} u_\ell(\mathbf{p} \sigma n). \quad (6.1.11)$$

(d) 量子数为 \mathbf{p}, σ, n^c 的初态粒子与 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的场厄密伴 $\psi_\ell^\dagger(x)$ 配对产生因子

$$\left[\psi_\ell^\dagger(x), a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n^c) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x} v_\ell^*(\mathbf{p} \sigma n). \quad (6.1.12)$$

(e) 量子数为 \mathbf{p}', σ', n' 的末态粒子（或反粒子）与量子数为 \mathbf{p}, σ, n 的初态粒子（或反粒子）配对产生因子

$$\left[a(\mathbf{p}' \sigma' n'), a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n) \right]_{\mp} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\sigma' \sigma} \delta_{n' n}. \quad (6.1.13)$$

(f) $\mathcal{H}_i(x)$ 中的场 $\psi_\ell(x)$ 与 $\mathcal{H}_j(y)$ 中的场厄密伴 $\psi_m^\dagger(y)$ 配对产生因子*

$$\begin{aligned} \theta(x-y) \left[\psi_\ell^+(x), \psi_m^{+\dagger}(y) \right]_{\mp} \pm \theta(y-x) \left[\psi_m^{-\dagger}(y), \psi_\ell^-(x) \right]_{\mp} \\ \equiv -i\Delta_{\ell m}(x, y), \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

其中 ψ^+ 和 ψ^- 是 ψ 中分别湮灭粒子和产生反粒子的项:

$$\psi_\ell^+(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} u_\ell(\mathbf{p} \sigma n) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p} \sigma n), \quad (6.1.15)$$

$$\psi_\ell^-(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} v_\ell(\mathbf{p} \sigma n) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n^c). \quad (6.1.16)$$

$\theta(x-y)$ 是阶跃函数, $x^0 > y^0$ 时等于1而 $x^0 < y^0$ 时等于0。方程(6.1.14)中的出现是因为方程(6.1.1)中的编时序列; 仅当初始时, 在方程(6.1.1)中 $\mathcal{H}(x)$ 处在 $\mathcal{H}(y)$ 的左边, 即 $x^0 > y^0$, 我们才能遇到 $\mathcal{H}(x)$ 中的湮灭场 $\psi^+(x)$ 与 $\mathcal{H}(y)$ 中的产生场 $\psi^{+\dagger}(y)$ 的配对; 类似地, 仅当初始时, 在方程(6.1.1)中 $\mathcal{H}(y)$ 处在 $\mathcal{H}(x)$ 的左边, 即 $y^0 > x^0$, 我们才能遇到 $\mathcal{H}(y)$ 中的湮灭场 $\psi^{-\dagger}(y)$ 与 $\mathcal{H}(x)$ 中的产生场 $\psi^-(x)$ 的配对。(之后将解释(6.1.14)中第二项的 \pm 符号。) (6.1.14)被称为传播子; 将在下节进行计算。

可以通过将这些因子乘起来获得 S -矩阵, 还有额外的数值因子, 将在下面讨论, 然后对 $x_1 \cdots x_N$ 积分, 然后对所有的配对求和, 然后除以每类相互作用的数目。在填补所有细节之前, 首先描述一个图形体系以保持所有这些配对的痕迹将是方便的。

计算 S -矩阵的规则被合宜地总结成Feynman图的形式。(参看图6.1) 这个图由点和线构成, 点称为顶点, 每个顶点代表一个 $\mathcal{H}_i(x)$, 而每个线代表一个湮灭算符和一个产生算符的配对。更确切些:

(a) 表示一个末态粒子与 $\mathcal{H}(x)$ 之一中的一个场厄密伴进行配对的线, 从代表 $\mathcal{H}(x)$ 的顶点出发向上离开, 携带一个指向上方的箭头

(b) 表示一个末态反粒子与 $\mathcal{H}(x)$ 之一中的一个场进行配对的线, 也从代表 $\mathcal{H}(x)$ 的顶点出发向上离开, 但携带一个指向下方的箭头。(对于像 γ, π^0 的粒子, 由于它们是其自身的反粒子, 对于这样的粒子箭头全部省略。)

(c) 表示一个初态粒子与 $\mathcal{H}(x)$ 之一中的一个场进行配对的线, 从下方进入图, 终止于代表 $\mathcal{H}(x)$ 的顶点, 携带一个指向上方的箭头。

(d) 表示一个初态反粒子与 $\mathcal{H}(x)$ 之一中的一个场进行配对的线, 也从下方进入图且终止于代表 $\mathcal{H}(x)$ 的顶点, 但携带一个指向下方的箭头。

*如果相互作用 $\mathcal{H}(x)$ 被写成规范序列的形式, 就像方程(5.1.33)中那样, 那么在同一相互作用中不存在场与场厄密伴的配对。否则需要某些正规化赋予 $\Delta_{\ell m}(0)$ 的意义。

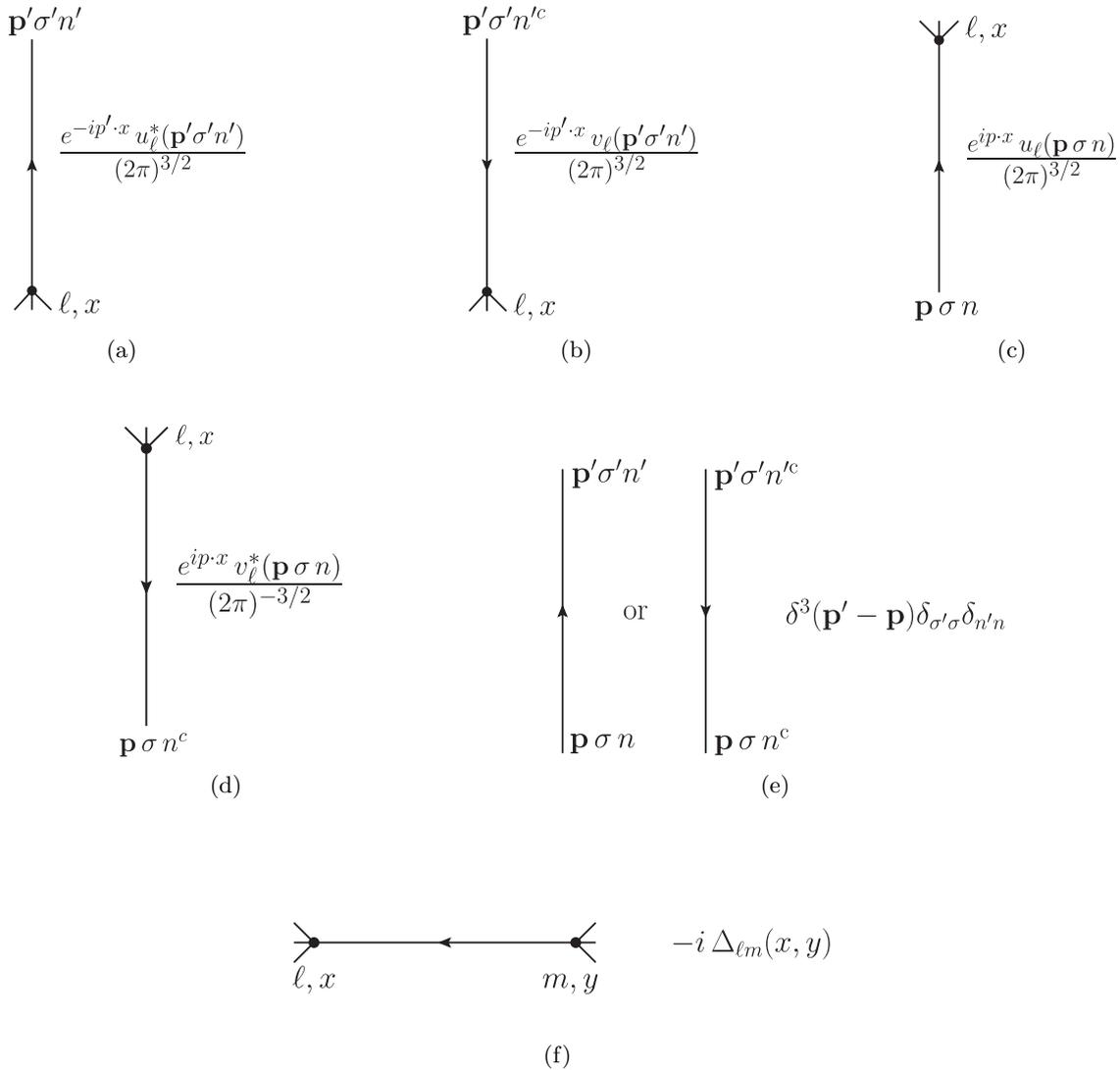


图 6.1 在坐标空间计算S-矩阵时所产生的算符配对的图形表示。对于Feynman图的每一条线，右边的表达式是一因子，其必须被包含进S-矩阵的坐标空间积分中。

(e) 表示一个末态粒子与一个初态粒子配对的线，或表示一个末态反粒子粒子与一个反初态粒子配对的线，从上至下穿过图，不与任何顶点相连，只不过箭头分别指向上方和下方。

(f) 表示 $\mathcal{H}(x)$ 中的一个场与 $\mathcal{H}(y)$ 中的一个场厄密伴进行配对的线，连接代表 $\mathcal{H}(x)$ 的顶点与代表 $\mathcal{H}(y)$ 的顶点，携带一个由 y 指向 x 的箭头。

注意：箭头的指向总是和粒子的运动方向相同与反粒子的运动方向相反。（正如上面所提及的，对于像光子这样，反粒子是其本身的粒子，箭头应该被省略。）规则(f)中所表明的箭头方向与这一约定是一致的，这是因为 $\mathcal{H}_j(y)$ 中的场厄密伴要么产生一个粒子被 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的场所湮灭，要么湮灭 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的场所产生的粒子。又注意到，因为 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的每一场或场厄密伴必须进行配对，对应于方程(6.1.2)中的 $\mathcal{H}_i(x)$ 项的 i 类顶点，与其相连的线正好等于 $\mathcal{H}_i(x)$ 场因子或场厄密伴因子的总数。这些线中，箭头指向顶点或离开顶点的数目分别等于相对应相互作用项中场的数目或场厄密伴的数目。

在方程(6.1.2)的每一相互作用项 $\mathcal{H}_i(x)$ 中，为了计算一个阶数 N_i 给定的过程对 S -矩阵的贡献，我们必须执行如下的步骤：

- (i) 画出包含 N_i 个 i 类顶点的所有Feynman图，并对于初态中的每一粒子或反粒子，线从下方进入图，对于末态中的每一粒子或反粒子，线从上方离开图，再加上任意个连接顶点的内线，并按照要求赋予每个顶点恰当的连接线数目。这些线携带上面所描述的箭头，每一个箭头可以指向下也可以指向上。用相互作用类 i 和时空坐标 x^μ 标记每个顶点。最后，用场类型 ℓ 标记连入一个顶点的每一内线或外线（对应于在那个顶点产生粒子或湮灭反粒子的场 $\psi_\ell(x)$ 或 $\psi_\ell^\dagger(x)$ ），并用初态或末态粒子（或反粒子）的量子数 \mathbf{p}, σ, n 或 \mathbf{p}', σ', n' 标记每个进入或离开图的外线。
- (ii) 对于每个 i 类顶点，计入因子 $-i$ （来自方程(6.1.1)中的 $(-i)^N$ ）与因子 g_i （ $\mathcal{H}_i(x)$ 中乘在场积上的耦合常数）。对于每个从上方离开图的线，根据箭头指向上方还是下方，计入因子(6.1.9)或(6.1.10)。对于每个从下方进入图的线，再次根据箭头方向，计入因子(6.1.11)或(6.1.12)。对于每个穿过图的线，计入因子(6.1.13)。对于每个连接两个顶点的内线，计入因子(6.1.14)。
- (iii) 对所有这些因子的乘积沿着每个顶点的坐标 x_1, x_2, \dots 积分。
- (iv) 将以这种方式从每个Feynman图中获得的结果加起来。通过在每一相互作用类型中，将每一阶的贡献加起来，直到我们力所能及的那一阶，以获得 S -矩阵的所有置换项。

注意到我们没有把方程(6.1.1)中的因子 $1/N!$ 包含在这些规则之内，这是因为方程(6.1.1)中的编时乘积是对 $x_1 x_2 \dots x_N$ 的 $N!$ 个置换的求和，对最终结果每个置换给出相同的贡献。换一种方式，有 N 个顶点的Feynman图是 $N!$ 个等价图中的一个，这些图相差的仅是顶点上指标的置换，并且这产生了一个因子 $N!$ 抵消了方程(6.1.1)中的 $1/N!$ 。（这一规则存在例外，将在下面讨论。）由于这个原因，从此之后，对于一组Feynman图，如果它们的差异仅是顶点的重新标记，我们所计入的图不超过一个。

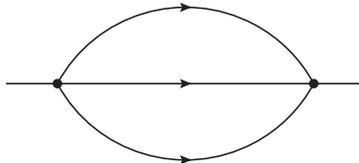


图 6.2 S -矩阵中要求额外组合学因子的图的例子。对于包含三个相同场因子（和其它场）的相互作用，我们通常在相互作用哈密顿量密度中引入因子 $1/3!$ ，以抵消对这些场与它们在其它相互作用中厄密伴配对方式求和产生的因子。但在这个图中，存在两个这种 $1/3!$ 因子，但不同配对方式仅有 $3!$ 种，所以我们得到了额外的因子 $1/3!$ 。

在某些情况下，存在必须纳入单个Feynman图贡献的额外的组合学因子或符号：

- (v) 假定一个相互作用 $\mathcal{H}_i(x)$ 包含（在其它场和场厄密伴之间） M 个相同的场因子。假定这些场中的每一个与一个不同的相互作用（对于每个都不同）中的场厄密伴配对，或者与初末态中的场厄密伴配对。这些场厄密伴中的第一个可以与 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的 M 个全同场中的任何一个进行配对；第二个可以与剩下的 $M-1$ 个全同场中的任何一个进行配对；等等，这产生一个额外因子 $M!$ 。为了弥补这点，定义耦合常数 g_i 使得一个显式因子 $1/M!$ 出现在任何包含 M 个全同场（或场共轭）的 $\mathcal{H}_i(x)$ 。例如，在一个标量场 $\phi(x)$ 中， M 阶相互作用将写成 $g\phi^M/M!$ 。（更普遍地，当相互作用包含来自同一对称多重态的场的 M 因子的和或由于其它的原因，耦合系数在 M 个玻色场或费米场的置换下是全对称或全反对称时，通常也写出显式因子 $1/M!$ 。）

然而， $M!$ 因子的这个抵消不总是完全的。例如，考察一个Feynman图，其中一个相互作用 $\mathcal{H}_i(x)$ 中的 M 个全同场与另一个相互作用 $\mathcal{H}_j(y)$ 中相对应的 M 个场厄密伴进行配对。（参看图6.2）那么通过之上的分析，我们发现仅有 $M!$ 个不同的配对（因为它在我们所谓的第一个，第二个，...场厄密伴之间没有差异），仅抵消了两个不同的相互作用中的两个 $M!$ 因子中的一个。在这种情况下，我们不得不在这类Feynman图的贡献中“手动”加入一个额外的因子 $1/M!$ 。

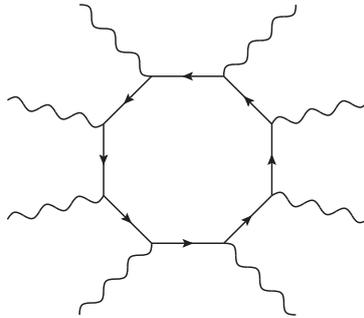


图 6.3 一个真空到真空振幅的八阶图，其中粒子仅与外场相互作用。在这个图中，波浪线表示外场。计数仅相差顶点的重新标记的图而不计数那些标记只是沿着环旋转的图，我们发现这种图有 $7!$ 个。因而来自Dyson公式(6.1.1)的因子 $1/8!$ 在这里没有被全部抵消，留下了一个额外的因子 $1/8$ 。

当顶点的某些置换对Feynman图没有影响时会产生另一组合学因子。之前我们在展开(6.1.1)中注意到，因子 $1/N!$ 通常被对 $N!$ 个图的求和所抵消，这 $N!$ 个图仅相差在 N 个顶点的标记。然而，当重新标记顶点不产生新的图时，这个抵消不是完全的。在一个有二次项相互作用 $\mathcal{H}(x) = \psi_\ell^\dagger M_{\ell\ell'} \psi_{\ell'}$ 的理论中，其中 M 可能依赖于外场，真空到真空 S -矩阵元的计算中最可能会发生这个不完全的抵消。（这类图的物理意义将在卷II中进行细致地讨论。） \mathcal{H} 中的 N 阶Feynman图是 N 个角的环。（参看图6.3）由于沿着环的指标的置换将指标移到下个顶点，这一置换产生同一图，所以这里仅有 $(N-1)!$ 个图。因此这样的图伴随因子

$$\frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}. \quad (6.1.17)$$

(vi)在包含费米场的理论中，使用方程(6.1.4)—(6.1.6)把湮灭算符移至右边以及把产生算符移至左边，会在各种配对的贡献中引入负号。具体些，只要将所有配对算符调节成彼此相邻的置换（其中湮灭算符就在和其配对的产生算符的左边）包含奇数次费米算符的交换，我们就会得到一个负号。（这是因为，为了计算一特定配对的贡献，我们可以现在方程(6.1.1)中进行置换使得对于每个湮灭算符就在与其配对算符的右边，忽视所有未配对算符的对易子和反对易子，然后将每个配对算符的积替换成它们的对易子和反对易子。）一个立即的结果是，对于费米传播子，在方程(6.1.14)中两项的相对符号中会产生一个负号。只要置换将 $\mathcal{H}(x)$ 中一个场的湮灭部分 $\psi^+(x)$ 放在 $\mathcal{H}(y)$ 中一个场厄密伴的产生部分 $\psi^{+\dagger}(y)$ 的左边，那么，若将场厄密伴的湮灭部分 $\psi^{-\dagger}(y)$ 放在场的产生部分 $\psi^-(x)$ 的左边的置换包含费米算符的一个额外交换，则会在费米子的方程(6.1.14)中的第二项产生负号。

另外，在整个Feynman图的贡献中会产生负号。例如，我们采取这样的理论，其中费米子的整个相互作用采取这样的形式

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{\ell m k} g_{\ell m k} \psi_\ell^\dagger(x) \psi_m(x) \phi_k(x), \quad (6.1.18)$$

其中 $g_{\ell mk}$ 是一般常数， $\psi_\ell(x)$ 是一组复费米场，而 $\phi_m(x)$ 是一组实玻色场（不必须是标量场）。（不仅是量子电动力学，弱相互作用，电磁相互作用以及强相互作用的整个“标准模型”所有的费米相互作用都可以写成这种形式。）我们首先处理费米-费米散射， $12 \rightarrow 1'2'$ ，直到 \mathcal{H} 中的第二阶。方程(6.1.1)中二阶项的费米算符以这样的序列出现（带有明显的缩写）

$$a(2')a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2). \quad (6.1.19)$$

到这一阶有两个连接图，对应配对

$$[a(2')\psi^\dagger(x)][a(1')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi(x)a^\dagger(2)] \quad (6.1.20)$$

和

$$[a(1')\psi^\dagger(x)][a(2')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi(x)a^\dagger(2)] \quad (6.1.21)$$



图 6.4 这是含有相互作用(6.1.18)的理论中费米子-费米子散射的二阶连接图。在这里，直线代表费米子；虚线是中性玻色子。在这两个图的贡献之间存在一个符号差异，这源于第二幅图所表示的配对中有一个费米算符的额外交换。

（参看图6.4）从(6.1.19)到达(6.1.20)要求费米算符的偶数次置换。（例如，将 $\psi(x)$ 右移三个算符，然后将 $a(1')$ 右移一个算符。）因此，在配对(6.1.20)的贡献中没有额外的负号。这本身不是那么重要； S -矩阵的总符号在跃迁几率中并不重要，并且在任何情况下依赖于对初末态的符号约定。重要的是配对(6.1.20)的贡献和(6.1.21)的贡献有一个相反的符号，这可以通过看到这两个配对之间唯一的差异是两个费米算符的交换而轻松地看到。实际上，这个相对的负号正是Fermi统计所要求的：它使得散射振幅在粒子 $1'$ 和 $2'$ （或 1 和 2 ）的交换下反对称。

然而，即使在微扰论的最低阶，也不能认为所有的符号因子都以这种简单的方式与末态或初态的反对称性相关。为了例证这一点，现在考察费米子-反费米子散射， $12^c \rightarrow 1'2'^c$ ，在同一相互作用(6.1.18)中到第二阶。费米算符在方程(6.1.1)的第二阶中以这种顺序出现：

$$a(2'^c)a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2'^c). \quad (6.1.22)$$

这里在这一阶也是两个Feynman图，对应于配对

$$[a(2'^c)\psi(x)][a(1')\psi^\dagger(x)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi^\dagger(y)a^\dagger(2'^c)] \quad (6.1.23)$$

以及

$$[a(2'^c)\psi(x)][a(1')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi^\dagger(y)a^\dagger(2'^c)]. \quad (6.1.24)$$

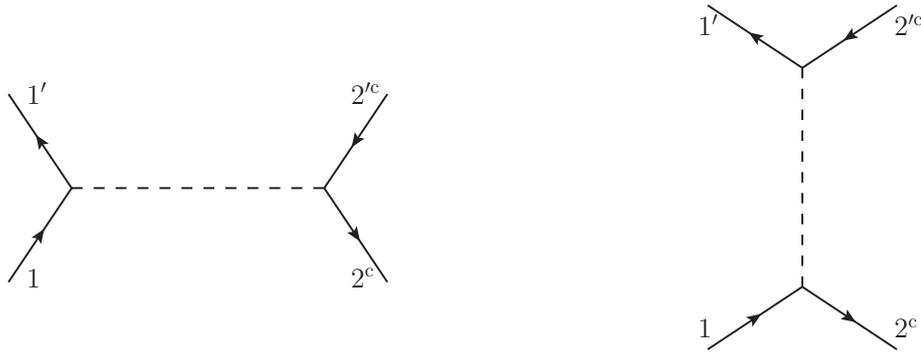


图 6.5 这是含有相互作用(6.1.18)的理论中费米子-反费米子散射的二阶连接图。在这里，直线代表费米子或反费米子，这取决于箭头方向；虚线是中性玻色子。在这两个图的贡献之间存在一个符号差异，这源于第二幅图所表示的配对中有一个费米算符的额外交换。

(参看图6.5)从(6.1.22)到达(6.1.23)要求费米算符的偶数次置换(例如，将 $\psi(x)$ 左移两个算符，将 $\psi^\dagger(y)$ 右移两个算符)所以在配对(6.1.23)的贡献中没有额外的负号。另一方面，从(6.1.22)到达(6.1.24)要求费米算符的奇数次置换(先进行到达(6.1.23)的步骤，再加上 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\psi^\dagger(y)$ 的交换)所以这个配对的贡献伴随一个额外的负号**。

当我们考察高阶的贡献时会遇到额外的符号。这里所考察的理论中费米子的相互作用全部采取形式(6.1.18)，在这样理论的一般Feynman图中，费米线要么构成穿过图的线条链，其与玻色场有若干个相互作用，如图6.6所示，要么构成费米圈，如图6.7所示。考察给任意过程的Feynman图加上一个有 M 个角的费米圈后的效应。这对应于费米算符的配对

$$[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)][\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)]\cdots[\psi(x_M)\bar{\psi}(x_1)]. \quad (6.1.25)$$

另一方面，这些算符在方程(6.1.1)中如下的序列出现

$$\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2)\cdots\bar{\psi}(x_M)\psi(x_M) \quad (6.1.26)$$

从(6.1.26)到达(6.1.25)要求费米算符的奇次置换(将 $\bar{\psi}(x_1)$ 右移 $2M-1$ 个算符)所以这种费米圈的贡献总是伴随一个负号。

这些规则产生了全部的 S -矩阵，其中包括不同集团的粒子在相距甚远的各个时空区域相互作用的过程的贡献。正如第4章所讨论的，为了计算将这种贡献排除之外的 S -矩阵部分，我们应该只计入连接Feynman图。特别地，这排除了只穿过图而没有相互作用的线，这将产生因子(6.1.13)。为了使Feynman规则完全清晰，我们将在两个不同的理论中计算粒子散射对 S -矩阵的最低阶贡献。

**实际上，这个符号并非完全与Fermi统计的要求无关。相同的场能湮灭一个粒子且产生一个反粒子，所以，在初态粒子或反粒子被换为末态反粒子或粒子的过程中存在一个关系，称为“交叉对称性”。特别地，过程 $12^c \rightarrow 1'2'^c$ 的振幅与“交叉”过程 $12' \rightarrow 1'2$ 的振幅相关；这两个配对(6.1.23)和(6.1.24)恰好对应于这一过程的两个图，其相差的是1和2' (或1'和2)的交换，所以散射振幅在初态 (或末态)粒子的交换下的反对称性自然地要求这两个配对相对贡献之间的一个符号。然而，交叉对称性不是一个普通的对称性 (它涉及运动学变量的一个解析延拓) 并且对于一般过程，很难在任意精度上使用它。

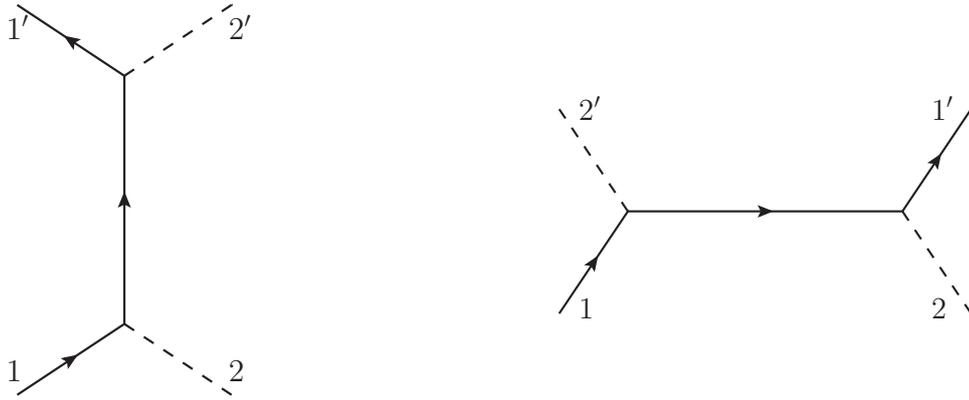


图 6.6 这是含有相互作用(6.1.18)的理论中费米子-玻色子散射的二阶连接图。在这里，直线是费米子，虚线是中性玻色子。

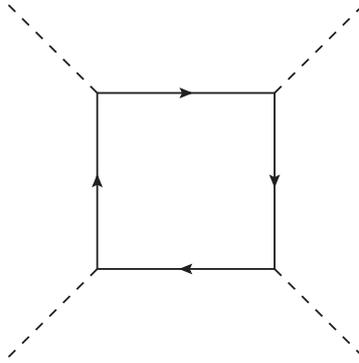


图 6.7 这是含有相互作用(6.1.18)的理论中玻色子-玻色子散射的最低阶连接图。这样的费米圈图产生一个额外的负号，这源于配对费米场的置换。

理论I

考察相互作用为(6.1.18)的费米子与自-荷共轭玻色子的理论。费米子-玻色子散射的最低阶连接图如图6.6所示。利用图6.1中所概述的规则，相对应的 S -矩阵元是

$$\begin{aligned}
 & S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1, \mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = \\
 & (2\pi)^{-6} \sum_{k'l'm'klm} (-i)^2 g_{l'm'k'} g_{mlk} u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\
 & \times \int d^4x \int d^4y \left(-i\Delta_{m'm}(y-x) \right) e^{-ip'_1 \cdot y} e^{ip_1 \cdot x} \\
 & \times \left[e^{-ip'_2 \cdot y} u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) e^{ip_2 \cdot x} u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right. \\
 & \left. + e^{-ip'_2 \cdot x} u_k^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) e^{ip_2 \cdot y} u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right]. \quad (6.1.27)
 \end{aligned}$$

(这里的指标1和2分别用于费米子和玻色子。) 对于费米子-费米子散射，也有两个二阶图，如

图6.4所示。它们给出了 S -矩阵元

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1, \mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= (2\pi)^{-6} \sum_{k'l'm'klm} (-i)^2 g_{m'mk'} g_{l'lk} \\
&\times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) u_m(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\
&\times \int d^4x \int d^4y e^{-ip'_2 \cdot x} e^{-ip'_1 \cdot y} e^{ip_2 \cdot x} e^{ip_1 \cdot y} (-i) \Delta_{k'k}(x-y) \\
&- [1' \rightleftharpoons 2']
\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

其中最后一项代表减去交换粒子1'和2'（或等价地交换1和2）后的前一项。在这一理论中，没有玻色子-玻色子散射的二阶图；最低阶的图是四阶的，例如图6.7中展示的图。类似方程(6.1.27)和(6.1.28)的公式的更特殊例子将在6.3节给出，在那之前，我们将要计算传播子并过渡到动量空间。

在上例的相互作用(6.1.18)中，三个场是不同的。看一下三个场都相同，或者至少是以一种对称的方式进入相互作用的三线相互作用的一个例子是有益的。

理论II

现在，令相互作用密度是一组实玻色场 $\phi_\ell(x)$ 的三线性积的和。

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{\ell mn} g_{\ell mn} \phi_\ell(x) \phi_m(x) \phi_n(x) \tag{6.1.29}$$

其中 $g_{\ell mn}$ 是实的全对称耦合系数。假定我们想考察这个相互作用的一个散射过程 $12 \rightarrow 1'2'$ 直到2阶。两个顶点中的每一个都要与四条外线中的两个相连。（唯一的其它可能性是，一条外线与一个顶点相连，另外三条与另一顶点相连，但是与三条外线相连的顶点无法与其它顶点相连，所以这将是一个非连贡献。）每个顶点所要求的额外的线恰好把二者连接起来。这类图有3个，区别是与线1连接同一顶点的是线2，线1'还是线2'。（参看图6.8。）通过上面所给的规则，这三个图对 S -矩阵的贡献是

$$\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1, \mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2} \\
&= (-i)^2 (2\pi)^{-6} \sum_{\ell\ell' m'mm'm''} g_{\ell\ell'\ell'} g_{mm'm''} \int d^4x \int d^4y \left(-i \Delta_{\ell''m''}(x, y) \right. \\
&\quad \times \left[u_\ell^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) e^{-ip'_1 \cdot x} u_{\ell'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) e^{-ip'_2 \cdot x} \right. \\
&\quad \quad \times u_m(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) e^{ip_1 \cdot y} u_{m'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) e^{ip_2 \cdot y} \\
&\quad + u_{\ell'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) e^{-ip'_1 \cdot x} u_\ell(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) e^{ip_1 \cdot x} \\
&\quad \quad \times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) e^{-ip'_2 \cdot y} u_m(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) e^{ip_2 \cdot y} \\
&\quad + u_{\ell'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) e^{-ip'_2 \cdot x} u_\ell(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) e^{ip_1 \cdot x} \\
&\quad \quad \left. \left. \times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) e^{-ip'_1 \cdot y} u_m(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) e^{ip_2 \cdot y} \right] \right). \tag{6.1.30}
\end{aligned}$$

甚至更加特殊些，如果在这个理论中的玻色子是单一种类的无自旋粒子，那么我们可以将相互作用(6.1.29)写成如下形式

$$\mathcal{H} = g\phi^3/3! \tag{6.1.31}$$

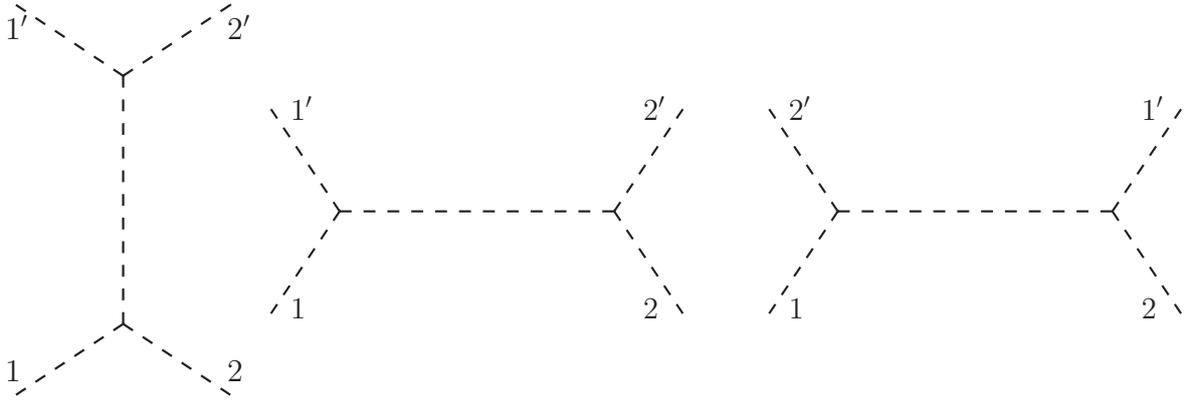


图 6.8 这是含有相互作用(6.1.29)的理论中玻色子-玻色子散射的二阶连接图。

那么对于标量-标量散射的 S -矩阵元(6.1.30)是

$$S_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} = \frac{ig^2}{(2\pi)^6 \sqrt{16E'_1 E'_2 E_1 E_2}} \int d^4x \int d^4y \Delta_F(x-y) \times \left[\exp(-i(p'_1 + p'_2) \cdot x) \exp(i(p_1 + p_2) \cdot y) + \exp(i(p_1 - p'_1) \cdot x) \exp(i(p_2 - p'_2) \cdot y) + \exp(i(p_1 - p'_2) \cdot x) \exp(i(p_2 - p'_1) \cdot y) \right],$$

其中 $\Delta_F(x-y)$ 是标量场传播子，在下一节进行计算。在 $\mathcal{H}(x)$ 中没有三阶或奇数阶项。

6.2 传播子的计算

我们现在转向传播子(6.1.14)的计算，传播子是Feynman规则中的一个重要元素，其源于场 $\psi_\ell(x)$ 与场厄密伴 $\psi_m^\dagger(y)$ 的配对。将方程(6.1.15)与(6.1.16)代入方程(6.1.14)，并利用湮灭算符与产生算符的对易或反对易关系，我们立即有

$$-i\Delta_{\ell m}(x-y) = \theta(x-y)(2\pi)^{-3} \int d^3p \sum_{\sigma} u_{\ell}(\mathbf{p}\sigma) u_m^*(\mathbf{p}\sigma) e^{ip \cdot (x-y)} \pm \theta(y-x)(2\pi)^{-3} \int d^3p \sum_{\sigma} v_m^*(\mathbf{p}\sigma) v_{\ell}(\mathbf{p}\sigma) e^{ip \cdot (y-x)}. \quad (6.2.1)$$

在第5章计算对易子和反对易子的过程中，我们证明了

$$\sum_{\sigma} u_{\ell}(\mathbf{p}\sigma) u_m^*(\mathbf{p}\sigma) = \left(2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}\right)^{-1} P_{\ell m}(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}), \quad (6.2.2)$$

$$\sum_{\sigma} v_{\ell}(\mathbf{p}\sigma) v_m^*(\mathbf{p}\sigma) = \pm \left(2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}\right)^{-1} P_{\ell m}(-\mathbf{p}, -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}) \quad (6.2.3)$$

其中 $P_{\ell m}(\mathbf{p}, \omega)$ 是 \mathbf{p} 和 ω 的多项式。（这里和方程(6.2.1)一样，上面的符号和下面的符号分别指代玻色场和费米场。）例如，如果 $\psi_\ell(x)$ 和 $\psi_m(y)$ 是自旋零粒子的标量场 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ ，那么我们就有

$$P(p) = 1. \quad (6.2.4)$$

如果 $\psi_\ell(x)$ 和 $\psi_m(y)$ 是自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的Dirac场, 那么

$$P_{\ell m}(p) = \left[(-i\gamma_\mu p^\mu + m)\beta \right]_{\ell m}, \quad (6.2.5)$$

其中 ℓ 和 m 在这里是4-值Dirac指标。(矩阵 β 出现在这里是因为我们所考察的是 $\psi_\ell(x)$ 与 $\psi_m^\dagger(y)$ 的配对, 在 $\psi(x)$ 与 $\bar{\psi}(y) \equiv \psi^\dagger(y)\beta$ 的配对中则没有 β 。) 如果 $\psi_\ell(x)$ 和 $\psi_m(y)$ 是自旋1粒子的矢量场 $V_\mu(x)$ 和 $V_\nu(y)$, 那么

$$P_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} + m^{-2}p_\mu p_\nu. \quad (6.2.6)$$

更普遍些, 如果 $\psi_\ell(x)$ 和 $\psi_m(y)$ 是自旋 j 粒子在齐次Lorentz群的不可约 (A, B) 和 (\tilde{A}, \tilde{B}) 表示下的场 $\psi_{ab}(x)$ 和 $\psi_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)$ 的分量, 那么

$$\begin{aligned} P_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(p) &= \sum_{a'b'} \sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'} \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma, a'b') C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}'\tilde{b}') \\ &\times \left[\exp(-\theta \hat{p} \cdot \mathbf{J}^{(A)}) \right]_{aa'} \left[\exp(+\theta \hat{p} \cdot \mathbf{J}^{(B)}) \right]_{bb'} \\ &\times \left[\exp(-\theta \hat{p} \cdot \mathbf{J}^{(\tilde{A})}) \right]_{\tilde{a}\tilde{a}'} \left[\exp(+\theta \hat{p} \cdot \mathbf{J}^{(\tilde{B})}) \right]_{\tilde{b}\tilde{b}'}, \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

其中 $\sinh \theta = |\mathbf{p}|/m$, 而 $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$ 以单位步阶分别取遍 $-A$ 到 $+A$, $-B$ 到 $+B$, $-\tilde{A}$ 到 $+\tilde{A}$ 和 $-\tilde{B}$ 到 $+\tilde{B}$, 对于跑动指标 a', b', \tilde{a}' 和 \tilde{b}' 同样如此。

将方程(6.2.2)和(6.2.3)代入方程(6.2.1)得出

$$\begin{aligned} -i\Delta_{\ell m}(x-y) &= \theta(x-y) P_{\ell m} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_+(x-y) \\ &+ \theta(y-x) P_{\ell m} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_+(x-y), \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

其中 $\Delta_+(x)$ 是第5章引入的函数

$$\Delta_+(x) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^3p (2p^0)^{-1} e^{ip \cdot x} \quad (6.2.9)$$

其中 p^0 取为 $+\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 。

为了继续下去, 我们必须讨论一下如何扩张多项式 $P(p)$ 的定义。方程(6.2.2)和(6.2.3)仅定义“质量壳上”的4-动量, 即有 $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 。由于任意幂次的 $(p^0)^{2\nu}$ 或 $(p^0)^{2\nu+1}$ 总可以分别写成 $(\mathbf{p}^2 + m^2)^\nu$ 或 $p^0(\mathbf{p}^2 + m^2)^\nu$, 所以这类4-动量的任意多项式函数总可以取为 p^0 的线性函数。因此我们可以通过如下条件定义多项式 $P^{(L)}(q)$

$$\begin{aligned} P^{(L)}(p) &= P(p) \quad \left(\text{对于 } p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right), \\ P^{(L)}(q) &= P^{(0)}(\mathbf{q}) + q^0 P^{(1)}(\mathbf{q}) \quad \left(\text{对于一般的 } q^\mu \right), \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

其中 $P^{(0,1)}$ 是仅依赖于 \mathbf{q} 的多项式。现在我们可以利用关系

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \theta(x^0 - y^0) = -\frac{\partial}{\partial x^0} \theta(y^0 - x^0) = \delta(x^0 - y^0) \quad (6.2.11)$$

($\theta(x)$ 在 x_0 处有一个单位跃阶, 而在其它地方是常数) 移除方程(6.2.8)中 θ 函数左边的求导算符

$$\begin{aligned} \Delta_{\ell m}(x, y) = & P_{\ell m}^{(L)} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_F(x - y) \\ & + \delta(x^0 - y^0) P_{\ell m}^{(1)}(-i\nabla) \left[\Delta_+(x - y) - \Delta_+(y - x) \right], \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

其中 Δ_F 是“Feynman传播子”

$$-i\Delta_F(x) \equiv \theta(x)\Delta_+(x) + \theta(-x)\Delta_+(-x). \quad (6.2.13)$$

然而, 当 $x^0 = 0$ 时, 由于在方程(6.2.9)中 $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ 的改变可以被积分变量 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ 的改变所抵消。那么我们就可以扔掉方程(6.2.12)中的第二项并写出

$$\Delta_{\ell m}(x, y) = P_{\ell m}^{(L)} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_F(x - y). \quad (6.2.14)$$

将Feynman传播子的表达式用作Fourier积分将是最有用的。方程(6.2.13)中的阶跃函数有Fourier表示*

$$\theta(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ist)}{s + i\epsilon} ds. \quad (6.2.15)$$

这可以与 $\Delta_+(x)$ 的Fourier积分(6.2.9)相结合。我们在方程(6.2.13)中引入新的积分变量, $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}, q^0 = p^0 + s$, 得到

$$\begin{aligned} -i\Delta_F(x) = & -\frac{1}{2\pi i} \int d^3q \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - iq^0 x^0)}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}} \\ & \times \left[\left(q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon \right)^{-1} + \left(-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

组合分母并采取4-维记法, 我们有

$$\Delta_F(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{\exp(iq \cdot x)}{q^2 + m^2 - i\epsilon}, \quad (6.2.16)$$

其中 $q^2 \equiv \mathbf{q}^2 - (q^0)^2$ 。(我们将分母中的 $2\epsilon\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ 换为了 ϵ , 这是因为重点是这个量是正的无限小量) 这立即表明了 Δ_F 是Klein-Gordon微分算符的Green函数, 也就是说

$$(\square - m^2) \Delta_F(x) = -\delta^4(x) \quad (6.2.17)$$

其中边界条件由分母中的 $-i\epsilon$ 所指定: 正如方程(6.2.13)所示, $\Delta_F(x)$ 在 $x^0 \rightarrow +\infty$ 或 $x^0 \rightarrow -\infty$ 时分别只包含正频率项或负频率项, 即 $\exp(-ix^0\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ 或 $\exp(+ix^0\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ 。

现在将方程(6.2.16)代入方程(6.2.14)给出的传播子为

$$\Delta_{\ell m}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{P_{\ell m}^{(L)}(q) e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (6.2.18)$$

*为了证明这点, 注意到, 如果 $t > 0$, 那么积分围道可以与下半平面的一个顺时针半圆相连进行闭合, 所以积分选取来自极点 $s = -i\epsilon$ 处的一个 $-2\pi i$ 的贡献。如果 $t < 0$, 那么积分围道可以与上半平面的一个逆时针半圆相连进行闭合, 这个区域内被积函数是解析的, 积分结果为零。

这个表达式有一个明显的问题。当 p 在质量壳 $p^2 = -m^2$ 上时，多项式 $P(p)$ Lorentz-协变的，但是在方程(6.2.18)中，我们对所有的 q^μ 积分，而没有限制在质量壳上。对于一般的 q^μ ，多项式 $P^{(L)}(q)$ 定义为对 q^0 是线性的，除非这个多项式对每个空间分量 q^i 也是线性的，这个条件显然不遵从Lorentz协变性。代替地，我们总能对普遍的4-动量 q^μ 定义多项式 $P(p)$ 的扩张，我们将其称为 $P(q)$ ， $P(q)$ 对普遍的 q^μ 是Lorentz-协变的，也就是说

$$P_{\ell m}(\Lambda q) = D_{\ell \ell'}(\Lambda) D_{mm'}^*(\Lambda) P_{\ell' m'}(q),$$

其中 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是一般Lorentz变换，而 $D(\Lambda)$ 是该Lorentz群的一个恰当表示。例如，对于标量场，Dirac场和矢量场，这些协变扩张显然是通过将方程(6.2.4)，(6.2.5)和(6.2.6)中的 p^μ 替换为普遍的 q^μ 而完成的。对于标量场和Dirac场，它们以及是 q^0 的线性函数，所以在 $P^{(L)}(q)$ 和 $P(q)$ 之间没有差异：

$$P_{\ell m}^{(L)}(q) = P_{\ell m}(q) \quad (\text{标量场, Dirac场}). \quad (6.2.19)$$

另一方面，对于自旋1粒子的矢量场，协变多项式的00分量 $P_{\mu\nu}(q) \equiv \eta_{\mu\nu} + m^{-2}q_\mu q_\nu$ 是 q^0 的二次型，所以存在一个差异：

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}^{(L)}(q) &= \eta_{\mu\nu} + m^{-2} [q_\mu q_\nu - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2)] \\ &= P_{\mu\nu}(q) + m^{-2} (q^2 + m^2) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

(这里的额外项通过两个条件来确定，一个是它必须抵消 $P_{00}(q)$ 中的 $(q_0)^2$ 项，另一是当 q^μ 在质量壳上时必须为零。) 将其代入方程(6.2.18)给出的矢量场的传播子为

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \frac{P_{\mu\nu}(q) e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} + m^{-2} \delta^4(x-y) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0. \quad (6.2.21)$$

第一项显然是协变的，而第二项，尽管不协变，却是定域的，所以可以通过给哈密顿量密度加上一个定域非协变项来抵消它。特别地，如果 $V_\mu(x)$ 通过 $\mathcal{H}(x)$ 中的一项 $V_\mu(x)J^\mu(x)$ 与其它场进行相互作用，那么方程(6.2.21)中第二项的效应是产生一个有效的相互作用

$$-i\mathcal{H}_{eff}(x) = \frac{1}{2} \left[-iJ^\mu(x) \right] \left[-iJ^\nu(x) \right] \left[im^{-2} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \right].$$

(因子 $-i$ 是总伴随顶点与传播子的因子。需要因子 $\frac{1}{2}$ 是因为存在两种方式来配对 $\mathcal{H}_{eff}(x)$ 与其它场，相差的是 J^μ 和 J^ν 的交换。) 因此方程(6.2.21)中非协变第二项的效应可以通过给 $\mathcal{H}(x)$ 增加如下的非协变项来抵消

$$\mathcal{H}_{NC}(x) = -\mathcal{H}_{eff}(x) = \frac{1}{2m^2} \left[J^0(x) \right]^2. \quad (6.2.22)$$

正是矢量场的等时对易子在零间隔处的奇异项要求我们采用一类比标量密度大得多的相互作用。该理论中 S -矩阵的Lorentz不变性的非微扰证明将在下一章给出。

不应该认为这仅是与自旋 $j \geq 1$ 相联系的现象。例如，考察与自旋 $j = 0$ 的粒子相联系的矢量场，其等于(在第5章讨论过)标量场的导数 $\partial_\lambda \phi(x)$ 。对于这个场与标量 $\phi^\dagger(y)$ 的配对，在质量壳上的多项式 $P(p)$ 是

$$P_\lambda(p) = ip_\lambda, \quad (6.2.23)$$

而 $\partial_\lambda \phi(x)$ 与 $\partial_\eta \phi^\dagger(y)$ 的配对给出多项式

$$P_{\lambda,\eta}(p) = p_\lambda p_\eta. \quad (6.2.24)$$

对于普遍的不在质量壳上的4-动量 q^μ ，协变多项式再一次通过将方程(6.2.23)和(6.2.24)中的 p^μ 替换成 q^μ 获得。方程(6.2.23)显示了 $P_\lambda(q)$ 已是 q_0 的线性函数，所以在 $P_\lambda(q)$ 和 $P_\lambda^{(L)}(q)$ 之间不存在差异。然而，对于方程(6.2.24)存在一个差异：

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\eta}^{(L)}(q) &= q_\lambda q_\eta - (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2)\delta_\lambda^0 \delta_\eta^0 \\ &= P_{\lambda,\eta}(q) + (q^2 + m^2)\delta_\lambda^0 \delta_\eta^0, \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

所以在这里传播子是

$$\Delta_{\lambda,\eta}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{q_\lambda q_\eta e^{iq \cdot x}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} + \delta_\lambda^0 \delta_\eta^0 \delta^4(x - y). \quad (6.2.26)$$

就像之前一样，第二项的非协变效应可以通过给相互作用加上非协变项去掉

$$\mathcal{H}_{NC}(x) = \frac{1}{2} [J^0(x)]^2, \quad (6.2.27)$$

其中， $J^\mu(x)$ 在这里是流，其与 $\mathcal{H}(x)$ 协变部分中的 $\partial_\mu \phi(x)$ 相乘。

应该清楚（至少对于有质量粒子），以给哈密顿量密度加上非协变定域项的方式，总可以抵消传播子非协变部分的效应。这是因为当 q^μ 在质量壳上时，传播子中的分子 $P_{\ell m}^{(L)}(q)$ 必须等于协变多项式 $P_{\ell m}(q)$ ，所以 $P_{\ell m}^{(L)}(q)$ 与 $P_{\ell m}(q)$ 之差必须包含因子 $q^2 + m^2$ 。在 $P_{\ell m}^{(L)}(q)$ 与 $P_{\ell m}(q)$ 之差对方程(6.2.18)的贡献中，这个因子抵消了分母 $(q^2 + m^2 - i\epsilon)$ ，所以方程(6.2.18)总等于协变项加上正比于 δ -函数 $\delta^4(x - y)$ 或其导数的项。后者的效应可以通过给相互作用加上一个二次型去掉，这个二次项是配对场耦合的流的二次型，或者是它们导数的二次型。在下文中，将默认的假定这样的项被包含在相互作用中，结果是我们将在传播子(6.2.18)中使用协变多项式 $P_{\ell m}(q)$ ，因而从此之后将扔掉指标“L”。

看起来这似乎是一个相当特殊的步骤。幸运的是，在下一章所讨论的正则体系中，在哈密顿量密度中会自动出现非协变项，而这个协变性就是抵消传播子的非协变项所需要的。事实上，这构成了引入正则体系的部分动机。

* * *

在结束本节之前，讨论一些传播子的其它定义可能是有用的，这些通常出现在文献中的定义等价于方程(6.2.1)。首先，对方程(6.1.14)取真空期望值给出

$$\begin{aligned} -i\Delta_{\ell m}(x, y) &= \theta(x - y) \left\langle \left[\psi_\ell^+(x), \psi_m^{\dagger}(y) \right]_{\mp} \right\rangle_0 \\ &\quad \pm \theta(y - x) \left\langle \left[\psi_m^{-\dagger}(y), \psi_\ell^-(x) \right]_{\mp} \right\rangle_0. \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

（这里 $\langle AB \dots \rangle_0$ 代表真空期望值 $(\Phi_0, AB \dots \Phi_0)$ 。） $\psi_\ell^+(x)$ 和 $\psi_m^{-\dagger}(y)$ 都湮灭真空，所以方程(6.2.28)中，每个对易子或反对易子仅有一项对传播子有贡献：

$$-i\Delta_{\ell m}(x, y) = \theta(x - y) \langle \psi_\ell^+(x) \psi_m^{\dagger}(y) \rangle_0 \pm \theta(y - x) \langle \psi_m^{-\dagger}(y) \psi_\ell^-(x) \rangle_0. \quad (6.2.29)$$

另外， $\psi^{-\dagger}$ 和 ψ^+ 将湮灭右边的真空态，而 ψ^- 和 ψ^{\dagger} 将湮灭左边的真空态，所以方程中的所有 ψ^+ 和 ψ^- 都可以换成完整场 $\psi = \psi^+ + \psi^-$ ：

$$-i\Delta_{\ell m}(x, y) = \theta(x - y) \langle \psi_\ell(x) \psi_m^{\dagger}(y) \rangle_0 \pm \theta(y - x) \langle \psi_m^{\dagger}(y) \psi_\ell(x) \rangle_0. \quad (6.2.30)$$

这通常写做

$$-i\Delta_{\ell m}(x, y) = \langle T\{\psi_{\ell}(x)\psi_m^{\dagger}(y)\} \rangle_0, \quad (6.2.31)$$

其中 T 是编时乘积，在对任何费米算符的奇次置换有一负号的补充定义下，它的定义现在扩张**至所有场。

6.3 动量空间规则

6.1节所概述的Feynman图规则说明了如何计算一个给定的 N 阶图对 S -矩阵的贡献，这个贡献是对时光相关因子之积的 N 个时空坐标进行积分。对于一个末态粒子（或反粒子）线，若其携带动量 p^{μ} 且离开的顶点的时空坐标为 x^{μ} ，我们得到一个正比于 $\exp(-ip^{\mu} \cdot x)$ 的因子，对于一个初态粒子线，若其携带动量 p^{μ} 且进入的顶点的时空坐标为 x^{μ} ，我们得到一个正比于 $\exp(+ip^{\mu} \cdot x)$ 。在6.2节，与连接 y 和 x 的内线相关的因子可以表示成一个积分变量为非质量壳4-动量 q^{μ} ，被积函数正比于 $\exp(iq^{\mu} \cdot (x - y))$ 的Fourier积分。我们可以认为 q^{μ} 是沿着内线，以箭头的方向，从 y 流向 x 的4-动量。因此，对每个顶点时空位置的积分仅产生因子

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p + \sum q - \sum p' - \sum q' \right), \quad (6.3.1)$$

其中 $\sum p'$ 和 $\sum p$ 分别代表所有离开顶点的末态粒子和所有进入顶点的初态粒子的总4-动量；而 $\sum q'$ 和 $\sum q$ 分别代表箭头离开顶点的内线和箭头进入顶点的内线所带有的总4-动量。当然，取对 x^{μ} 的积分，我们现在必须对每一内线的Fourier变量 q^{μ} 积分。

这些讨论可以被封装进一组新的，作为对动量变量的积分计算 S -矩阵贡献的，Feynman规则（参看图6.9）：

- (i) 正像6.1节所描述的，画出所需阶的所有Feynman图。然而，不是用时空坐标来标记每个顶点，每个内线现在被一个不在质壳上的4-动量标记，这个动量通常视为以箭头的方向流动（或者，对于没有箭头的中性粒子线，则是以任意两个方向。）
- (ii) 对于每个 i 类定点，计入因子

$$-i(2\pi)^4 g_i \delta^4 \left(\sum p + \sum q - \sum p' - \sum q' \right) \quad (6.3.2)$$

其中动量求和与(6.3.1)中的求和有相同的意义。这个 δ -函数确保了4-动量在图中的每个点上守恒。对于每个从上方离开图的外线，根据箭头指向上方还是下方，分别计入因子 $(2\pi)^{-3/2} u_{\ell}^*(\mathbf{p}'\sigma'n')$ 或 $(2\pi)^{-3/2} v_{\ell}(\mathbf{p}'\sigma'n')$ 。对于每个从下方进入图的外线，根据箭头指向上方还是下方，分别计入因子 $(2\pi)^{-3/2} u_{\ell}(\mathbf{p}\sigma n)$ 或 $(2\pi)^{-3/2} v_{\ell}^*(\mathbf{p}\sigma n)$ 。对于端点被标记为 ℓ 和 m 的内线，箭头由 m 指向 ℓ ，且携带动量指标 q^{μ} ，其所计入的因子是 $-i\Delta_{\ell m}(x)$ 的被积函数中 $e^{iq \cdot x}$ 的系数：

$$-i(2\pi)^{-4} P_{\ell m}(q) / (q^2 + m_{\ell}^2 - i\epsilon). \quad (6.3.3)$$

提醒：对于4-动量为 q 的标量或反标量， u 和 v 就是 $(2q^0)^{-1/2}$ ，而多项式 $P(q)$ 是1。对于4-动量为 p 且质量为 M 的旋量， u 和 v 是5.5节所描述的归一化Dirac旋量，多项式 $P(p)$ 是矩阵 $(-i\gamma_{\mu}p^{\mu} + M) \beta$ 。

**这与之前我们在第3章中对哈密顿量密度编时乘积的定义是不一致的，这是因为哈密顿量密度仅能包含费米场因子的偶数次置换。

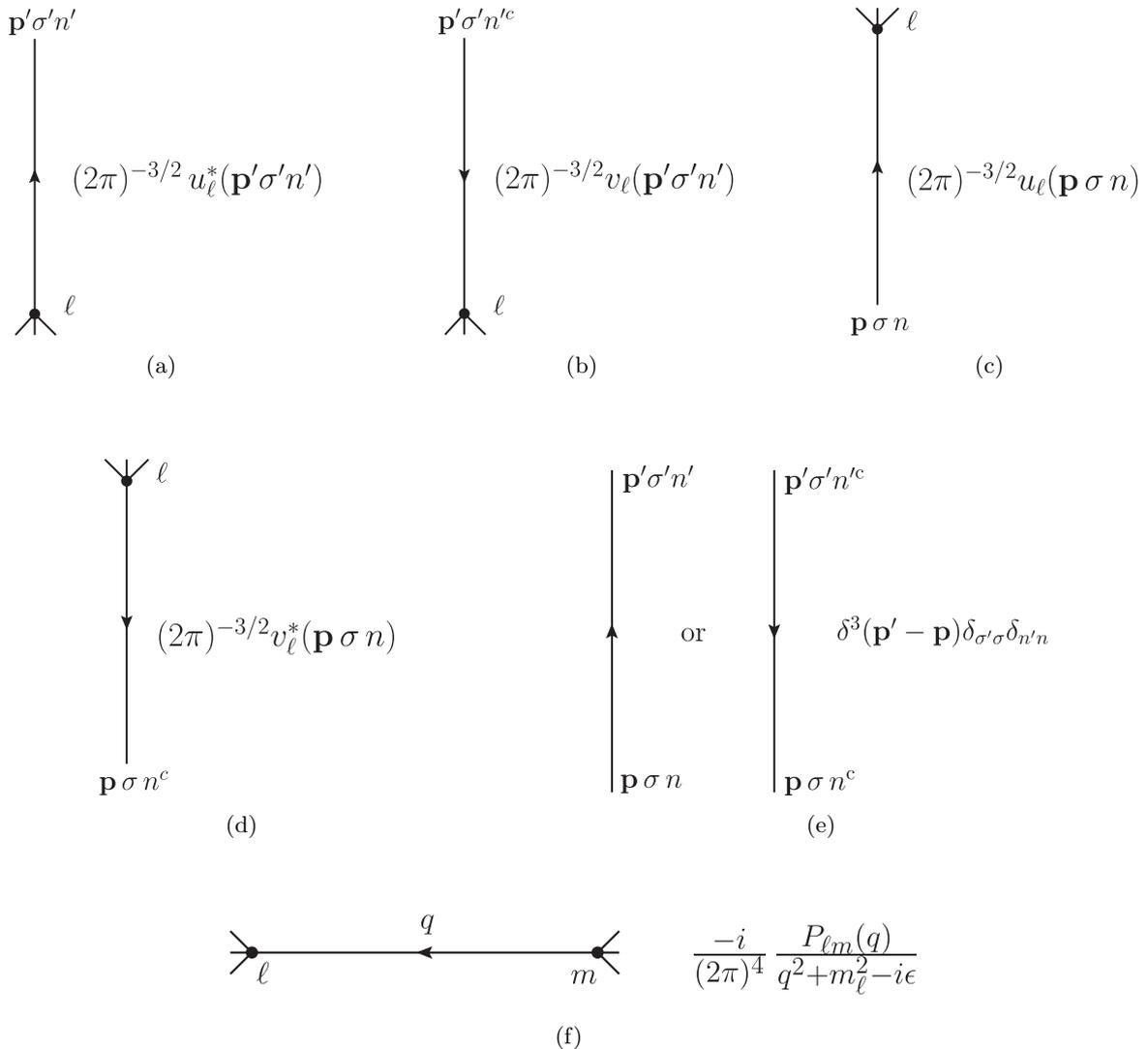


图 6.9 在动量空间计算S-矩阵时所产生的算符配对的图形表示。对于Feynman图的每一条线，右边的表达式是一因子，其必须被包含进S-矩阵的动量空间积分中。

- (iii) 将所有的那些因子乘起来，对内线所携带的4-动量积分，并对所有的场指标 ℓ, m 等求和。
- (iv) 将所有以这种方式从Feynman图中获得的结果加起来。

就像6.1节部分(v)和部分(vi)所描述的那样，也可能需要计入额外的组合学因子和费米符号。在本节末尾会给出例子。

对于每个内线，我们有一个4-动量积分变量，但它们中的多数被顶点附带的 δ -函数所消除。由于能量和动量分别对一个Feynman图的每个连接部分守恒，在一个有 C 个连接部分的图中将存在 C 个 δ -函数。因此，在有 I 个内线和 V 个顶点的图中，不被 δ -函数所固定的独立4-动量的数目是 $I - [V - C]$ 。这显然也是独立圈的个数 L ：

$$L = I - V + C , \tag{6.3.4}$$

L 的定义是被剪断却不使图非连的最大内线条数，这是因为任何这样的内线且仅有这样的内线能被赋予一个独立的4-动量。我们可以认为独立动量变量是每个圈内循环流动动量的表征。特别地，树图没有圈；对于这样的图，在将 δ -函数考虑进去后将没有动量空间积分。

例如，在一个相互作用为(6.1.18)的理论中，在动量空间Feynman规则下，费米子-玻色子散射的 S -矩阵(6.1.27)给定为

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = & \sum_{k'l'm'klm} (-i)^2(2\pi)^8 g_{l'm'k'} g_{mlk} u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\ & \times \int d^4q \left(-i(2\pi)^{-4} \frac{P_{m'm}(q)}{q^2 + m_m^2 - i\epsilon} \right) \\ & \times (2\pi)^{-6} \left[u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2) u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \delta^4(p_1 + p_2 - q) \delta^4(q - p_{1'} - p_{2'}) \right. \\ & \left. + u_k^*(\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2) u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \delta^4(p_2 - p_{1'} + q) \delta^4(p_1 - p_{2'} - q) \right], \end{aligned}$$

其中指标1和2分别代表费米子和玻色子。动量空间积分在这里是平庸的，给出

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = & i(2\pi)^{-2} \delta^4(p_1 + p_2 - p_{1'} - p_{2'}) \\ & \times \sum_{k'l'm'klm} g_{l'm'k'} g_{mlk} u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\ & \times \left[\frac{P_{m'm}(p_1 + p_2)}{(p_1 + p_2)^2 + m_m^2 - i\epsilon} u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2) u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right. \\ & \left. + \frac{P_{m'm}(p_{2'} - p_1)}{(p_{2'} - p_1)^2 + m_m^2 - i\epsilon} u_k^*(\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2) u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right]. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

以同样的方式，同一理论中费米子-费米子散射的 S -矩阵元是

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = & i(2\pi)^{-2} \delta^4(p_1 + p_2 - p_{1'} - p_{2'}) \\ & \times \sum_{k'l'm'klm} g_{m'mk'} g_{l'lk} \frac{P_{k'k}(p_{1'} - p_1)}{(p_{1'} - p_1)^2 + m_k^2 - i\epsilon} \\ & \times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2) u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) u_m(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\ & - [1' \Rightarrow 2']. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

这些结果例证了一个更加紧凑记号的需要。我们可以定义费米子-玻色子耦合矩阵

$$[\Gamma_k]_{lm} \equiv g_{lmk}. \quad (6.3.7)$$

在矩阵记号下, 费米子-玻色子散射的矩阵元(6.3.5)和费米子-费米子散射的矩阵元(6.3.6)可以重写为

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \sum_{k'k} \\
&\times \left[\left(u^\dagger(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\Gamma_{k'} \frac{P(p_1 + p_2)}{(p_1 + p_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \Gamma_k u(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \right) \right. \\
&\quad \times u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2)u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \\
&\quad + \left(u^\dagger(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\Gamma_{k'} \frac{P(p_1 - p'_2)}{(p_1 - p'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \Gamma_k u(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \right) \\
&\quad \left. \times u_k^*(\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2)u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right] \tag{6.3.8}
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \\
&\times \sum_{k'k} \frac{P_{k'k}(p_{1'} - p_1)}{(p_{1'} - p_1)^2 + m_k^2 - i\epsilon} \\
&\times \left(u^\dagger(\mathbf{p}'_2n'_2\sigma'_2)\Gamma_{k'}u(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right) \left(u^\dagger(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\Gamma_ku(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \right) \\
&\quad - [1' \rightleftharpoons 2'] , \tag{6.3.9}
\end{aligned}$$

其中, 方程(6.3.8)和(6.3.9)中的 M^2 和 m^2 分别是费米子和玻色子的对角质量矩阵。使用矩阵记法下的一般规则是, 以箭头指示的相反方向沿着线走, 依次写下系数函数, 耦合矩阵和传播子。在相同记法下, 同一理论中图6.7所示的玻色子-玻色子散射的 S -矩阵元将由一圈图的一个和给出:

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= -(2\pi)^{-6}\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \\
&\times \sum_{k_1k_2k'_1k'_2} u_{k_1}^*(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1)u_{k_2}^*(\mathbf{p}'_2, \sigma'_2, n'_2)u_{k_1}(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1)u_{k_2}(\mathbf{p}_2, \sigma_2, n_2) \\
&\times \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \Gamma_{k_2} \frac{P(q)}{q^2 + M^2 - i\epsilon} \Gamma_{k'_1} \frac{P(q + p'_1)}{(q + p'_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \right. \\
&\quad \left. \times \Gamma_{k_1} \frac{P(q + p'_1 - p_1)}{(q + p'_1 - p_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \Gamma_{k_2} \frac{P(q - p'_2)}{(q - p'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \right\} \\
&+ \dots , \tag{6.3.10}
\end{aligned}$$

其中最后一行的省略号代表通过置换玻色子 $1'$, $2'$ 和 2 获得的项。右边开头的符号是费米圈所附带的额外负号。注意, 在 δ -函数消除后, 这里仅有一个动量空间积分, 这正是一个一圈图所需要的。我们将在第11章看到如何处理这类动量空间积分。

为了使其更具体些, 考察一个理论, 其有质量为 M 的Dirac旋量场 $\psi(x)$ 与质量为 m 的标量场 $\phi(x)$, 这两个场通过相互作用 $-ig\phi\bar{\psi}\gamma_5\psi$ 进行相互作用。(插入的因子 $-i$ 是为了使得相互作用对于实耦合常数 g 厄密。)回忆, 对于标量, 多项式 $P(q)$ 正是1, 而对于旋量则是 $[-i\gamma_\mu q^\mu + M]\beta$ 。另外, 对于能量为 E 的标量场, u 是 $(2E)^{-1/2}$, 而对于旋量场, u 是5.5节所讨

论的约定好的归一化Dirac旋量。对于费米子-玻色子散射，费米子-费米子散射和玻色子-玻色子散射；方程(6.3.8)，(6.3.9)和(6.3.10)给出最低阶 S -矩阵元：

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1\mathbf{p}_2} &= -i(2\pi)^{-2}g^2(4E'_2E_2)^{-1/2}\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2) \\
 &\times \left[\left(\bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(p_1+p_2)^\mu + M}{(p_1+p_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1) \right) \right. \\
 &\left. + \left(\bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(p_1-p'_2)^\mu + M}{(p_1-p'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1) \right) \right], \\
 S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1\mathbf{p}_2\sigma_2} &= -i(2\pi)^{-2}g^2\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2) \\
 &\times \left(\bar{u}(\mathbf{p}'_2\sigma'_2)\gamma_5 u(\mathbf{p}_2\sigma_2) \right) \left(\bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1) \right) \\
 &\times \frac{1}{(p'_1-p_1)^2 + m^2 - i\epsilon} \\
 &\quad - [1' \rightleftharpoons 2'], \\
 S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} &= -(2\pi)^{-6}g^4(16E_1E_2E'_1E'_2)^{-1/2}\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2) \\
 &\times \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu q^\mu + M}{q^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q+p'_1)^\mu + M}{(q+p'_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \right. \\
 &\left. \times \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q+p'_1-p_1)^\mu + M}{(q+p'_1-p_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q-p'_2)^\mu + M}{(q-p'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \right\} + \dots,
 \end{aligned}$$

其中，最后一个公式中的省略号代表对粒子 $2, 1', 2'$ 置换的求和。费米传播子分子中的因子 β 已经用来将 u^\dagger 替换成 \bar{u} 。

* * *

另一有用的拓扑结果表述了线的一类守恒率。暂且，我们可以认为所有的内线和外线在顶点被创造，而在内线中部成对消失，或者当外线离开图时消失。（这与线所携带箭头的指向无关。）那么创造的线与消失的线相等给出

$$2I + E = \sum_i n_i V_i, \quad (6.3.11)$$

其中 I 是内线的数目， E 是外线的数目， V_i 是被标记为 i 类顶点的数目，而 n_i 是与该顶点连接线的数目。（这对于每一类场分别成立。）特别的，如果所有的相互作用包含的场的数目 $n_i = n$ 相同，那么这变成

$$2I + E = nV, \quad (6.3.12)$$

其中 V 是所有顶点的总数。在这种情况下，我们可以从方程(6.3.4)和(6.3.11)中消除 I ，并看到，对于一个连接图（即， $C = 1$ ），顶点的数目是

$$V = \frac{2L + E - 2}{n - 2}. \quad (6.3.13)$$

例如，对于一个三线积相互作用， $L = 0, 1, 2 \dots$ 的散射过程($E = 4$)的图有 $V = 2, 4, 6 \dots$ 个顶点。一般而言，以耦合常数为幂次的展开是圈数目逐渐增加的展开。

6.4 质量壳之外

在任意 S -矩阵元的Feynman图中, 所有的外线都是“质量壳上的”; 即, 质量为 m 的粒子, 其外线被约束使外线所附带的4-动量满足 $p_\mu p^\mu = -m^2$. 考察那些“不在质量壳上的”Feynman图通常也是重要的, 这样的图其外线能量就像内心那个内线所附带的能量一样是自由变量, 与任何3-动量无关. 首先, 它们作为更大Feynman图的部分而产生; 例如, 插入在一个图的内线上的圈可以认为是两个外线的Feynman图, 而这两个外线都在质量壳外.

当然, 一旦我们计算出了一个给定图在质量壳外的贡献, 通过回到质量壳上可以轻松计算出相联系的 S -矩阵元, 令沿着先流入图的4-动量 p^μ 对于初态中的粒子有 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, 对于末态中的粒子有 $p^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, 并对初态粒子或反粒子计入合适的外线因子 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell$ 或 $(2\pi)^{-3/2}v_\ell^*$, 对末态粒子或反粒子计入 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell^*$ 或 $(2\pi)^{-3/2}v_\ell$. 诚然, 当我们在第9章接触路径积分方法后, 我们将发现首先导出所有外线在质量壳外的图的Feynman规则是最简单的, 然后通过令外线所附带的动量逼近它们合适的质量壳获得 S -矩阵元.

将各种可能的外场效应考虑进来会推广Feynman规则, 而线在质量壳外的Feynman图只是这类推广的一种特殊情况. 假定我们向哈密顿量中加入包含外场 $\epsilon_a(x)$ 项的和, 使得 S -矩阵的Dyson级数(3.5.10)中使用的相互作用 $V(t)$ 被替换成

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_a \int d^3x \epsilon_a(\mathbf{x}, t) o_a(\mathbf{x}, t). \quad (6.4.1)$$

“流” $o_a(t)$ 有着通常的相互作用绘景的时间相关性

$$o_a(t) = \exp(iH_0 t) o_a(0) \exp(-iH_0 t), \quad (6.4.2)$$

但是除此之外是个相当任意的算符. 那么任意给定跃迁 $\alpha \rightarrow \beta$ 的 S -矩阵变成 c -数函数 $\epsilon_a(t)$ 的泛函 $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$. 计算这个泛函的Feynman规程由通常Feynman规程的一个显然的扩张给出. 除了从 $V(t)$ 获得的普通顶点, 我们必须引入额外的顶点: 如果 $o_a(x)$ 是 n_a 个场因子的乘积, 那么位置指标为 x 的任何 o_a 顶点相对应的 n_a 个外线与其相连, 并对位置空间Feynman规则做出的贡献等于 $-i\epsilon_a(x)$ 乘以任何出现在 $o_a(x)$ 中的数值因子. 那么由此得出, $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ 对 $\epsilon_a(x), \epsilon_b(y) \dots$ 的 r 阶变分导数在 $\epsilon = 0$ 处由有 r 个额外顶点却无外线的位置空间图给出, 这些顶点分别与 $n_a, n_b \dots$ 条内线相连. 这些顶点携带我们不对其积分的位置指标 $x, y \dots$; 每个这样的顶点做出的贡献等于 $-i$ 乘以出现在与其相联系的流 o_a 中的任何数值因子.

特别地, 在这些流全部是单个场因子的情况下, 即,

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_\ell \int d^3x \epsilon_\ell(\mathbf{x}, t) \psi_\ell(\mathbf{x}, t),$$

$S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ 对 $\epsilon_\ell(x), \epsilon_m(y) \dots$ 的 r 阶变分导数在 $\epsilon = 0$ 处由有 r 个额外顶点的位置空间图给出, 这些顶点有时空指标 $x, y \dots$, 每个与 $\ell, m \dots$ 类的单个粒子线相连, 所不同的是, 它们对 S -矩阵元的贡献不是类似 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell(\mathbf{p}, \sigma)e^{ip \cdot x}$ 或 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell^*(\mathbf{p}, \sigma)e^{-ip \cdot x}$ 的系数函数而是一个传播子, 以及一个来自线末端顶点的因子 $-i$. 通过如下的步骤我们可以获得一个动量空间Feynman图, 这个图中态 α 和 β 中的粒子处在质量壳上, 且有 $\ell, m \dots$ 类的 r 条外线, 这些外线携带动量 $p, p' \dots$, 从变分导数出发

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_\ell(x) \delta\epsilon_m(y) \dots} \right]_{\epsilon=0},$$

然后除去不在质量壳的外线上的传播子, 再做一合适的Fourier变换并乘以合适的系数函数 u_ℓ, u_ℓ^* 等以及因子 $(-i)^r$.

由于数个原因, 所有微扰论图对任何质量外的振幅的所用贡献之和, 与Heisenberg绘景中, 相对算符的编时乘积在全哈密顿量的本征态之间的一个矩阵元存在一个关系, 认出这个关系是非常有用的. 这一关系由一定理提供,³ 其陈述了, 到微扰论的所有阶*有

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_a(x)\delta\epsilon_b(y)\cdots} \right]_{\epsilon=0} = \left(\Psi_\beta^-, T \left\{ -iO_\alpha(x), -iO_b(y)\cdots \right\} \Psi_\alpha^+ \right), \quad (6.4.3)$$

其中 $O_a(x)$ 等, 是 $o_a(x)$ 在Heisenberg绘景中的对应部分

$$O_a(\mathbf{x}, t) = \exp(iHt)o_a(\mathbf{x}, 0)\exp(-iHt) = \Omega(t)o_a(\mathbf{x}, t)\Omega^{-1}(t), \quad (6.4.4)$$

$$\Omega(t) \equiv e^{iHt} e^{-iH_0t}, \quad (6.4.5)$$

而 Ψ_α^+ 和 Ψ_β^- 分别是全哈密顿量 H 的“入”本征态和“出”本征态.

这是证明. 从方程(3.5.10)中, 我们立即看到方程(6.4.3)的左边是

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^{N+r}}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \cdots d\tau_N \\ &\times \left(\Phi_\beta, T \left\{ V(\tau_1)\cdots V(\tau_N)o_{a_1}(x_1)\cdots o_{a_r}(x_r) \right\} \Phi_\alpha \right). \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

明确起见, 假定 $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \cdots \geq x_r^0$. 那么我们可以将所有大于 x_1^0 的 τ 记为 $\tau_{01}\cdots\tau_{0N_0}$; 将处在 x_1^0 与 x_2^0 之间的所有 τ 记为 $\tau_{11}\cdots\tau_{1N_1}$, 依次做下去; 最后将所有小于 x_r^0 的 τ 记为 $\tau_{r1}\cdots\tau_{rN_r}$. 那么方程(6.4.6)变成:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^{N+r}}{N!} \sum_{N_0 N_1 \cdots N_r} \frac{N! \delta_{N, N_0 + N_1 + \cdots + N_r}}{N_0! N_1! \cdots N_r!} \\ &\times \int_{x_1^0}^{\infty} d\tau_{01}\cdots d\tau_{0N_0} \int_{x_2^0}^{x_1^0} d\tau_{11}\cdots d\tau_{1N_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_r^0} d\tau_{r1}\cdots d\tau_{rN_r} \\ &\times \left(\Phi_\beta, T \left\{ V(\tau_{01})\cdots V(\tau_{0N_0}) \right\} o_{a_1}(x_1) T \left\{ V(\tau_{11})\cdots V(\tau_{1N_1}) \right\} o_{a_2}(x_2) \cdots \right. \\ &\times \left. \cdots o_{a_r}(x_r) T \left\{ V(\tau_{r1})\cdots V(\tau_{rN_r}) \right\} \Phi_\alpha \right). \end{aligned}$$

因子 $N!/N_0!N_1!\cdots N_r!$ 是将 N 个 τ 分到 $r+1$ 个子集而每个子集分别包含 N_0, N_1, \cdots, N_r 个 τ 的方法数. 取代对服从于条件 $N_0 + N_1 + \cdots + N_r = N$ 的 N_0, N_1, \cdots, N_r 求和, 再对 N 求和, 我们可以独立地对 N_0, N_1, \cdots, N_r 求和, 令出现在 $(-i)^N$ 中的 N 等于 $N_0 + N_1 + \cdots + N_r$. 这给出

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} &= (-i)^r \left(\Phi_\beta, U(\infty, x_1^0)o_{a_1}(x_1) \right. \\ &\times U(x_1^0, x_2^0)o_{a_2}(x_2)U(x_2^0, x_3^0)\cdots o_{a_r}(x_r)U(x_r^0, -\infty)\Phi_\alpha \left. \right), \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

*对于单个 O 算符, 这是Schwinger作用量原理版本.⁴

其中

$$U(t', t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int_t^{t'} d\tau_1 \cdots d\tau_N T \{ V(\tau_1) \cdots V(\tau_N) \}. \quad (6.4.8)$$

算符 $U(t', t)$ 满足微分方程

$$\frac{d}{dt} U(t', t) = -iV(t)U(t', t) \quad (6.4.9)$$

其有显然的初始条件

$$U(t, t) = 1. \quad (6.4.10)$$

它有解

$$U(t', t) = \exp(iH_0 t') \exp(-iH(t' - t)) \exp(-iH_0 t) = \Omega^{-1}(t') \Omega(t) \quad (6.4.11)$$

其中 Ω 由方程(6.4.5)给定. 将方程(6.4.11)代入方程(6.4.7)并利用方程(6.4.4), 我们有

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \cdots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} \\ &= (-i)^r \left(\Omega(\infty) \Phi_\beta, O_{a_1}(x_1) \cdots O_{a_r}(x_r) \Omega(-\infty) \Phi_\alpha \right). \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

在这个结果的推导中, 我们假定了 $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \cdots \geq x_r^0$, 所以我们可以也将右边算符的乘积换成编时乘积:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \cdots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} \\ &= (-i)^r \left(\Omega(\infty) \Phi_\beta, T \{ O_{a_1}(x_1) \cdots O_{a_r}(x_r) \} \Omega(-\infty) \Phi_\alpha \right). \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

但是, 现在两边的 a 和 x 是全对称的(对于费米子则是全反对称的), 所以这个关系对于时间 $x_1^0 \cdots x_r^0$ 的任意序列都成立. 另外, 我们在3.1节看到(就方程(3.1.12)的意义而言)

$$\Psi_\beta^\pm = \Omega(\mp\infty) \Phi_\beta. \quad (6.4.14)$$

因此方程(6.4.13)正是期望的结果(6.4.3).

参考文献

- [1] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949).
- [2] 这一结果的正式陈述为Wick定理; 参看G. C. Wick, *Phys. Rev.* **80**, 268 (1950).
- [3] 我不知道谁首先证明了这个定理. 在20世纪50年代早期就有数个理论学者知道它, 包括M. Gell-Mann和F. E. Low.
- [4] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 914, (1951).

第 7 章 正则形式体系

自20世纪20年后期,量子场论在Born, Dirac, Fermi, Herisenberg, Jordan和Pauli论文的诞生之日起,它历史上的发展就与正则形式体系连接在一起,这个连接是如此的紧密,使得现今这个课题的任何处理似乎理所应当地从假设拉格朗日量并将正则量子化规则应用于其中出发.大多数量子场论的书采用这种方法.历史先例还不是使用这个形式体系的非常令人信服的理由.如果我们所发现的量子场论能导出物理上令人满意的 S -矩阵,而这个量子场论无法通过拉格朗日量的正则量子化导出,这是否将妨碍我们?

在某种程度上,这个问题是无意义的,这是因为,正如我们将在7.1节中看到的,所有最熟悉的量子场论构成了正则系统,并且它们可以轻松地放入拉格朗日形式.然而,没有证据表明任何可信的量子场论都可以以这种方式公式化.并且,哪怕能够这样,其本身无法解释在构建各种量子场论时,为什么我们应该优先使用拉格朗日形式体系作为出发点.

拉格朗日形式体系的关键点是,它使得满足Lorentz不变性以及其它对称性变得很容易:当正则量子化一个拉格朗日量密度为Lorentz-不变的经典理论时,将会导出一个Lorentz-不变的量子理论.即,我们在这里将看到,这样的理论允许构建出合适的量子力学算符,这些算符满足Poincaré代数的对易关系,并因此导出了一个Lorentz-不变的 S -矩阵.

这不是非常平庸的.我们在上一章中看到,在有导数耦合的理论或自旋 $j \geq 1$ 的理论中,将相互作用哈密顿量取为一个标量相互作用密度的空间积分是不够的;为了弥补传播子中的非协变项,我们还要向相互作用密度中添加非标量项.一个拉格朗日量密度为标量的正则形式体系将自动提供这些额外项.之后,当我们在卷II中到达非阿贝尔规范理论时,这些额外的便利成了必需;在这种理论中,尝试猜出哈密顿量的形式而不从Lorentz-不变且规范不变的拉格朗日量密度出发是无望的.

7.1 正则变量

我们将在本节证明,迄今为止我们所构建的各种量子场论满足对易关系以及正则形式体系的哈密顿版运动方程.计算 S -矩阵所需要的正是哈密顿形式体系(无论是通过算符方法还是路径积分方法),但是选择一个能够得出Lorentz-不变 S -矩阵的哈密顿量不总是轻松的.为了本章的平衡,我们将采取正则形式体系的拉格朗日版作为我们的出发点,并使用它导出物理的令人满意的哈密顿量.本节的目的是找到不同场论中正则场以及它们的共轭,这将告诉我们如何分离出拉格朗日量中的自由场部分,并附带地消除我们对正则形式是否确实适用于物理实在理论的疑虑.

我们首先证明第5章中构建的自由场将自动提供量子算符 $q^n(\mathbf{x}, t)$ 和正则共轭算符 $p_n(\mathbf{y}, t)$ 体系,它们满足熟悉的正则对易或反对易关系:

$$[q^n(\mathbf{x}, t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\bar{n}}^n, \quad (7.1.1)$$

$$[q^n(\mathbf{x}, t), q^{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0, \quad (7.1.2)$$

$$[p_n(\mathbf{x}, t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0, \quad (7.1.3)$$

其中下标 \mp 表示: 如果被两个算符创造和湮灭的粒子有一个是玻色子, 则是对易子; 如果都是费米子, 则是反对易子. 例如, 对于零自旋的自-荷共轭粒子, 5.2节中构造的实标量场 $\phi(\mathbf{x})$ 满足对易关系

$$[\phi(x), \phi(y)]_- = \Delta(x - y),$$

其中 Δ 是函数

$$\Delta(x) \equiv \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} [e^{ik \cdot x} - e^{-ik \cdot x}],$$

并有 $k^0 \equiv \sqrt{k^2 + m^2}$. 我们注意到

$$\Delta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{\Delta}(\mathbf{x}, 0) = -i\delta^3(\mathbf{x}).$$

(点代表对时间 x^0 的导数.) 那么容易看到场与它的时间导数 $\dot{\phi}$ 服从等时对易关系:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)]_- = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.1.4)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]_- = 0, \quad (7.1.5)$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)]_- = 0. \quad (7.1.6)$$

因而我们可以定义正则变量

$$q(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) \quad (7.1.7)$$

其满足正则对易关系(7.1.1)—(7.1.3).

对于自旋零粒子的复标量场, 其反粒子不同于本身, 对易关系是

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_- = \Delta(x - y), \quad [\phi(x), \phi(y)]_- = 0.$$

我们可以将自由粒子正则变量定义为复算符

$$q(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.8)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}, t). \quad (7.1.9)$$

等价地, 将 ϕ 写为 $\phi \equiv (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$, 其中对于 $k = 1, 2$, ϕ_k 厄密, 我们有正则变量

$$q^k(\mathbf{x}, t) = \phi_k(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.10)$$

$$p_k(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}_k(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.11)$$

并且这些变量满足对易关系(7.1.1)—(7.1.3).

对于自旋1粒子的实矢量场, 对易关系在5.3节给定为

$$[v^\mu(x), v^\nu(y)]_- = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta(x - y).$$

(对于矢量场我们使用 v^μ 而不是 V^μ , 这是因为我们想保留大写字母以用在Heisenberg绘景的场中.) 这时自由粒子正则变量可以取为

$$q^i(\mathbf{x}, t) = v^i(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.12)$$

$$p_i(\mathbf{x}, t) = \dot{v}^i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v^0(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i}, \quad (7.1.13)$$

其中 $i = 1, 2, 3$. 读者可以验证(7.1.12)与(7.1.13)满足对易关系(7.1.1)–(7.1.3). 场方程(5.3.36)与(5.3.38)和方程(7.1.13)允许我们将 v^0 表示成其它变量的形式

$$v^0 = m^{-2} \nabla \cdot \mathbf{p}, \quad (7.1.14)$$

所以 v^0 不能认为是一个 q . 这些结果到复矢量场的扩张与处理复标量场时是相同的.

对于非-Majorana自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的Dirac场, 5.5节表明了反对易子是

$$[\psi_n(x), \psi_{\bar{n}}^\dagger(y)]_+ = [(-\gamma^\mu \partial_\mu + m)\beta]_{n, \bar{n}} \Delta(x - y)$$

以及

$$[\psi_n(x), \psi_{\bar{n}}(y)]_+ = 0.$$

这时将 ψ_n 和 $\psi_{\bar{n}}^\dagger$ 取为独立的正则变量是不相容的, 这是因为它们的反对易子在等时下不为零. 通常转而定义

$$q^n(x) \equiv \psi_n(x), \quad (7.1.15)$$

$$p_n(x) \equiv i\psi_{\bar{n}}^\dagger(x). \quad (7.1.16)$$

那么将容易看到(7.1.15)和(7.1.16)满足正则反对易关系(7.1.1)–(7.1.3).

对于任何算符系统, 如果其满足类似(7.1.1)–(7.1.3)的对易关系或反对易关系, 那么我们可以定义量子力学泛函导数: 对于 $q^n(\mathbf{x}, t)$ 和 $p_n(\mathbf{x}, t)$ 在固定时刻 t 的玻色型泛函 $F[q(t), p(t)]$, 我们可以定义*

$$\frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)} \equiv i [p_n(\mathbf{x}, t), F[q(t), p(t)]] , \quad (7.1.17)$$

$$\frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x}, t)} \equiv i [F[q(t), p(t)], q^n(\mathbf{x}, t)] . \quad (7.1.18)$$

这样定义的动机是源于如下的事实, 如果 $F[q(t), p(t)]$ 写成所有 q 处在所有 p 的左边的形式, 那么(7.1.17)和(7.1.18)恰好分别是对 q^n 的左导数和对 p_n 的右导数. 即, 对于 q 和 p 的任意 c -数**变分 δq 和 δp , 我们有

$$\delta F[q(t), p(t)] = \int d^3x \sum_n \left(\delta q^n(\mathbf{x}, t) \frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)} + \frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta p^n(\mathbf{x}, t)} \delta p^n(\mathbf{x}, t) \right) .$$

*我们在这里使用了一个记法并在此之后一直使用; 如果 $f(x, y)$ 是两类变量的函数, 其中每类变量共同称为 x 和 y , 那么 $F[f(y)]$ 代表依赖于函数 $f(x, y)$ 在固定的 y 而对于所有 x 的值的泛函. 玻色型泛函是指每一项中只包含偶数个费米场.

**其中 q^n 和 p_n 是玻色或费米的, δq^n 和 δp_n 被理解成与所有的费米算符分别对易和反对易, 而与所有的玻色算符均是对易的.

对于更普遍的泛函, 我们需要定义(7.1.17)和(7.1.18)以确定可能出现的各种符号与等时对易子.

特别地, H_0 是时间演化在自由粒子态上的生成元, 也就是说:

$$q^n(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0 t) q^n(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (7.1.19)$$

$$p_n(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0 t) p_n(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (7.1.20)$$

所以自由粒子算符有时间相关性

$$\dot{q}^n(\mathbf{x}, t) = i[H_0, q^n(\mathbf{x}, t)] = \frac{\delta H_0}{\delta p_n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.1.21)$$

$$\dot{p}_n(\mathbf{x}, t) = -i[p_n(\mathbf{x}, t), H_0] = -\frac{\delta H_0}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.1.22)$$

我们认出这些正是哈密顿形式体系中熟悉的动力学方程.

自由粒子哈密顿量总是给定为

$$H_0 = \sum_{n, \sigma} \int d^3 k a^\dagger(\mathbf{k}, \sigma, n) a(\mathbf{k}, \sigma, n) \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_n^2}. \quad (7.1.23)$$

H_0 可以重写成处在时刻 t 的 q 和 p 的形式. 例如, 容易看到对于一个实标量场, 方程(7.1.23)与泛函相差一个常数项

$$H_0 = \int d^3 x \left[\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (\nabla q)^2 + \frac{1}{2} m^2 q^2 \right]. \quad (7.1.24)$$

更精确些, 利用(7.1.7)以及标量场 ϕ 的Fourier表示, 我们发现方程(7.1.24)变成:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} \int d^3 k k^0 [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})]_+ \\ &= \int d^3 k k^0 \left(a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}) \right). \end{aligned} \quad (7.1.25)$$

除了无限大的常数项, 这与方程(7.1.23)是相同的. 这种常数项只影响零点能, 并且在没有引力的情况下是没有物理意义的.[†] H_0 作为其它场的 q 变量和 p 变量的显式泛函将在7.5节给出.

在量子场论教科书中, 通常是将方程(7.1.25)作为方程(7.1.24)的结果导出的, 其反过来是从拉格朗日量密度导出的. 在我看来, 由于方程(7.1.25)必须成立, 这是一种后退; 如果某些假定的自由粒子拉格朗日量不能给出方程(7.1.25)或者方程(7.1.25)加一个常数项, 我们将得出它是错误的拉格朗日量这样的结论. 相反, 我们应该问什么样的自由场拉格朗日量给出无自旋粒子的方程(7.1.25), 或者更普遍地, 给出自由粒子哈密顿量(7.1.23). 这个问题可以通过从哈密顿量到拉格朗日量的Legendre变换回答; 自由场拉格朗日量给定为

$$L_0[q(t), \dot{q}(t)] = \sum_n \int d^3 x p_n(\mathbf{x}, t) \dot{q}^n(\mathbf{x}, t) - H_0, \quad (7.1.26)$$

[†]然而, 由该场边界条件导致的这种项的改变, 例如不是无限大空间而是处在平行板间有限大空间中的量子化, 是有物理意义且测量过的.¹

它被理解为, 所有的 p_n 被替换成它的 q^n 和 \dot{q}^n (以及, 正如我们将看到的, 某些可能的辅助场)表达式. 例如, 从哈密顿量(7.1.24)和(7.1.7)我们可以导出标量场的自由场拉格朗日量:

$$\begin{aligned} L_0 &= \int d^3x \left[p\dot{q} - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}(\nabla q)^2 - \frac{1}{2}m^2q^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

无论我们认为标量场的完整拉格朗日量会是什么, 这个项都必须分离出来并作为微扰论的零阶项处理. 对于本节所描述的其它正则系统, 可以进行一个类似的练习, 但从现在起, 我们将满足于猜出自由场拉格朗日量的形式, 并证明它将给出正确的自由粒子哈密顿量.

我们已经看到各种自由场理论可以被公式化成正则项. 那么证明对于相互作用场同样如此是简单的一步. 我们可以在所谓的“Heisenberg绘景中”引入正则变量, 定义为

$$Q^n(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iHt)q^n(\mathbf{x}, 0)\exp(-iHt), \quad (7.1.28)$$

$$P_n(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iHt)p_n(\mathbf{x}, 0)\exp(-iHt), \quad (7.1.29)$$

其中 H 是全哈密顿量. 由于这是与 H 对易的相似变换, 全哈密顿量作为Heisenberg绘景算符的函数与作为 q 和 p 的函数是相同的:

$$H[Q, P] = e^{iHt}H[q, p]e^{-iHt} = H[q, p].$$

另外, 由于方程(7.1.28)—(7.1.29)定义了一个相似变换, Heisenberg绘景算符又一次满足对易关系或反对易关系:

$$[Q^n(\mathbf{x}, t), P_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\bar{n}}^n, \quad (7.1.30)$$

$$[Q^n(\mathbf{x}, t), Q^{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0, \quad (7.1.31)$$

$$[P_n(\mathbf{x}, t), P_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0. \quad (7.1.32)$$

然而, 它们现在有时间相关性

$$\dot{Q}^n(\mathbf{x}, t) = i[H, Q^n(\mathbf{x}, t)] = \frac{\delta H}{\delta P^n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.1.33)$$

$$\dot{P}_n(\mathbf{x}, t) = -i[P_n(\mathbf{x}, t), H] = -\frac{\delta H}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.1.34)$$

例如, 我们可以将实标量场的哈密顿量取为自由粒子项(7.1.24)加上对标量相互作用密度 \mathcal{H} 的积分, 使得在Heisenberg绘景变量的形式下,

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}(\nabla Q)^2 + \frac{1}{2}m^2Q^2 + \mathcal{H}(Q) \right]. \quad (7.1.35)$$

在这个情况下, 正则共轭于 Q 的变量通过与自由场相同的公式给出:

$$P = \dot{Q} \quad (7.1.36)$$

然而, 正如我们将看到的, 正则共轭变量 $P_n(x)$ 与场变量以及它们时间导数之间的关系, 一般而言, 与自由粒子算符不是相同的, 但必须从方程(7.1.33)和(7.1.34)推出.

7.2 拉格朗日形式体系

在看到各种实在理论可以被放进正则形式体系之后, 我们现在必须面对如何选择哈密顿量这个问题. 正如我们将在下一节中看到的, 确保Lorentz不变性以及其它对称性的最简单方法是选择合适的拉格朗日量并用它导出哈密顿量. 其中不失一般性的; 给定一个实在的哈密顿量, 通过逆转我们这里将要描述的从拉格朗日量导出哈密顿量的过程, 我们一般能重构拉格朗日量, 从中可以导出它. (方程(7.1.26)的推导给出了这种重构的一个例子.) 但是尽管我们能从哈密顿量导出拉格朗日量或从拉格朗日量导出哈密顿量, 通过列举所有可能的拉格朗日量, 而非哈密顿量, 可以更容易地探索物理上令人满意的理论.

一般而言, 拉格朗日量是一组一般场 $\Psi^\ell(\mathbf{x}, t)$ 和它们时间导数 $\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t)$ 的泛函 $L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]$. 共轭场 $\Pi_\ell(\mathbf{x}, t)$ 定义为变分导数**

$$\Pi_\ell(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.2.1)$$

运动方程是

$$\dot{\Pi}_\ell(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.2)$$

这些场方程可以有效地被在公式化为变分原理. 我们定义 $\Psi^\ell(x)$ 在全时空上的泛函, 称为作用量

$$I[\Psi] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]. \quad (7.2.3)$$

在 $\Psi(x)$ 的任意变分下, $I[\Psi]$ 的变化是

$$\delta I[\Psi] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \left[\frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell(x)} \delta \Psi^\ell(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^\ell(x)} \delta \dot{\Psi}^\ell(x) \right].$$

假定 $\delta \Psi^\ell(x)$ 在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时为零, 我们可以分部积分, 并得到

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left[\frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell(x)} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^\ell(x)} \right] \delta \Psi^\ell(x). \quad (7.2.4)$$

我们看到, 当且仅当场满足场方程(7.2.2)时, 作用量相对于在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时为零的所有变分 $\delta \Psi^\ell$ 是稳定的.

因为场方程由泛函 $I[\Psi]$ 决定, 尝试构建Lorentz-不变理论使得 $I[\Psi]$ 是个标量泛函是自然的. 特别地, 既然 $I[\Psi]$ 是 $L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]$ 的时间积分, 我们猜测 L 本身应该是 $\Psi(x)$ 和 $\partial\Psi(x)/\partial x^\mu$ 的普通标量函数的空间积分, 这个函数被称为拉格朗日量密度 \mathcal{L} :

$$L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)] = \int d^3x \mathcal{L}(\Psi(\mathbf{x}, t), \nabla\Psi(\mathbf{x}, t), \dot{\Psi}(\mathbf{x}, t)), \quad (7.2.5)$$

*回忆在我们所使用的泛函记号中, 类似 L 这种写成变量 t 的泛函被理解成依赖于场 $\Psi^\ell(\mathbf{x}, t)$ 和 $\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t)$, 其中没有显示出的变量 ℓ 和 \mathbf{x} 在固定的显式变量 t 处取遍它们的所有值. 我们使用大写字母 Ψ 和 Π 是想表明它们是相互作用场而不是自由场

**由于 Ψ 和 $\dot{\Psi}$ 一般不满足简单的对易或反对易关系, 我们无法像上一节中对 Q 和 P 的泛函导数所做的那样, 给出这里出现的泛函导数的简单定义. 转而, 我们将简单地指定变分导数为它们是 c -数变量时的变分导数, 而负号与等时对易子或反对易子在需要使公式是正确的量子力学型时补充进来. 就我所知, 没有重要的问题与这里的细节相关.

使得作用量是

$$I[\Psi] = \int d^4x \mathcal{L}(\Psi(x), \partial\Psi(x)/\partial x^\mu). \quad (7.2.6)$$

当前基本粒子理论中使用的所有场理论都有这种形式的拉格朗日量.

使 $\Psi^\ell(x)$ 改变量 $\delta\Psi^\ell(x)$, 并分部积分, 我们得到 L 的变分:

$$\begin{aligned} \delta L &= \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\ell} \delta \Psi^\ell + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \Psi^\ell)} \nabla \delta \Psi^\ell + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell} \delta \dot{\Psi}^\ell \right] \\ &= \int d^3x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\ell} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \Psi^\ell)} \right) \delta \Psi^\ell + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell} \delta \dot{\Psi}^\ell \right], \end{aligned}$$

所以(没有写出其中显然的参量)

$$\frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\ell} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \Psi^\ell)}, \quad (7.2.7)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^\ell} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell}. \quad (7.2.8)$$

那么场方程(7.2.2)变成

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Psi^\ell / \partial x^\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\ell}. \quad (7.2.9)$$

这些被称为*Euler-Lagrange*方程. 正如所期待的, 如果 \mathcal{L} 是标量, 那么这些方程是Lorentz-不变的.

除了是Lorentz-不变之外, 作用量 I 被要求是实的. 这是因为我们希望场方程正好和场一样多. 通过将任意复场分成它们的实部和虚部, 我们总可以认为 I 是数个实场的泛函, 称场的个数为 N . 如果 I 是复的, 有着独立的实部和虚部, 那么 I 的实部和虚部是稳定的(*Euler-Lagrange*方程)这个条件对于 N 个场会产生 $2N$ 个场方程, 除了在特殊情况下, 方程太多以至于无法满足. 我们将在下一节看到, 作用量的实性质也确保了各种对称变换的生成元是厄密算符.

尽管拉格朗日形式体系使得构建满足Lorentz不变性与其它对称性的理论变得简单起来, 为了计算 S -矩阵, 我们需要一个相互作用哈密顿量的公式. 一般而言, 哈密顿量由*Legendre*变换给定

$$H = \sum_\ell \int d^3x \Pi_\ell(\mathbf{x}, t) \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t) - L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]. \quad (7.2.10)$$

尽管方程(7.2.1)一般不允许 $\dot{\Psi}^\ell$ 唯一地表示成 Ψ^ℓ 和 Π_ℓ 的形式, 但很容易看到, 对于任何满足方程(7.2.1)的 $\dot{\Psi}^\ell$, 方程(7.2.10)对 $\dot{\Psi}^\ell$ 的变分导数为零, 所以它一般仅是 Ψ^ℓ 和 Π_ℓ 的泛函. 它相对于这些变量的泛函导数是

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta H}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_\Pi &= \int d^3y \sum_{\ell'} \Pi_{\ell'}(\mathbf{y}, t) \left. \frac{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_\Pi - \left. \frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_{\dot{\Psi}} \\ &\quad - \int d^3y \sum_{\ell'} \left. \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y}, t)} \right|_{\Psi} \left. \frac{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_\Pi, \\ \left. \frac{\delta H}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_\Psi &= \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t) + \int d^3y \sum_{\ell'} \Pi_{\ell'}(\mathbf{y}, t) \left. \frac{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_\Psi \\ &\quad - \int d^3y \sum_{\ell'} \left. \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y}, t)} \right|_\Psi \left. \frac{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_\Psi, \end{aligned}$$

其中下标代表在这些变分导数中保持不变的量. 利用 Π_ℓ 的定义方程(7.2.1), 这简化为

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Pi} = - \left. \frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_{\dot{\Psi}}, \quad (7.2.11)$$

和

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Psi} = \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t). \quad (7.2.12)$$

那么运动方程(7.2.2)等价于

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Pi} = -\dot{\Pi}_\ell(\mathbf{x}, t) \quad (7.2.13)$$

现在将一般场变量 Ψ^ℓ 及其共轭 Π_ℓ 与上一节的正则变量 Q^n 和 P_n 等同起来, 并赋予它们相同的正则对易关系(7.1.30)–(7.1.32), 使得方程(7.2.12)与(7.2.13)与哈密顿运动方程(7.1.33)和(7.1.34)一致是一件很有吸引力的事. 以无导数耦合的实标量场 Φ 为例, 这确实是这种情况. 考察拉格朗日量密度[†]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - \mathcal{H}(\Phi), \quad (7.2.14)$$

其可以通过向上一节中所发现的自由场拉格朗日量密度上附加一个 Φ 的实函数 $-\mathcal{H}(\Phi)$ 获得. 这里的Euler-Lagrange方程是

$$(\square - m^2)\Phi = \mathcal{H}'(\Phi). \quad (7.2.15)$$

从这个拉格朗日量密度中, 我们计算 Φ 的正则共轭:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi}, \quad (7.2.16)$$

如果我们将 Φ 和 Π 与正则变量 Q 和 P 等同起来, 这与方程(7.1.36)是一致的. 哈密顿量现在由方程(7.2.10)给定为[‡]

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathcal{H}(\Phi) \right], \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

我们将其视为哈密顿量(7.1.35). 这个小练习不应该视为该哈密顿量的另一推导, 而是拉格朗日量(7.2.14)作为一个可能标量场理论的确认.

事情不总是那么简单. 在上一节我们就看到, 存在这样的场变量, 例如矢量场的时间分量或Dirac场的厄密共轭, 它们不是正则场变量 Q^n 也没有正则共轭对; 但Lorentz不变性仍要求态对于矢量场和Dirac场, 它们必须出现在拉格朗日量中.

从拉格朗日形式体系的观点来看, 类似矢量场的时间分量或Dirac场的厄密共轭这样的场变量, 它们的特殊性质源于这样的事实, 尽管它们出现在拉格朗日量中, 但是它们的时间导数没

[†]我们没有在项 $-\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$ 中计入任意的常数因子, 这是因为, 对于任何这种常数, 如果是正的, 则能被吸收进 Φ 的归一化中. 正如我们将看到的, 这里的负常数将会导致一个没有下界的哈密顿量. 常数 m 被称为裸质量. 满足可重整原理的最普遍拉格朗日量(在第12章讨论)就是这种形式, 其中 $\mathcal{H}(\Phi)$ 是 Φ 的四次多项式.

[‡]为了将 H 解释成能量, 它应该是有下界的. 前两项的正定表明了我们关于方程(7.2.14)中第一项的符号猜测是正确的. 剩余条件是 $\frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathcal{H}(\Phi)$ 作为 Φ 的函数必须是有下界的.

有. 我们将把时间导数没有出现在拉格朗日量中的场变量 Ψ^ℓ 记为 C^r ; 剩余的独立场变量是正则变量 Q^n . Q^n 有正则共轭

$$P_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)]}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.2.18)$$

并满足对易关系(7.1.30)—(7.1.32), 但 C^r 没有正则共轭. 由于 $\delta L/\delta \dot{C}^r = 0$, 哈密顿量(7.2.10)一般是

$$H = \sum_n \int d^3x P_n \dot{Q}^n - L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)], \quad (7.2.19)$$

但在我们将 C^r 与 \dot{Q}^ℓ 表示成 Q 和 P 的形式前, 这还不是有用的. C^r 的运动方程仅包含场与它们的一阶时间导数

$$0 = \frac{\delta L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)]}{\delta C^r(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.20)$$

在本章所要讨论的简单情况下, 这些方程加上方程(7.2.18)可以被解出, 进而以 Q 和 P 的形式给出 C^r 与 \dot{Q}^ℓ . 7.6节将展示在这种情况下如何避免真的要解出 C^r 与 \dot{Q}^ℓ . 在类似电动力学的规范理论中, 必须要使用其它方法: 要么选择一个特定规范, 就像第8章中做的那样, 要么使用卷II中所讨论的更加现代的协变方法.

一旦我们导出了作为Heisenberg绘景 Q 和 P 的泛函的哈密顿量, 为了使用微扰论, 我们必须过渡到相互作用绘景. 哈密顿量是时间独立的, 所以它可以写成 $t = 0$ 处的 P_n 和 Q^n 的形式, 其等于相互作用绘景中 $t = 0$ 处相对应的算符 p_n 和 q^n . 那么以这种方式导出的哈密顿量可以以相互作用绘景中的 q 和 p 表述, 并分成两个部分, 一个合适的自由粒子项 H_0 与相互作用 V . 最后, 使用时间相关方程(7.1.21)和(7.1.22)与对易和反对易关系(7.1.1)—(7.1.3)将 $V(t)$ 中的 q 和 p 表示成湮灭算符和产生算符的线性组合.

我们将在7.5节展示该方案的几个例子; 目前, 我们将只给出最简单类型的一个例子, 哈密顿量为(7.2.17)的标量场. 我们将 H 分成自由粒子项与相互作用

$$H = H_0 + V \quad (7.2.21)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right] \quad (7.2.22)$$

$$V = \int d^3x \mathcal{H}(\Phi). \quad (7.2.23)$$

这里 Φ 和 Π 取在同一时刻 t , 并且 H 独立于 t , 而 H_0 与 V 通常不是这样.

我们现在过渡到相互作用表示, 在方程(7.2.22)和(7.2.23)中取 $t = 0$, 我们可以将 Φ 和 Π 简单地替换成相互作用绘景变量 ϕ 和 π , 这是因为方程(7.1.28)和(7.1.29)定义它们在那个时刻相等. 为了在相互作用绘景中计算相互作用 $V(t)$, 我们应用相似变换(3.5.5)

$$\begin{aligned} V(t) &= \exp(iH_0 t) V \exp(-iH_0 t) \\ &= \int d^3x \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)). \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

作用在 H_0 上的同一变换使其不变:

$$\begin{aligned} H_0 &= \exp(iH_0 t) H_0 \exp(-iH_0 t) \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathbf{x}, t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

π 和 $\dot{\phi}$ 之间的关系由方程(7.1.21)给出

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta H_0}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} = \pi(\mathbf{x}, t) . \quad (7.2.26)$$

(这恰好与方程(7.2.16)中的关系是相同的, 但是正如我们将看到的, 一般而言是不能期望有这个关系.) 另外, ϕ 的运动方程由方程(7.1.22)给出

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\delta H_0}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} = +\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) - m^2 \phi(\mathbf{x}, t) , \quad (7.2.27)$$

与方程(7.2.26)一起给出场方程

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0 . \quad (7.2.28)$$

普遍的实解可以表示成

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p (2p^0)^{-1/2} \left[e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}) + e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}) \right] \quad (7.2.29)$$

其中 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $a(\mathbf{p})$ 是 \mathbf{p} 的某个类型未知的算符函数. 那么方程(7.2.26)给出了正则共轭

$$\pi(x) = -i(2\pi)^{-3/2} \int d^3 p (p^0/2)^{1/2} \left[e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}) - e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}) \right] . \quad (7.2.30)$$

为了得到想要的对易关系,

$$\left[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \right]_- = i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (7.2.31)$$

$$\left[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t) \right]_- = 0 , \quad (7.2.32)$$

$$\left[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \right]_- = 0 , \quad (7.2.33)$$

我们必须令 a 满足熟悉的对易关系

$$\left[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}') \right] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \quad (7.2.34)$$

$$\left[a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}') \right] = 0 . \quad (7.2.35)$$

另外, 在上一节我们已经证明了在方程(7.2.25)中使用这些公式将会给出自由粒子哈密顿量的通常公式(4.2.11), 再加上一个不重要的额外常数. 正如之前所评述的, 这些结果甚至不应该视为方程(7.2.29), (7.2.34)和(7.2.35)的另一种推导(其在第五章以完全不同的理由获得)而应该视为方程(7.2.14)的前两项作为实标量场正确的自由粒子拉格朗日量的验证. 我们现在可以继续用微扰论计算 S -矩阵, 取 $V(t)$ 为(7.2.24), 其中场 $\phi(x)$ 由方程(7.2.29)给定.

这里所阐明的步骤将会实施到7.5节中的例子上, 那些例子更加复杂也更加有趣.

* * *

在考察物理理论的各种可能的拉格朗日量密度时, 同时使用了分布积分, 等价地处理为仅相差一个全导数 $\partial_\mu \mathcal{F}^\mu$ 的拉格朗日量密度. 显然这样的全导数项对作用量无贡献并且不影响场方程. 同样显然的是拉格朗日量密度中的空间导数项 $\nabla \cdot \mathcal{F}$ 对拉格朗日量无贡献, 因而不影响由拉格朗

日量定义的量子场论。[¶]这里不太显然且不是很重要重要的是拉格朗日量密度中的时间导数 $\partial_0 \mathcal{F}^0$ ，它也不影响理论的量子结构，为了看到这点，先来考察向拉格朗日量上增加一个更普遍项的效应

$$\Delta L(t) = \int d^3x D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)] \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.2.36)$$

其中 D 是给定时刻 Q 值的任意 n -相关且 \mathbf{x} -相关的泛函。这将作为 $Q(t)$ 和 $\dot{Q}(t)$ 泛函的共轭变量 $P(t)$ 改变了

$$\Delta P_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \Delta L(t)}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)} = D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]. \quad (7.2.37)$$

由此得出，在表示成 $Q(t)$ 和 $\dot{Q}(t)$ 泛函的哈密顿量中没有变化：

$$\int d^3x \Delta P_n(\mathbf{x}, t) \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t) - \Delta L(t) = 0. \quad (7.2.38)$$

因此，表示成旧正则变量 Q^n 和 P_n 泛函的哈密顿量中也没有变化。然而，作为新正则变量 Q^n 和 $P_n + \Delta P_n$ 泛函的哈密顿量与作为 Q^n 和 P_n 泛函的哈密顿量不是同一个，并且在由新拉格朗日量 $\mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}$ 描述的理论中，满足正则对易关系的是新正则变量 Q^n 和 $P_n + \Delta P_n$ 而非 Q^n 和 P_n ， Q_n 与其它 Q 的对易子以及 Q^n 与 P_m 的对易子由通常的正则关系给定，但 P_n 与其它 P 的对易关系现在是：

$$\begin{aligned} [P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t)] &= [P_n(\mathbf{x}, t) + \Delta P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t) + \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] \\ &\quad - [\Delta P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t) + \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] \\ &\quad - [P_n(\mathbf{x}, t) + \Delta P_n(\mathbf{x}, t), \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] \\ &\quad + [\Delta P_n(\mathbf{x}, t), \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] \\ &= -i \frac{\delta D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]}{\delta \dot{Q}^m(\mathbf{y}, t)} + i \frac{\delta D_{m,\mathbf{y}}[Q(t)]}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)}. \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

一般而言，这不为零，但是如果在拉格朗日量中加上的项是总的时间导数

$$\Delta L = \frac{dG}{dt} = \int d^3x \frac{\delta G[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)} \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.2.40)$$

那么方程(7.2.36)中的 D 是如下的特定形式

$$D_{n,\mathbf{x}}[Q] = \frac{\delta G[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.41)$$

在该情况下，对易子(7.2.39)为零，所以变量 Q^n 和 P_n 满足通常的对易关系。我们已经看到了拉格朗日量中形式为(7.2.36)的变化并不改变作为 Q^n 和 P_n 泛函的哈密顿量的形式，并且，正如我们所证明的，既然这些变量的对易关系没有改变，那么附加在拉格朗日量上的项(7.2.36)对理论的量子机构没有影响。通过分部积分而获得的不同拉格朗日量因而可以认为在量子场论和经典场论中是等价的。

[¶]这处在一个通常的假设下，即场在无限远出为零。当我们允许不同拓扑的场时，这些结果不一定适用，这将在卷II中讨论。

7.3 整体对称性

我们现在来研究拉格朗日形式体系的真正关键, 即它为对称性原理的量子力学实现提供了一个自然框架. 这是因为拉格朗日形式体系中的动力学方程采取一种变分原理的形式, 即稳定作用量原理. 考察场的任意无穷小变换

$$\Psi^\ell(x) \rightarrow \Psi^\ell + i\epsilon \mathcal{F}^\ell(x) \quad (7.3.1)$$

其使作用量(7.2.3)不变:

$$0 = \delta I = i\epsilon \int d^4x \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^\ell(x)} \mathcal{F}^\ell(x) \quad (7.3.2)$$

(其中 ϵ 是一个常数, 这种对称性被称为整体对称性. 一般而言, \mathcal{F}^ℓ 依赖场与它们在 x 处的导数.) 显然, 如果场满足动力学方程, 那么对于场的所有无穷小变分, 方程(7.3.2)是自动满足的; 对于一个无限小对称变换, 我们是指即使没有满足动力学方程仍使作用量不变的变换. 如果我们现在考察 ϵ 为时空中位置的任意函数的同一变换

$$\Psi^\ell(x) \rightarrow \Psi^\ell + i\epsilon(x) \mathcal{F}^\ell(x), \quad (7.3.3)$$

那么, 一般而言, 作用量的变分不为零, 它将必须采取这样的形式

$$\delta I = - \int d^4x J^\mu(x) \frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x^\mu} \quad (7.3.4)$$

使得在 $\epsilon(x)$ 是一个常数为零. 如果我们现在令 $I[\Psi]$ 中的场满足场方程, 那么 I 对于在大时空距离处为零的任意场变分是稳定的, 其中包含形式为(7.3.3)的变分, 所以在该情况下, (7.3.4)应该为零. 分部积分, 我们看到 $J^\mu(x)$ 必须满足守恒律:

$$0 = \frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x^\mu}. \quad (7.3.5)$$

由此立即得出

$$0 = \frac{dF}{dt}, \quad (7.3.6)$$

其中

$$F \equiv \int d^3x J^0. \quad (7.3.7)$$

对于每个独立的无限小对称变换, 存在一个这样的守恒流 J^μ 和一个运动常数 F . 这代表正则形式体系的一个普遍特征, 通常被称为Noether(诺特)定理: 对称性意味着守恒律.

很多对称变换不仅使作用量不变也使拉格朗日量不变. 例如, 空间的平移和旋转, 同位旋变换以及其它内部对称变换就是这样的情况, 但是对于普遍的Lorentz变换却不是这样. 当拉格朗日量不变时, 我们可以走的更远, 并写出守恒量 F 的显式公式. 考察一个 $\epsilon(x)$ 依赖于 t 但不依赖 \mathbf{x} 的场变分(7.3.3), 在这种情况下, 作用量的变分是

$$\begin{aligned} \delta I = i \int dt \int d^3x \left[\frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \epsilon(t) \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, t) \right. \\ \left. + \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t)} \frac{d}{dt} \left(\epsilon(t) \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

当 ϵ 是常数时, 拉格朗日量在该对称变换下不变的要求给出

$$0 = \int d^3x \left[\frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x}, t)} \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t)} \frac{d}{dt} \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, t) \right], \quad (7.3.9)$$

所以对于一般场(无论场方程是否满足), 作用量变分是

$$\delta I = i \int dt \int d^3x \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t)} \dot{\epsilon}(t) \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.10)$$

与方程(7.3.4)相比给出

$$F = -i \int d^3x \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t)} \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.11)$$

利用对称性条件(7.3.9), 读者可以轻易地验证 F 对于任何满足动力学方程(7.2.2)的场确实是时间无关的.

诸如同位旋的其它对称变换不仅使作用量和拉格朗日量不变, 而且保持拉格朗日量密度不变. 在这种情况下, 我们可以再进一步, 并得到流 $J^\mu(x)$ 的显式公式. 像方程(7.2.6)那样, 将作用量写为拉格朗日量密度的积分, 在 $\epsilon(x)$ 为普遍的无限小参量的变换(7.3.3)下, 它的变分是

$$\begin{aligned} \delta I[\Psi] = i \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial \Psi^\ell(x)} \mathcal{F}^\ell(x) \epsilon(x) \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^\ell(x))} \partial_\mu \left(\mathcal{F}^\ell(x) \epsilon(x) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

当 ϵ 是常数时, 拉格朗日量密度的不变性要求

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial \Psi^\ell(x)} \mathcal{F}^\ell(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^\ell(x))} \partial_\mu \mathcal{F}^\ell(x), \quad (7.3.13)$$

所以对于任意场, 作用量的变分是

$$\delta I[\Psi] = i \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^\ell(x))} \mathcal{F}^\ell(x) \partial_\mu \epsilon(x). \quad (7.3.14)$$

与方程(7.3.4)相比给出

$$J^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^\ell / \partial x^\mu)} \mathcal{F}^\ell. \quad (7.3.15)$$

利用对称性条件(7.3.13), 很容易看到当场满足Euler-Lagrange方程(7.2.9)时, $\partial_\mu J^\mu$ 为零. 又注意到流(7.3.15)的时间分量的积分有着之前所需值(7.3.11).

目前为止, 我们所说的任何事情即适用于经典场论又适用于量子场论. 通过拉格朗日量(不必须是拉格朗日量密度)的对称性, 即将正则场 $Q^n(\mathbf{x}, t)$ (即, 那些时间导数出现在拉格朗日量中的 Ψ^ℓ)变换成它们自身在同一时刻的 \mathbf{x} -相关泛函的对称性, 守恒量 F 的量子性质可以被最轻松地看到. 对于这样的变换, 我们有

$$\mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^n[Q(t); \mathbf{x}]. \quad (7.3.16)$$

正如我们将要看到的, 无限小空间平移与旋转以及所有的无限小内部对称变换的形式是(7.3.1), (7.3.16), 其中 \mathcal{F}^n 是 Q^m 的线性泛函, 但是我们在这里不需要假定对称性是线性的. 对于所有这样的对称性, 算符 F 不仅守恒, 而且作为该对称性的生成元作用在量子力学中.

为了看到这点, 首先注意到当 Ψ^ℓ 是正则场 Q^n 时, 泛函导数 $\delta L/\delta \dot{\Psi}^\ell$ 等于正则共轭 P_n , 而当 Ψ^ℓ 是辅助场 C^r 时, 这个泛函导数为零; 因此我们可以将方程(7.3.11)重写成这样的形式

$$F = -i \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t) = -i \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^n[Q(t); \mathbf{x}]. \quad (7.3.17)$$

为了计算 F 与处在任意时刻 t 的正则场 $Q^m(\mathbf{x}, t)$ 的对易子(不是反对易子), 我们可以调用方程(7.3.6)在时刻 t 去计算作为 Q 和 P 泛函的 F , 然后利用等时对易关系(7.1.30)—(7.1.32)以获得*

$$[F, Q^n(\mathbf{x}, t)]_- = -\mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.18)$$

这就是说 F 是变换为方程(7.3.16)的生成元. 方程(7.3.17)与正则对易规则又给出

$$[F, P_n(\mathbf{x}, t)]_- = \int d^3y P_m(\mathbf{y}, t) \frac{\delta \mathcal{F}^n(Q(t); \mathbf{y})}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.3.19)$$

其中 F^m 是线性的, 方程(7.3.19)告诉我们 P_n 逆步变换到 Q^n .

作为第一个例子, 考察时空平移的对称变换:

$$\Psi^\ell(x) \rightarrow \Psi^\ell(x + \epsilon) = \Psi^\ell(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \Psi^\ell(x). \quad (7.3.20)$$

这是(7.3.1)的形式, 其中 ϵ^μ 为4个独立的参量, 而4个对应的变换函数

$$\mathcal{F}_\mu^\ell = -i \partial_\mu \Psi^\ell. \quad (7.3.21)$$

结果是我们有了4个独立的守恒流, 通常集合在能动量张量 T_ν^μ 中:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (7.3.22)$$

由此我们可以导出时间独立量, 这个量“平移”流(不要与正则共轭场变量 $P_n(\mathbf{x}, t)$ 相混淆)时间分量的空间积分:

$$P_\nu = \int d^3x T_\nu^0, \quad (7.3.23)$$

$$\frac{d}{dt} P_\nu = 0. \quad (7.3.24)$$

拉格朗日量在空间平移下不变, 所以依照之上的普遍结果, 我们可以推断出 P_ν 的空间分量采取这样的形式

$$\mathbf{P} \equiv - \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) \nabla Q^n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.25)$$

利用等时对易关系(7.1.30)—(7.1.32), 我们也得到了该算符与正则场及其共轭的对易子:

$$[\mathbf{P}, Q^n(\mathbf{x}, t)]_- = i \nabla Q^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.3.26)$$

$$[\mathbf{P}, P_n(\mathbf{x}, t)]_- = i \nabla P_n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.27)$$

由此得出任何 Q 和 P 的函数 \mathcal{G} 也不显式地与 \mathbf{x} 相关, 我们有

$$[\mathbf{P}, \mathcal{G}(x)] = i \nabla \mathcal{G}(x). \quad (7.3.28)$$

*我们在这里假定了对于玻色的 Q^n 或费米的 Q^n , 变分 \mathcal{F} 也分别是波色或费米的. 唯一的例外是被称为超对称的某些对称性, 其中 F 是费米的, 且如果 Q^n 也是费米的, 那么(7.3.18)是反对易子.

这一结果表明算符 \mathbf{P} 确实是空间平移的生成元。

相反, 时间平移并不使拉格朗日量 $L(t)$ 保持不变. 然而, 我们已经知道了时间平移的生成元; 它是哈密顿量 $P^0 \equiv H$, 正如我们所知, 对于Heisenberg绘景算符的任何函数 \mathcal{G} , 它满足对易关系

$$[H, \mathcal{G}(\mathbf{x}, t)] = -i\dot{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.29)$$

如果我们进一步假定拉格朗日量是某个拉格朗日量密度的积分, 那么我们也能获得能动量张量 T^μ_ν 的显式公式. 然而, 拉格朗日量密度 $\mathcal{L}(x)$ 在时空平移下不是不变的, 所以在这里我们无法使用方程(7.3.15). 诚然, 注意到时空平移下

$$\Psi^\ell(x) \rightarrow \Psi^\ell(x + \epsilon(x)) = \Psi^\ell(x) + \epsilon^\mu(x)\partial_\mu\Psi^\ell(x) \quad (7.3.30)$$

作用量的变化为

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^\ell} \epsilon^\mu \partial_\mu\Psi^\ell + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Psi^\ell)} \partial_\nu[\epsilon^\mu \partial_\mu\Psi^\ell] \right). \quad (7.3.31)$$

Euler-Larange方程(7.2.9)证明了正比于 ϵ 的项加起来为 $\epsilon^\mu \partial_\mu\mathcal{L}$, 所以

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \epsilon^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Psi^\ell)} \partial_\mu\Psi^\ell \partial_\nu\epsilon^\mu \right). \quad (7.3.32)$$

分部积分, 我们看到它变成方程(7.3.4)的形式

$$\delta I = - \int d^4x T^\nu_\mu \partial_\nu\epsilon^\mu \quad (7.3.33)$$

其有“流”

$$T^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu \mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Psi^\ell)} \partial_\mu\Psi^\ell. \quad (7.3.34)$$

作为一个检验, 我们可能注意到了, 方程(7.3.23)的空间分量与我们之前 \mathbf{P} 的公式(7.3.25)相同, 而对于 $\mu = 0$, 方程(7.3.23)给出哈密顿量的通常公式:

$$H \equiv -P_0 = \int d^3x \left[\sum_n P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L} \right]. \quad (7.3.35)$$

(一个提醒: 通过提升方程(7.3.34)中的第二个指标所获得的张量 $T^{\mu\nu}$, 一般而言, 不是对称的, 因而不能用作广义相对论场方程的右边. 用作引力场源的正确能动量张量是下一节所引入的对称张量 $\Theta^{\mu\nu}$.)

在很多理论中, 存在一个或多个对称性原理, 它们陈述了在正则场的一组坐标无关的线性变换下

$$Q^n(x) \rightarrow Q^n(x) + i\epsilon^a (t_a)^n_m Q^m(x) \quad (7.3.36)$$

与任意辅助场 C^r 上的一组合适的变换

$$C^r(x) \rightarrow C^r(x) + i\epsilon^a (\tau_a)^r_s C^s(x), \quad (7.3.37)$$

作用量的不变. 这里的 t_a 和 τ_a 是厄密矩阵的集合, 这些厄密矩阵构成该对称群Lie代数的某些表示, 并且在这里我们对重复指标 a, b ,等进行求和. (例如, 在电动力学中存在这样的对称性, 其中唯一的

矩阵 t^n_m 是对角的, 而每一场所携带的电荷在主对角上.) 对于任何这样的对称性, 我们可以推断出另一组守恒流 J_a^μ 的存在:

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad (7.3.38)$$

它的时间分量是一组时间无关算符 T_a 的密度

$$T_a = \int d^3x J_a^0. \quad (7.3.39)$$

当拉格朗日量与作用量在变换(7.3.36)下不变时, 方程(7.3.11)提供了 T_a 的一个显式公式:

$$T_a = -i \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) (t_a)^n_m Q^m(\mathbf{x}, t) \quad (7.3.40)$$

等时对易关系在这里给出

$$[T_a, Q^n(x)] = -(t_a)^n_m Q^m(x), \quad (7.3.41)$$

$$[T_a, P_n(x)] = +(t_a)^m_n P_m(x). \quad (7.3.42)$$

(其中 t_a 是对角的, 这告诉我们, Q_n 和 P^n 分别降低和提升 T_a 的值与 t_a 的第 n 个对角元精确相等.) 利用这些结果, 我们可以计算 T_a 与其它生成元 T_b 的对易子:

$$[T_a, T_b]_- = -i \int d^3x \left[-P_m(t_a)^m_n (t_b)^n_k Q^k + P_n(t_b)^n_k (t_a)^k_m Q^m \right]. \quad (7.3.43)$$

因此, 如果矩阵 t_a 构成的Lie代数有结构常数 f_{ab}^c ,

$$[t_a, t_b]_- = i f_{ab}^c t_c, \quad (7.3.44)$$

那么量子算符 T_a 也是这样:

$$[T_a, T_b]_- = i f_{ab}^c T_c. \quad (7.3.45)$$

这证实了量(7.3.40)被正确地归一化以取得作为对称群生成元的资格.

拉格朗日量是拉格朗日量密度的积分, 如果拉格朗日量密度在(7.3.36)和(7.3.37)下不变, 我们可以再进一步, 并利用方程(7.3.15)给出与这些整体对称性相联系的流的显式公式:

$$J_a^\mu \equiv -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial Q^n / \partial x^\mu)} (t_a)^n_m Q^m - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial C^r / \partial x^\mu)} (\tau_a)^r_s C^s. \quad (7.3.46)$$

作为一个例证, 假定我们有两个质量相等的实标量场, 其拉格朗日量密度是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \Phi_1^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \Phi_2^2 - \mathcal{H}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2). \quad (7.3.47)$$

这在类似(7.3.36)的线性变换下是不变额:

$$\delta \Phi_1 = -\epsilon \Phi_2, \quad \delta \Phi_2 = +\epsilon \Phi_1,$$

所以存在一个守恒流(7.3.46):

$$J^\mu = \Phi_2 \partial^\mu \Phi_1 - \Phi_1 \partial^\mu \Phi_2.$$

流的显式公式(7.3.46)可以用来导出其它有用的对易关系. 特别地, 既然拉格朗日量密度不含辅助场的时间导数, 我们有

$$J_a^0 = -iP_n(t_a)^n Q^m. \quad (7.3.48)$$

那么, 我们不仅可以导出一般场与对称性生成元 T_a 的等时对易子, 还能导出其与密度 J_a^0 的等时对易子:

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), Q^n(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (t_a)^n Q^m(\mathbf{x}, t), \quad (7.3.49)$$

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t)] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (t_a)^n P_n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.50)$$

如果辅助场是作为 P 和 Q 的定域函数而构建的, 且构建方式使得它们按照生成元为 τ_a 的对称性代数的一个表示变换, 那么也有

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), C^r(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\tau_a)^r_s C^s(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.51)$$

我们通常将方程(7.3.49)与(7.3.51)总结在一个对易关系中

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), \Psi^\ell(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (t_a)^\ell_{\ell'} \Psi^{\ell'}(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.52)$$

我们将在第10章使用类似(7.3.49)—(7.3.51)的对易关系导出包含流 J^μ 的矩阵元的关系, 这个关系称为Ward等式.

7.4 Lorentz不变性

我们现在将证明拉格朗日量密度的Lorentz不变性暗含了 S -矩阵的Lorentz不变性. 考察一个无限小Lorentz变换

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad (7.4.1)$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (7.4.2)$$

根据上一节的分析, 作用量在这类变换下的不变显然告诉我们存在一组守恒“流” $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$:

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = 0, \quad (7.4.3)$$

$$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = -\mathcal{M}^{\rho\nu\mu} \quad (7.4.4)$$

$\omega_{\mu\nu}$ 的每个独立分量对应一个流. 那么这些“流”的时间分量的积分提供给我们一组时间独立张量:

$$J^{\mu\nu} \equiv \int d^3x \mathcal{M}^{0\mu\nu}, \quad (7.4.5)$$

$$\frac{d}{dt} J^{\mu\nu} = 0. \quad (7.4.6)$$

$J^{\mu\nu}$ 将证明是齐次Lorentz群的生成元.

我们希望得到张量 $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ 的一个显式公式, 但是Lorentz变换是作用在坐标上的, 因而不能保持拉格朗日量密度不变, 所以我们无法立刻使用上一节的结果. 然而, 在只有一组场和场导数的变

换下, 平移不变性允许我们用公式将Lorentz不变性表达为拉格朗日量密度的一个对称性. 场经过一个矩阵变换

$$\delta\Psi^\ell = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m, \quad (7.4.7)$$

其中 $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ 是一组满足齐次Lorentz群代数的矩阵

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] = i\mathcal{J}_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma} - i\mathcal{J}_{\sigma\nu}\eta_{\mu\rho} - i\mathcal{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} + i\mathcal{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}. \quad (7.4.8)$$

例如, 对于一个标量场 ϕ , 我们有 $\delta\phi = 0$, 所以 $\mathcal{J}_{\mu\nu} = 0$, 而对于一个 (A, B) 型的不可约场, 我们有

$$\mathcal{J}_{ij} = \epsilon_{ijk}(\mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k), \quad \mathcal{J}_{k0} = -i(\mathcal{A}_k - \mathcal{B}_k),$$

其中 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 分别是自旋 A 和 B 的自旋矩阵. 特别地, 我们注意到对于一个协变矢量场, $\delta V_\kappa = \omega_\kappa{}^\lambda V_\lambda$, 所以这里有

$$(\mathcal{J}_{\rho\sigma})_\kappa{}^\lambda = -i\eta_{\rho\kappa}\delta_\sigma{}^\lambda + i\eta_{\sigma\kappa}\delta_\rho{}^\lambda.$$

像方程(7.4.7)中那样变换的场, 它的导数像另外一个这样的场变换, 但是有一个额外的矢量指标

$$\delta(\partial_\kappa\Psi^\ell) = \frac{1}{2}i\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\partial_\kappa\Psi^m + \omega_\kappa{}^\lambda\partial_\lambda\Psi^\ell. \quad (7.4.9)$$

假定拉格朗日量密度在方程(7.4.7)和(7.4.9)的组合变换下不变, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^\ell} \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)} \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\partial_\kappa\Psi^m \\ &\quad + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)} \omega_\kappa{}^\lambda\partial_\lambda\Psi^\ell. \end{aligned}$$

令 $\omega^{\mu\nu}$ 的系数为零给出

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{i}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^\ell} (\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m + \frac{i}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)} (\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\partial_\kappa\Psi^m \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)} (\eta_{\kappa\mu}\partial_\nu - \eta_{\kappa\nu}\partial_\mu)\Psi^\ell. \end{aligned}$$

利用Euler-Lagrange方程(7.2.9), 以及我们的能动量张量 $T_{\mu\nu}$ 的公式(7.3.34), 我们可以将其写为

$$0 = \partial_\kappa \left[\frac{i}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)} (\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m \right] - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (7.4.10)$$

这立刻给出一个新的能动量张量定义, 称为 *Belinfante* (贝林凡特) 张量:²

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\partial_\kappa \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)} (\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi^\ell)} (\mathcal{J}^{\kappa\nu})^\ell{}_m\Psi^m - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Psi^\ell)} (\mathcal{J}^{\kappa\mu})^\ell{}_m\Psi^m \right]. \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

中括号中的量显然对于 μ 和 κ 是反对称的, 所以 $\Theta^{\mu\nu}$ 满足与 $T^{\mu\nu}$ 相同的守恒律,

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (7.4.12)$$

由于同一原因, 当我们在方程(7.4.11)中令 $\mu = 0$ 时, 指标 κ 仅取遍空间分量, 所以当我们对全空间积分时, 就扔掉了这里的导数项

$$\int \Theta^{0\nu} d^3x = \int T^{0\nu} d^3x = P^\nu, \quad (7.4.13)$$

其中 $P^0 \equiv H$. 因此, $\Theta^{\mu\nu}$ 可以被认为是能动量张量, 就像 $T^{\mu\nu}$ 那样. 然而方程(7.4.10)告诉我们, 不像 $T^{\mu\nu}$, Belinfante张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 不仅是守恒的而且是对称的:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}. \quad (7.4.14)$$

作为引力场源的是 $\Theta^{\mu\nu}$ 而不是 $T^{\mu\nu}$.³ 由于 $\Theta^{\mu\nu}$ 对称的缘故, 我们可以再构建一个守恒张量密度:

$$\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu \Theta^{\lambda\nu} - x^\nu \Theta^{\lambda\mu}. \quad (7.4.15)$$

它是守恒的, 也就是说

$$\partial_\lambda \mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = 0. \quad (7.4.16)$$

因此Lorentz不变性允许我们再定义一个时间独立张量

$$J^{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x = \int d^3x (x^\mu \Theta^{0\nu} - x^\nu \Theta^{0\mu}). \quad (7.4.17)$$

旋转生成元 $J_k = \epsilon_{ijk} J^{ij}/2$ 不仅是时间独立的, 也没有显式的时间相关性, 所以它与哈密顿量对易

$$[H, \mathbf{J}] = 0. \quad (7.4.18)$$

另外, 将方程(7.3.28)应用于函数 $\Theta^{0\nu}$, 我们有

$$\begin{aligned} [P_j, J_i] &= \frac{1}{2} \epsilon_{i\ell k} [P_j, J^{\ell k}] = \frac{i}{2} \epsilon_{i\ell k} \int d^3x \left(x^\ell \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{0k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{0\ell} \right) \\ &= -i \epsilon_{ijk} \int d^3x \Theta^{0k} \end{aligned}$$

因而

$$[P_j, J_i] = -i \epsilon_{ijk} P_k. \quad (7.4.19)$$

另一方面, “推动”生成元 $K_k \equiv J^{k0}$, 尽管时间独立, 却显式地包含时间坐标

$$K_k = \int d^3x (x^k \Theta^{00} - x^0 \Theta^{0k}),$$

或者更清楚地

$$\mathbf{K} = -t\mathbf{P} + \int d^3x \mathbf{x} \Theta^{00}(\mathbf{x}, t). \quad (7.4.20)$$

既然这是一个常数, 我们有 $0 = \dot{\mathbf{K}} = -\mathbf{P} + i[H, \mathbf{K}]$, 因而

$$[H, \mathbf{K}] = -i\mathbf{P}. \quad (7.4.21)$$

另外, 再次使用方程(7.3.28)给出

$$[P_j, K_k] = i \int d^3x x^k \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{00} = -i \delta_{jk} \int d^3x \Theta^{00}$$

因而

$$[P_j, K_k] = -i\delta_{jk}H. \quad (7.4.22)$$

对于任何合理的拉格朗日量密度, 以3.3节所用的概念而言, 算符(7.4.20)是“光滑”的, 即, $e^{iH_0t} \int d^3x \mathbf{x} \Theta^{00}(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0t}$ 中的相互作用项在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时为零*。 (注意, 为了能够引入“入”态, “出”态和 S -矩阵, $e^{iH_0t} \int d^3x \mathbf{x} \Theta^{00}(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0t}$ 中的相互作用项在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时必须为零。) 有了光滑假定和对易关系(7.4.21), 我们可以重复3.3节的讨论, 并得到结论: S -矩阵是Lorentz不变的。

* * *

3.3节中也用同样的讨论来证明Lorentz群中剩下的对易关系, 即那些 $J^{\mu\nu}$ 之间的关系, 有着正确的形式. 对于旋转生成元也可以直接证明这点, 旋转生成元在这里的形式为

$$J^{ij} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell} \left(-x^i \partial_j \Psi^\ell + x^j \partial_i \Psi^\ell - i(\mathcal{J}^{ij})^\ell_m \Psi^m \right). \quad (7.4.23)$$

既然拉格朗日量密度不依赖辅助场的时间导数, 且旋转生成元没有混合正则场和辅助场, 这也可以写为仅对正则场的求和:

$$J^{ij} = \int d^3x P_n \left(-x^i \partial_j Q^n + x^j \partial_i Q^n - i(\mathcal{J}^{ij})^n_{n'} Q^{n'} \right). \quad (7.4.24)$$

那么从正则对易关系立即得出

$$[J^{ij}, Q^n(x)]_- = -i(-x_i \partial_j + x_j \partial_i) Q^n(x) - (\mathcal{J}^{ij})^n_{n'} Q^{n'}(x), \quad (7.4.25)$$

$$[J^{ij}, P_n(x)]_- = -i(-x_i \partial_j + x_j \partial_i) P_n(x) - (\mathcal{J}^{ij})^n_{n'} P_{n'}(x). \quad (7.4.26)$$

这些结果可以用来导出通常的 J^{ij} 之间的对易关系和 J^{ij} 与其它生成元的对易关系.** 如果不存在辅助场, 那么对“推动”生成元可以应用相对的讨论以完成 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$ 满足非齐次Lorentz群的对易关系的证明. 然而, “推动”矩阵 \mathcal{J}^{i0} 一般而言将混合正则场和辅助场(例如矢量场的 V^i 分量和 V^0 分量), 所以对于 J^{i0} 之间的对易关系, 直接证明将不得不依照具体情况而定. 幸运的是, 3.3节中所给出的 S -矩阵的Lorentz不变性的证明中是不需要这点的。

7.5 过渡到相互作用绘景: 例子

在7.2节末尾, 我们展示了如何用一个简单标量场论的拉格朗日量导出它在相互作用绘景中所包含的相互作用结构与自由场结构. 我们现在将转向更加复杂且更有启发性的例子。

标量场, 导数耦合

我们先来考察中性标量场论, 但现在有导数耦合. 我们将拉格朗日量取为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - J^\mu \partial_\mu \Phi - \mathcal{H}(\Phi), \quad (7.5.1)$$

*当我们称某个相互作用绘景算符在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时为零, 我们是指该极限下, 它在能量本征态的光滑叠加态之间的矩阵元为零。

**另外, 由于 J^{ij} 与 H 和 $P_n \dot{Q}^n$ 对易, 它与 L 对易. J^{ij} 与辅助场的对易子因而与 L 的旋转不变性一致。

其中, J^μ 要么是c-数外流(与之前介绍的流 J^μ 无关), 要么是 Φ 以外的各种场的泛函(在这种情况下, 包含那些其余场的项需要加到(7.5.1)上.) 现在, Φ 的正则共轭是

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} - J^0 \quad (7.5.2)$$

而哈密顿量是

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x [\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}] \\ &= \int d^3x \left[\Pi(\Pi + J^0) + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}(\Pi + J^0)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \mathbf{J} \cdot \nabla\Phi + J^0(\Pi + J^0) + \mathcal{H}(\Phi) \right]. \end{aligned}$$

合并这些项, 我们可以将其写为

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.3)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \right], \quad (7.5.4)$$

$$V = \int d^3x \left[\Pi J^0 + \mathbf{J} \cdot \nabla\Phi + \frac{1}{2}(J^0)^2 + \mathcal{H}(\Phi) \right]. \quad (7.5.5)$$

正如7.2节所阐述的, 我们可以通过将 Π 和 Φ 简单地替换为 π 和 ϕ 以过渡到相互作用绘景(尽管清楚地表明这一点并不会麻烦我们, 对于流 J^μ 中的任意场同样如此):

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\mathbf{x}, t))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\mathbf{x}, t) \right], \quad (7.5.6)$$

$$\begin{aligned} V(t) &= \int d^3x \left[\pi(\mathbf{x}, t)J^0(\mathbf{x}, t) + J(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}[J^0(\mathbf{x}, t)]^2 + \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)) \right]. \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

自由粒子哈密顿量正好与方程(7.2.25)是相同的, 并像7.2节中那样导出方程(7.2.26)—(7.2.35). 诚然, 无论总哈密顿量会是什么样, 我们都必须取(7.5.6)为我们必须要分离出的部分, 并称其为自由粒子部分, 这是因为, 正如我们所看到的, 它正是导出标量场的正确展开(7.2.29)的自由粒子哈密顿量, 这个展开(7.2.29)的形式是满足对易关系(7.2.34)和(7.2.35)的产生湮灭算符, 而剩余部分被称为相互作用. 最后一步是将相互作用哈密顿量中的 π 替换成它在相互作用绘景中的值 $\dot{\phi}$ (不是它在Heisenberg绘景中的值 $\dot{\phi} - J^0$):

$$V(t) = \int d^3x \left[J^\mu \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}[J^0(\mathbf{x}, t)]^2 + \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)) \right]. \quad (7.5.8)$$

方程(7.5.8)中额外的非协变项, 就像我们在6.2节中所看到的, 正是抵消 $\partial\phi$ 传播子中的非协变项所需要的.

矢量场, 自旋1

对于自旋1粒子的矢量场 V_μ , 它的正则量子化会获得类似的结果. 我们在这里保持思想开放, 以一种相当普遍的形式写出拉格朗日量密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\alpha \partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu - \frac{1}{2}\beta \partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu - \frac{1}{2}m^2 V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu, \quad (7.5.9)$$

其中, α, β 和 m^2 就现在的意义而言是任意常数, 而 J_μ 要么是一个c-数外流, 要么是与 V^μ 之外的场相关的算符, 在后一种情况下, 包含这些场的额外项要加到 \mathcal{L} 上. V_μ 的Euler-Lagrange场方程是

$$-\alpha \square V_\nu - \beta \partial_\nu (\partial_\mu V^\mu) + m^2 V_\nu = -J_\nu.$$

取散度给出

$$-(\alpha + \beta) \square \partial_\lambda V^\lambda + m^2 \partial_\lambda V^\lambda = -\partial_\lambda J^\lambda. \quad (7.5.10)$$

这正是质量为 $m^2/(\alpha + \beta)$, 源为 $\partial_\lambda J^\lambda/(\alpha + \beta)$ 的任意标量场的方程. 我们希望描述一个仅包含自旋1粒子而不包含自旋零粒子的理论, 所以为了避免一个独立传播的标量场 $\partial_\lambda V^\lambda$ 的出现, 我们取 $\alpha = -\beta$, 在这种情况下, $\partial_\lambda V^\lambda$ 可以表示成一个外流或者其它场的形式, 例如 $\partial_\lambda J^\lambda/m^2$. 常数 α 可以被吸收到 V_μ 的定义中, 所以我们取 $\alpha = -\beta = 1$, 因而

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu \quad (7.5.11)$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (7.5.12)$$

拉格朗日量相对于矢量场的时间导数的导数是

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}_\mu} = -F^{0\mu}. \quad (7.5.13)$$

这在 μ 是一个空间指标 i 时是非零的, 所以 V^i 是正则场, 共轭为

$$\Pi^i = F^{i0} = \dot{V}^i + \partial_i V^0 \quad (7.5.14)$$

另一方面 $F^{00} = 0$, 所以 \dot{V}^0 不出现在拉格朗日量中, 因而 V^0 是一个辅助场. 这不引起严重的困难: $\partial \mathcal{L}/\partial V^0$ 为零意味着 V^0 的场方程不包含二阶时间导数, 因而可以用作一个消除场变量的约束. 特别地, $\nu = 0$ 的Euler-Lagrange方程是

$$\partial_i F^{i0} = m^2 V^0 - J^0 \quad (7.5.15)$$

或者使用方程(7.5.14)

$$V^0 = \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \Pi + J^0) \quad (7.5.16)$$

现在我们来计算这个理论的哈密顿量 $H = \int d^3x (\Pi \cdot \dot{V} - \mathcal{L})$. 方程(7.5.14)允许我们将 \dot{V} 写成 Π 和 J^0 的形式:

$$\dot{V} = -\nabla V^0 + \Pi = \Pi - \frac{1}{m^2} \nabla (\nabla \cdot \Pi + J^0),$$

所以

$$H = \int d^3x \left[\mathbf{\Pi}^2 + m^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{\Pi})(\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + J^0) - \frac{1}{2}\mathbf{\Pi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{V})^2 + \frac{1}{2}m^2\mathbf{V}^2 - \frac{1}{2}m^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + J^0)^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} + m^{-2}J^0(\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + J^0) \right].$$

再一次地, 我们将其分成自由粒子项 H_0 和相互作用 V :

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.17)$$

并通过将Heisenberg-绘景量 \mathbf{V} 和 $\mathbf{\Pi}$ 替换成它们的相互作用绘景配对量 \mathbf{v} 和 $\boldsymbol{\pi}$ (并且, 虽然没有清楚地表现出来, 对于出现在 J^μ 中的任何场以及共轭同样如此):

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v})^2 + \frac{m^2}{2}\mathbf{v}^2 \right], \quad (7.5.18)$$

$$V = \int d^3x \left[-\mathbf{J} \cdot \mathbf{v} + m^{-2}J^0\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2m^2}(J^0)^2 \right]. \quad (7.5.19)$$

那么 $\boldsymbol{\pi}$ 和 \mathbf{v} 之间的关系是

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta H_0(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})}{\delta \boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - m^{-2}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \quad (7.5.20)$$

而“场方程”是

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{\delta H_0(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})}{\delta \mathbf{v}} = +\nabla^2\mathbf{v} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - m^2\mathbf{v}. \quad (7.5.21)$$

由于 V^0 不是一个独立场变量, 它无法通过一个相似变换与任意的相互作用绘景客体 v^0 相关. 转而, 我们可以转化一个量

$$v^0 \equiv m^{-2}\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}. \quad (7.5.22)$$

那么方程(7.5.20)允许我们将 $\boldsymbol{\pi}$ 写为

$$\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{v}} + \nabla v^0. \quad (7.5.23)$$

将其代入方程(7.5.22)和(7.5.21)给出的场方程形式如下

$$\begin{aligned} \nabla^2 v^0 + \nabla \cdot \dot{\mathbf{v}} - m^2 v^0 &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \ddot{\mathbf{v}} - \nabla \dot{v}^0 - m^2 \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

这些可以组合成协变形式

$$\square v^\mu - \partial^\mu \partial_\nu v^\nu - m^2 v^\mu = 0. \quad (7.5.24)$$

取散度给出

$$\partial_\mu v^\mu = 0 \quad (7.5.25)$$

因而

$$(\square - m^2)v^\mu = 0. \quad (7.5.26)$$

一个满足方程(7.5.25)和(7.5.26)的实矢量场可以表示成一个Fourier变换

$$v^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p (2p^0)^{-1/2} \left\{ e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} \right\}, \quad (7.5.27)$$

其中 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$; $\sigma = +1, 0, -1$ 的 $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ 是三个独立的矢量, 其满足

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (7.5.28)$$

并且已归一化的, 使得

$$\sum_{\sigma} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) e^{\nu*}(\mathbf{p}, \sigma) = \eta^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / m^2; \quad (7.5.29)$$

而 $a(\mathbf{p}, \sigma)$ 是算符系数. 使用方程(7.5.23), (7.5.27)和(7.5.29)去计算 \mathbf{v} 和 $\boldsymbol{\pi}$ 满足正确的对易关系是直接的

$$\begin{aligned} [v^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] &= i\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [v^i(\mathbf{x}, t), v^j(\mathbf{y}, t)] &= [\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] = 0, \end{aligned} \quad (7.5.30)$$

其中要假定 $a(\mathbf{p}, \sigma)$ 和 $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)$ 满足对易关系

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')] = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (7.5.31)$$

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma')] = 0. \quad (7.5.32)$$

我们已经知道了自旋1粒子的矢量场必须采取形式(7.5.27), 所以我们的这些结果的推导充当了方程(7.5.18)给出的有质量的自旋1粒子的自由粒子哈密顿量是正确的证明. 也很容易检查方程(7.5.18)可以写成(相差一个常数项)自由粒子的标准形式, 形如 $\sum_{\sigma} \int d^3p p^0 a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma)$. 最后, 在方程(7.5.19)中使用方程(7.5.22)给出相互作用绘景中的相互作用

$$V(t) = \int d^3x \left[-J_\mu v^\mu + \frac{1}{2m^2} (J^0)^2 \right]. \quad (7.5.33)$$

方程(7.5.33)中额外的非协变项, 就像我们在第6章中所看到的, 正是抵消矢量场传播子中的非协变项所需要的.

Dirac场, 自旋1/2

对于自旋1/2粒子的Dirac场, 我们暂时取拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi - \mathcal{H}(\bar{\Psi}, \Psi) \quad (7.5.34)$$

其中 \mathcal{H} 是 $\bar{\Psi}$ 和 Ψ 的实函数. 这个 \mathcal{L} 不是实的, 但是作用量是, 这是因为

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - (\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi)^\dagger = \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi = \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi).$$

因此, 通过要求作用量相对于 $\bar{\Psi}$ 是稳定的而获得的场方程, 是通过要求作用量相对于 Ψ 是稳定的而获得的场方程的伴方程, 如果我们要避免有过多的场方程, 这正是所需要的. Ψ 的正则共轭是

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = -\bar{\Psi} \gamma^0, \quad (7.5.35)$$

所以我们不应该将 $\bar{\Psi}$ 视为类似 Ψ 的场, 而是正比于 Ψ 的正则共轭的场. 哈密顿量是

$$H = \int d^3x [\Pi\dot{\Psi} - \mathcal{L}] = \int d^3x [\Pi\gamma^0[\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m]\Psi + \mathcal{H}].$$

我们将其写为

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.36)$$

其中

$$H_0 = \int d^3x \Pi\gamma^0[\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m]\Psi, \quad (7.5.37)$$

$$V = \int d^3x \mathcal{H}(\bar{\Psi}, \Psi). \quad (7.5.38)$$

我们现在过渡到了相互作用绘景. 由于方程(7.5.35)不涉及时间, 相似变换(7.1.28)和(7.1.29)立即给出

$$\pi = -\bar{\psi}\gamma^0. \quad (7.5.39)$$

同样, 在方程(7.5.37)和(7.5.38)中将 Ψ 和 Π 替换成 ψ 和 π 就可以计算出 H_0 和 $V(t)$. 这给出运动方程

$$\dot{\psi} = \frac{\delta H_0}{\delta \pi} = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m)\psi \quad (7.5.40)$$

或者更简洁些

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0. \quad (7.5.41)$$

(另一运动方程, $\dot{\pi} = -\delta H_0 / \delta \psi$, 正好产生该方程的伴方程.) 任何满足方程(7.5.41)的场都可以写成一个Fourier变换

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} \left\{ u(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + v(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) \right\}, \quad (7.5.42)$$

其中 $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$; $a(\mathbf{p}, \sigma)$ 和 $b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)$ 是算符系数; 而 $u(\mathbf{p}, \pm\frac{1}{2})$ 是方程

$$(i\gamma^\mu p_\mu + m)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (7.5.43)$$

的两个独立解, 同样地有

$$(-i\gamma^\mu p_\mu + m)v(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (7.5.44)$$

归一化使得*

$$\sum_{\sigma} u(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{(-i\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}, \quad (7.5.45)$$

$$\sum_{\sigma} v(\mathbf{p}, \sigma) \bar{v}(\mathbf{p}, \sigma) = -\frac{(i\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}. \quad (7.5.46)$$

*矩阵 $i\gamma^\mu p_\mu$ 有本征值 $\pm m$, 所以 $\sum u \bar{u}$ 和 $\sum v \bar{v}$ 必须分别正比于投影矩阵 $(-i\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$ 和 $(i\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$. 通过将比例因子吸收进 u 和 v 的定义中来对其调整直至符号, 总的符号有正定性决定: $\text{Tr} \sum u \bar{u} \beta = \sum u^\dagger u$ 和 $\text{Tr} \sum v \bar{v} \beta = \sum v^\dagger v$ 必须是正定的.

为了获得所需的反对易子

$$\begin{aligned} \left[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\mathbf{y}, t) \right]_+ &= \left[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\gamma(\mathbf{y}, t) \right]_+ (\gamma^0)_{\gamma\beta} \\ &= i(\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (7.5.47)$$

$$\left[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{y}, t) \right]_+ = 0, \quad (7.5.48)$$

我们必须采取这样的反对易关系

$$\left[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma') \right]_+ = \left[b(\mathbf{p}, \sigma), b^\dagger(\mathbf{p}', \sigma') \right]_+ = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\sigma'\sigma} \quad (7.5.49)$$

$$\begin{aligned} \left[a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma') \right]_+ &= \left[b(\mathbf{p}, \sigma), b(\mathbf{p}', \sigma') \right]_+ = \\ \left[a(\mathbf{p}, \sigma), b(\mathbf{p}', \sigma') \right]_+ &= \left[a(\mathbf{p}, \sigma), b^\dagger(\mathbf{p}', \sigma') \right]_+ = 0, \end{aligned} \quad (7.5.50)$$

以及它们的伴. 这些与第5章所获得的结果是一致的, 它们证明了(7.5.37)是自旋 $\frac{1}{2}$ 的正确哈密顿量. 以 a 和 b 的形式, 这个哈密顿量是

$$H_0 = \sum_\sigma \int d^3p p^0 \left(a(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) - b(\mathbf{p}, \sigma) b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) \right). \quad (7.5.51)$$

我们可以将其重写成一个更加常见的哈密顿量, 加上另一个无限大 c -数**

$$H_0 = \sum_\sigma \int d^3p p^0 \left[a(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) + b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) b(\mathbf{p}, \sigma) - \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}) \right]. \quad (7.5.52)$$

仅当我们担心引力现象时, 方程(7.5.52)中的 c -数项才是重要的; 否则, 就像标量场那样, 我们可以在这里把它扔掉, 既然它只影响与所有测量能量相比的零点能. 在这种情况下, H_0 是正定算符, 就像玻色子那样.

7.6 约束与Dirac括号

从拉格朗日量导出哈密顿的主要障碍是约束的出现. 这一问题的标准分析是由Dirac⁵的工作之一, 我们将在这里沿用他的术语. 对于本章所讨论的简单理论, 很容易辨认出非约束的正则场, Dirac分析不是真正必要的. 为了进行说明, 我们在这里将使用有质量的实矢量场理论, 在下一章回到Dirac的方法上来, 在那里它是真正有用的.

初级约束(primary constraints)要么是强加在系统之上的(例如我们在下一场为电磁场选择规范), 要么源于拉格朗日量自身的结构. 对于后一类的例子, 考察有质量矢量场 V^μ 与流 J_μ 相互作用的拉格朗日量(7.5.11):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu \quad (7.6.1)$$

其中

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (7.6.2)$$

**注意 c -数项的负号. 被称为超对称⁴的猜测对称性以 H_0 中的 c -数全部抵消的方式连接玻色场和费米场的数目.

假定我们尝试在同一基上处理 V^μ 的全部4个分量. 那么我们应该定义共轭

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 V_\mu)} = -F^{0\mu} . \quad (7.6.3)$$

我们立即找到主约束:

$$\Pi_0 = 0 . \quad (7.6.4)$$

更普遍地, 只要无法从方程 $\Pi_\ell = \delta L / \delta \partial_0 \Psi^\ell$ 以 Π_ℓ 和 Ψ^ℓ 的形式(至少使定域地)解出所有的 $\partial_0 \Psi^\ell$, 我们就会遇到初级约束. 当且仅当矩阵 $\delta^2 L / \delta(\partial_0 \Psi^\ell) \delta(\partial_0 \Psi^m)$ 的行列式为零时将是这样的情况. 这种拉格朗日量被称为非正则的(*irregular*).

接下来, 有次级约束(*secondary constraints*), 它源于初级约束要与运动方程一致的要求. 对于有质量矢量场, 这正是 V^0 的Euler-Lagrange方程(7.5.16):

$$\partial_i \Pi_i = m^2 V^0 - J^0 . \quad (7.6.5)$$

在这里我们就此结束, 但是在其它理论中, 通过要求次级约束与场方程的一致性, 依次类推, 我们会遇到进一步的约束. 初级, 次级等约束之间的区别是不重要的; 我们在这里一起处理它们.

在特定类型的约束之间存在更加重要的另一区别. 对于有质量矢量场, 我们所发现的约束是被称为第二类约束的一种, 对于这类约束, 存在对易关系的通用方法. 为了解释第一类约束与第二类约束之间的区别, 以及用于处理第二类约束的方法, 先回顾一下经典力学的Poisson括号定义是有用的.

考察依赖于—组变量 $\Psi^a(t)$ 及其时间导数 $\dot{\Psi}^a(t)$ 的任意拉格朗日量 $L(\Psi, \dot{\Psi})$. (量子场论的拉格朗日量是特殊情况, 其指标 a 取遍所有的 ℓ, \mathbf{x} 对.) 我们可以通过

$$\Pi_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^a} \quad (7.6.6)$$

定义所有这些变量的正则共轭. Π 和 Ψ 一般不是独立变量, 但转而可以通过几个约束方程关联, 其中既有初级又有次级. 那么Poisson括号定义为

$$[A, B]_P \equiv \frac{\partial A}{\partial \Psi^a} \frac{\partial B}{\partial \Pi_a} - \frac{\partial B}{\partial \Psi^a} \frac{\partial A}{\partial \Pi_a} \quad (7.6.7)$$

其中, 在计算对 Ψ^a 和 Π_a 的导数时忽略了约束. 特别地, 我们总有 $[\Psi^a, \Pi_b]_P = \delta_b^a$. (这里及其之后的所有场都取为同一时刻, 并扔掉了所有的时间变量.) 这些括号有着与对易子相同的代数性质:

$$[A, B]_P = -[B, A]_P , \quad (7.6.8)$$

$$[A, BC]_P = [A, B]_P C + B [A, C]_P , \quad (7.6.9)$$

包括Jacobi等式

$$[A, [B, C]_P]_P + [B, [C, A]_P]_P + [C, [A, B]_P]_P = 0 . \quad (7.6.10)$$

如果我们能采用通常的对易关系 $[\Psi^a, \Pi_b] = i\delta_b^a$, $[\Psi^a, \Psi^b] = [\Pi_a, \Pi_b] = 0$, 那么 Ψ 和 Π 的任意两个函数的对易子将是 $[A, B] = i[A, B]_P$. 但是约束不总是允许这样.

一般而言, 约束可以表示成 $\chi_N = 0$ 的形式, 其中 χ_N 是 Ψ 和 Π 的一组函数. 因为我们把次级约束与初级约束一同纳入进来, 所有约束的集合与运动方程 $\dot{A} = [A, H]_P$ 必须一致, 因而当约束方程 $\chi_N = 0$ 被满足时,

$$[\chi_N, H]_P = 0 . \quad (7.6.11)$$

当(在计算Poisson括号之后)我们附加约束时, 如果它与所有其它约束的Poisson括号为零, 我们则称它为第一类约束. 在下一章电磁场的量子化中, 我们将看到该类约束的一个简单例子, 其中第一类约束源于作用量的对称性, 电磁规范不变性. 事实上, 第一类约束 $\chi_N = 0$ 的集合总是与一个对称群相联系, 在该群下, 任意量 A 经受一个无限小变换

$$\delta_N A \equiv \sum_N \epsilon_N [\chi_N, A]_P. \quad (7.6.12)$$

(在场论中, 它们是定域变换, 这是因为指标 N 包含坐标.) 方程(7.6.11)表明这个变换保持哈密顿量不变, 并且对于第一类约束, 它也遵循所有约束. 这种第一类约束可以通过规范的选择消除.

在所有第一类约束被规范选择消除后, 剩下的约束方程 $\chi_N = 0$ 使得这些约束彼此之间的Poisson括号的线性组合 $\sum_N u_N [\chi_N, \chi_M]$ 不为零. 由此得出剩余约束的Poisson括号的矩阵是非奇异的:

$$\text{Det } C \neq 0, \quad (7.6.13)$$

其中

$$C_{NM} \equiv [\chi_N, \chi_M]_P. \quad (7.6.14)$$

这类约束被称为第二类约束. 注意到第二类约束的个数总是偶数, 这是因为一个奇数维的反对称矩阵的行列式必为零.

正如我们所看到的, 在有质量矢量场的情况下, 约束是

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \chi_{2\mathbf{x}} = 0, \quad (7.6.15)$$

其中

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \Pi_0(\mathbf{x}), \quad \chi_{2\mathbf{x}} = \partial_i \Pi_i(\mathbf{x}) - m^2 V^0(\mathbf{x}) - J^0(\mathbf{x}). \quad (7.6.16)$$

这些约束的Poisson括号是

$$C_{1\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} = -C_{2\mathbf{y}, 1\mathbf{x}} = [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_P = m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.6.17)$$

并且, 显然有,

$$C_{1\mathbf{x}, 1\mathbf{y}} = C_{2\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} = 0. \quad (7.6.18)$$

这个“矩阵”显然是不奇异的, 所以约束(7.6.15)是第二类约束.

Dirac提出, 当所有约束是第二类时, 对易关系将由

$$[A, B] = i[A, B]_D, \quad (7.6.19)$$

给出, 其中 $[A, B]_D$ 是Poisson括号的推广, 称为Dirac括号:

$$[A, B]_D \equiv [A, B]_P - [A, \chi_N]_P (C^{-1})^{NM} [\chi_M, B]_P. \quad (7.6.20)$$

(这里 N 和 M 是包含空间位置的混合指标, 其取得值类似矢量场例子中的 $1, \mathbf{x}$ 和 $2, \mathbf{x}$.) 他注意到Dirac括号像Poisson括号一样, 满足与对易子相同的代数关系

$$[A, B]_D = -[B, A]_D, \quad (7.6.21)$$

$$[A, BC]_D = [A, B]_D C + B[A, C]_D, \quad (7.6.22)$$

$$[A, [B, C]_D]_D + [B, [C, A]_D]_D + [C, [A, B]_D]_D = 0, \quad (7.6.23)$$

以及关系

$$[\chi_N, B]_D = 0 \quad (7.6.24)$$

这使得对易关系(7.6.19)与约束 $\chi_N = 0$ 一致. 另外, 如果方程 $\chi'_N = 0$ 与 $\chi_N = 0$ 定义了相同的相空间子流形, 那么将 χ_N 换成 χ'_N 不会改变Dirac括号. 但是所有这些良好的性质并没有证明对易子真的以Dirac括号的形式由方程(7.6.19)给出.

若非Maskawa(益川)和Nakajima(中岛)⁶所证明的一个强有力定理解决了一切, 这个问题是值得注意的. 他们证明了, 对于任何一组有第二类约束指派的正则变量 Ψ^a 和 Π_a , 总可以通过一个正则变换^{*}构建两组变量 Q^n , \mathcal{Q}^r 和它们各自的共轭 P_n , \mathcal{P}_r , 使得约束变成 $\mathcal{Q}^r = \mathcal{P}_r = 0$. 利用这些坐标计算Poisson括号, 并将约束函数重定义为 $\chi_{1r} = \mathcal{Q}^r$, $\chi_{2r} = \mathcal{P}_r$, 我们有

$$C_{1r,2s} = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{P}_s]_P = \delta_s^r, \\ C_{1r,1s} = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s]_P = 0, \quad C_{2r,2s} = [\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s]_P = 0,$$

并且对于任意函数 A, B

$$[A, \chi_{1r}]_P = -\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r}, \quad [A, \chi_{2r}]_P = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r},$$

这个 C -矩阵由逆 $C^{-1} = -C$, 所以Dirac括号(7.6.20)在这里是

$$[A, B]_D = [A, B]_P + [A, \chi_{1r}]_P [\chi_{2r}, B]_P - [A, \chi_{2r}]_P [\chi_{1r}, B]_P \\ = [A, B]_P - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} \\ = \frac{\partial A}{\partial Q^n} \frac{\partial B}{\partial P_n} - \frac{\partial B}{\partial Q^n} \frac{\partial A}{\partial P_n}. \quad (7.6.25)$$

换句话说, Dirac括号等于以约化非约束正则变量组 Q^n, P_n 计算的Poisson括号. 如果我们假定这些非约束变量满足正则对易关系, 那么普遍算符 A, B 的对易子由方程(7.6.19)以Dirac括号的形式给出.^{**}

我们现在回到有质量矢量场的情况, 来看一下使用Dirac括号它是如何被量子化的. 在这个情况下, 很容易以非约束变量 $^\dagger V_i$ 和 Π_i 的形式表示约束变量 V^0 和 Π_0 ; 我们有 $\Pi_0 = 0$, 而 V^0 由方程(7.6.5)给出. 从方程(7.6.17)和(7.6.18), 我们看到 C_{NM} 在这里有逆

$$(C^{-1})^{1x,2y} = -(C^{-1})^{2y,1x} = -m^{-2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.6.26)$$

^{*}回顾一下正则变换, 正则变换是指从一组相空间坐标 Ψ^a, Π_a 到另一相空间坐标 $\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_a$ 的变换, 并使得 $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_b]_P = \delta_b^a$ 且 $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Psi}^b]_P = [\tilde{\Pi}_a, \tilde{\Pi}_b]_P = 0$, 其中Poisson括号以 Ψ^a 和 Π_a 的形式计算. 由此得出, 无论是以 Ψ^a 和 Π_a 的形式计算, 还是以 $\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_a$ 的形式计算, 任意函数 A, B 的Poisson括号都是相同的. 也得出如果 Ψ^a 和 Π_a 满足哈密顿运动方程, 那么 $\tilde{\Psi}^a$ 和 $\tilde{\Pi}_a$ 也满足同一哈密顿量的运动方程. 正则变换改变的拉格朗日量, 但只改变的一个时间导数, 而这是不影响作用量的.

^{**}对于由Maskawa-Nakajima正则变换所构建的非约束正则变量 Q^n, P_n , 我们是否应该采用正则对易关系依旧是个开放问题. 根本上, 这种对易关系的检验是它们与第5章所导出的自由场对易关系的一致性, 但是为了使用这个检验, 我们需要知道 Q^n 和 P_n 是什么. 在本章的附录中, 我们展示了两大类理论, 对于这些理论, 我们能够辨认出非约束的 Q 和 P , 使得Dirac对易关系(7.6.19)可以从 Q 和 P 的普通正则对易关系得出. 我们也将证明, 在这些情况下, 以非约束 Ψ 和 Π 的形式定义的哈密顿量也可以写成约束变量的形式.

[†]这是附录的Part A中所讨论的理论的一种特殊情况.

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = (C^{-1})^{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0. \quad (7.6.27)$$

因此Dirac处理(7.6.19), (7.6.20)得出了等式对易子

$$[A, B] = i[A, B]_{\text{P}} + im^{-2} \int d^3z \left([A, \Pi_0(\mathbf{z})]_{\text{P}} [\partial_i \Pi_i(\mathbf{z}) - m^2 V^0(\mathbf{z}) - J^0(\mathbf{z}), B]_{\text{P}} - A \leftrightarrow B \right). \quad (7.6.28)$$

通过定义, 我们有

$$[V^\mu(\mathbf{x}), \Pi_\nu(\mathbf{y})]_{\text{P}} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_\nu^\mu, \quad [V^\mu(\mathbf{x}), V^\nu(\mathbf{y})]_{\text{P}} = [\Pi_\mu(\mathbf{x}), \Pi_\nu(\mathbf{y})]_{\text{P}} = 0. \quad (7.6.29)$$

因此

$$\begin{aligned} [V^i(\mathbf{x}), V^j(\mathbf{y})] &= [V^0(\mathbf{x}), V^0(\mathbf{y})] = 0, \\ [V^i(\mathbf{x}), V^0(\mathbf{y})] &= -im^{-2} \partial_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [V^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] &= i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [V^0(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] &= [V^\mu(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{y})] = 0, \\ [\Pi^\mu(\mathbf{x}), \Pi^\nu(\mathbf{y})] &= 0 \end{aligned} \quad (7.6.30)$$

这些确实就是, 通过假定非约束变量满足通常的正则对易关系 $[V^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $[V^i(\mathbf{x}), V^j(\mathbf{y})] = [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0$, 并使用约束去计算包含 Π_0 和 V^0 的对易子后, 我们将发现的对易子.

7.7 场重定义与冗余耦合*

类似质量和 S -矩阵元的可观测量是与任意作用量中称为冗余参量的耦合参量无关的. 这是因为这些参量的改变可以通过对简单地重定义场变量被抵消掉. 场的连续重定义, 例如无限小定域变换 $\Psi^\ell(x) \rightarrow \Psi^\ell(x) + \epsilon F^\ell(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))$, 显然不影响该理论的任何可观测量,** 尽管, 理所应当, 它将改变场本身的矩阵元值.

我们如何分辨一个理论中参量的某个变分能否被场重定义所抵消呢? 连续的定域场重定义会产生作用量的改变, 改变的形式为

$$\delta I[\Psi] = \epsilon \sum_\ell \int d^4x \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^\ell(x)} F^\ell(\Psi(x), \partial \Psi(x), \dots). \quad (7.7.1)$$

所以耦合参量 g_i 中的任意改变 δg_i , 若作用量中的改变形式为

$$\sum_i \frac{\partial I}{\partial g_i} \delta g_i = -\epsilon \sum_\ell \int d^4x \frac{\delta I}{\delta \Psi^\ell(x)} F^\ell(\Psi(x), \partial \Psi(x), \dots), \quad (7.7.2)$$

那么它可以被场重定义抵消

$$\Psi^\ell(x) \rightarrow \Psi^\ell(x) + \epsilon F^\ell(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), \dots),$$

* 本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略。

** 例如, 10.2节证明了, 只要乘以正确的场重整化常数, 且算符在真空与参与反应的粒子的单粒子态之间的矩阵元不为零, 我们就可以从任意算符的编时乘积的真空期望值中获得 S -矩阵元。

因而在任何可观测量上没有效应. 换句话说, 当我们改变一个参量时, 如果作用量的改变在我们使用场方程 $\delta I/\delta\Phi^\ell = 0$ 后为零, 那么这个耦合常数就是冗余的.

例如, 假定我们将标量场理论的拉格朗日量密度写成如下形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z(\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi + m^2\Phi^2) - \frac{1}{24}gZ^2\Phi^4.$$

常数 Z 是冗余耦合, 这是因为

$$\frac{\partial I}{\partial Z} = \frac{1}{2} \int d^4x \Phi(\square\Phi - m^2\Phi - \frac{1}{6}gZ\Phi^3),$$

并且, 当我们使用场方程时

$$\square\Phi - m^2\Phi = \frac{1}{6}gZ\Phi^3,$$

这是为零的. 另一方面, 裸质量 m 和耦合 g 都不是冗余的, 并且 m 和 g 的函数也不是冗余的.

在这个例子中, 为了抵消 Z 的改变所需要的场重定义就是一个尺度变换, 其中 F 正比于 Φ . (由于这个原因, Z 被称为场重整化常数.) 这是保证该作用量的普遍形式不变的最普遍场变换. 但是对于12.3节和12.4节所考察的更普遍的作用量, 其有任意个场和导数, 我们将不得不考察非线性场重定义和线性场重定义, 并且, 该理论参量的一个无限大子集将是冗余的.

附录 从正则对易子到Dirac括号

在该附录中, 我们将证明, 在两类理论中, 将对易子给为Dirac括号乘以 i 的公式是从约化变量通常的正则对易关系得到的.

A

假定(就像在有质量矢量场 V^μ 的情况中那样), 出现在拉格朗日量 L 中的量子变量 Ψ^a 和 Π_a 可以被分成两类:^{*} 一组独立的正则变量(类似 $V^i(\mathbf{x})Q^n$ 以及独立的正则共轭 $P_n = \partial L/\partial\dot{Q}^n$; 另一组是 $\mathcal{Q}^r(\mathbf{x})$ (类似 V^0), 它的时间导数不出现在拉格朗日量中. 初级约束是条件 $\chi_{1r} = 0$, 其中

$$\chi_{1r} = \mathcal{P}_r \tag{7.A.1}$$

是共轭于 \mathcal{Q}^r 的变量. 次级约束从 \mathcal{Q}^r 的运动方程 $0 = \partial L/\partial\mathcal{Q}^r$ 得出; 我们假定这些约束是“可解的”——即, 它们可以写成 $\chi_{2r} = 0$ 的形式, 其中 χ_{2r} 的形式如下

$$\chi_{2r} = \mathcal{Q}^r - f^r(Q, P). \tag{7.A.2}$$

(方程(7.6.5)提供了一个例子, 其以独立的 P (这里是 Π_i)和 Q 给出了 V^0 .) 我们假定独立的 Q 和 P 满足通常的正则对易规则

$$[Q^n, P_m] = i\delta_m^n, \quad [Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0. \tag{7.A.3}$$

^{*}我们又一次使用一个紧凑的记号. 其中, 类似 a, n 和 r 的指标包含空间指标 \mathbf{x} 和离散指标. 重复指标进行了求和和积分. 所有的量子变量被理解成是在同一时刻计算的, 其中所有通常的时间变量都被扔掉了. 量 \mathcal{Q}^r 与7.2节所引入的 C^r 是相同的.

约束 $\chi_{2r} = 0$ 给出包含 \mathcal{Q} 的对易子:

$$[\mathcal{Q}^r, Q^n] = -i \frac{\partial f^r}{\partial P_n}, \quad [\mathcal{Q}^r, P_n] = i \frac{\partial f^r}{\partial Q^n}, \quad (7.A.4)$$

$$[\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s] = i\Gamma^{rs}, \quad (7.A.5)$$

其中 Γ^{rs} 是Poisson括号

$$\Gamma^{rs} \equiv [f^r, f^s]_{\text{P}}, \quad (7.A.6)$$

并且, 理所应当, 所有包含 \mathcal{P}_r 的对易子为零:

$$[\mathcal{P}_r, Q^n] = [\mathcal{P}_r, P_n] = [\mathcal{P}_r, \mathcal{Q}^s] = [\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s] = 0. \quad (7.A.7)$$

现在我们来比较这些对易子与Dirac括号. 约束函数的Poisson括号是

$$C_{1r,1s} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{1s}]_{\text{P}} = 0, \quad (7.A.8)$$

$$C_{1r,2s} \equiv -C_{2s,1r} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{2s}]_{\text{P}} = -\delta_s^r, \quad (7.A.9)$$

$$C_{2r,2s} \equiv [\chi_{2r}, \chi_{2s}]_{\text{P}} = [f^r(Q, P), f^s(Q, P)]_{\text{P}} \equiv \Gamma^{rs}. \quad (7.A.10)$$

(在有质量矢量场的例子中, Γ^{rs} 为零, 但是这里的讨论将同样适用于非零的 Γ^{rs} .) 很容易看到 C -矩阵有逆

$$\begin{aligned} (C^{-1})^{1r,1s} &= \Gamma^{rs}, & (C^{-1})^{2r,2s} &= 0, \\ (C^{-1})^{1r,2s} &= -(C^{-1})^{2s,1r} = \delta_s^r. \end{aligned} \quad (7.A.11)$$

另外, 任意函数 A 与约束函数的Poisson括号是

$$[A, \chi_{1r}]_{\text{P}} = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}, \quad [A, \chi_{2r}]_{\text{P}} = -\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} - [A, f^r(Q, P)]_{\text{P}}.$$

因此Dirac括号是

$$\begin{aligned} [A, B]_{\text{D}} &= [A, B]_{\text{P}} - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} \\ &+ \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \Gamma^{rs} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^s} - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} [B, f^r]_{\text{P}} + [A, f^r]_{\text{P}} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r}. \end{aligned} \quad (7.A.12)$$

现在, 如果 A 和 B 都只是独立正则变量 Q^n 和 P_n 的函数, 那么 $\partial A/\partial \mathcal{Q}^r = \partial B/\partial \mathcal{Q}^r = 0$, 所以Dirac括号等于Poisson括号. 特别地,

$$[Q^n, P_m]_{\text{D}} = \delta_m^n, \quad [Q^n, Q^m]_{\text{D}} = [P_n, P_m]_{\text{D}} = 0. \quad (7.A.13)$$

当 A 是 \mathcal{Q}^r 而 B 是 Q 和 P 的函数, 方程(7.A.12)右边仅第五项有贡献. 特别地

$$[\mathcal{Q}^r, Q^n]_{\text{D}} = -\frac{\partial f^r}{\partial P_n}, \quad [\mathcal{Q}^r, P_n]_{\text{D}} = +\frac{\partial f^r}{\partial Q^n}. \quad (7.A.14)$$

当 A 和 B 都是 \mathcal{Q} , 我们仅有第四项

$$[\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s]_{\text{D}} = \Gamma^{rs}. \quad (7.A.15)$$

最后, 当 A 是 \mathcal{P}_r 而 B 任意, 我们仅有第一项和第三项, 其相互抵消:

$$[\mathcal{P}_r, B]_{\text{D}} = [\mathcal{P}_r, B]_{\text{P}} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} = 0. \quad (7.A.16)$$

比较方程(7.A.13)—(7.A.16)与方程(7.A.3)—(7.A.7), 这说明了, 在任何情况下, 对易子等于Dirac括号乘以 i . 这是唯一所期待的, 这是因为, 正如7.6节所评述的, 所有包含约束函数的Dirac括号为零, 所以包含 \mathcal{Q}^r 和/或 \mathcal{P}_s 是通过使用约束方程将 \mathcal{Q}^r 和/或 \mathcal{P}_s 表示成独立 Q 和 P 的形式给出的.

B

接下来考察这样的情况, 约束形式取为 Ψ^a 上的条件 $\chi_{1r}(\Psi) = 0$, 其可以通过将它们表示成更小的一组非约束变量 Q^n 的形式解出, 以及数量相等的 Π_a 上的额外条件 $\chi_{2r}(\Pi) = 0$, 其可以通过将 Π_a 表示成更小的一组非约束 P_n 的形式解出. (我们将在下一章看到一个例子, 其中 Ψ^a 上的约束是用来消除第一类约束的规范固定条件, 而 Π_a 是第二类约束, 其源于第一类约束与场方程的一致性.) 我们假定无约束变量满足通常的正则对易关系 $[Q^n, P_m] = i\delta_m^n$, $[Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0$. 被约束动量与无约束动量的关联为

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^n} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^b} \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = \Pi_b \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n}. \quad (7.A.17)$$

由此得出

$$[\Psi^a, \Pi_b] \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = [\Psi^a, P_n] = i \frac{\partial \Psi^a}{\partial Q^n}$$

或者, 换种形式,

$$\{[\Psi^a, \Pi_b] - i\delta_b^a\} \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = 0. \quad (7.A.18)$$

现在, 对于所有的 Q , $\Psi^a = \Psi^a(Q)$ 满足约束 $\chi_{1r}(\Psi) = 0$, 所以

$$\frac{\partial \chi_{1r}}{\partial \Psi^b} \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = 0. \quad (7.A.19)$$

进一步, 矢量 $(V_r)_b \equiv \partial \chi_{1r} / \partial \Psi^b$ 构成垂直于所有矢量 $(U_n)^b \equiv \partial \Psi^b / \partial Q^n$ 的一个完全集, 这是因为, 如果存在某些其它矢量 V_b , 使得对于所有的 n , $V_b (U_n)^b = 0$, 那么将会有 Ψ^a 上的额外约束. 因此方程(7.A.18)暗示着

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i\delta_b^a + i c_r^a \frac{\partial \chi_{1r}}{\partial \Psi^b} \quad (7.A.20)$$

其中 c_r^a 是未知常数. 为了决定这些常数, 我们使用其它约束, 即 $\chi_{2r}(\Pi) = 0$. 它得出

$$0 = [\Psi^a, \chi_{2r}(\Pi)] = i[\Psi^a, \Pi_b] \frac{\partial \chi_{2r}(\Pi)}{\partial \Pi_b}.$$

利用方程(7.A.20), 我们就有

$$\frac{\partial \chi_{2r}(\Pi)}{\partial \Pi_a} = -c_s^a \frac{\partial \chi_{1s}(\Psi)}{\partial \Psi^b} \frac{\partial \chi_{2r}(\Pi)}{\partial \Pi_b}. \quad (7.A.21)$$

我们辨认出乘以 c_s^a 的因子就是Poisson括号

$$\frac{\partial \chi_{1s}(\Psi)}{\partial \Psi^b} \frac{\partial \chi_{2r}(\Pi)}{\partial \Pi_b} = [\chi_{1s}, \chi_{2r}]_P \equiv C_{1s, 2r}.$$

另外, 由于 χ_{1s} 只依赖于 Ψ 而 χ_{2r} 只依赖于 Π , 它们是约束的唯一不为零的Poisson括号, 所以

$$C_{1r, 1s} = C_{2r, 2s} = 0.$$

因此方程(7.A.21)可以被写成

$$\frac{\partial \chi_N}{\partial \Pi_a} = -c_s^a C_{1s, N} \quad (7.A.22)$$

其中 N 取遍所有的约束函数. 对于第二类约束, 其有唯一解

$$c_s^a = -\frac{\partial \chi_N}{\partial \Pi_a} (C^{-1})^{N,1s} = -\frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a} (C^{-1})^{2r,1s} . \quad (7.A.23)$$

在方程(7.A.20)中使用上式证明了

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i \left[\delta_b^a - \frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a} (C^{-1})^{2r,1s} \frac{\partial \chi_{1s}}{\partial \Psi^b} \right] . \quad (7.A.24)$$

Ψ^a 和 Π_b 与与约束函数的Poisson括号是

$$\begin{aligned} [\Psi^a, \chi_{1r}]_P &= 0, & [\Psi^a, \chi_{2r}]_P &= \frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a}, \\ [\chi_{1r}, \Pi_b]_P &= \frac{\partial \chi_{1r}}{\partial \Psi^b}, & [\chi_{2r}, \Pi_b]_P &= 0, \end{aligned} \quad (7.A.25)$$

所以方程(7.A.24)右边括号中的等式是Dirac括号

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i[\Psi^a, \Pi_b]_D, \quad (7.A.26)$$

这正是所要证明的. 另外, 我们可以轻松地看到, 由于 C^{-1} 没有11分量和22分量, 其余的Dirac括号是

$$[\Psi^a, \Psi^b]_D = [\Pi_a, \Pi_b]_D = 0, \quad (7.A.27)$$

所以, 平庸地有

$$[\Psi^a, \Psi^b] = i[\Psi^a, \Psi^b]_D, \quad [\Pi_a, \Pi_b] = i[\Pi_a, \Pi_b]_D. \quad (7.A.28)$$

* * *

除了对易规则, 我们还需要一个哈密顿量的显式公式. 通常的正则形式体系告诉我们取

$$H = P_n \dot{Q}^n - L, \quad (7.A.29)$$

求和取遍所有独立的正则变量. 在该附录所考察的两类理论中, 哈密顿量可以以约束变量的形式写成

$$H = \Pi_a \dot{\Psi}^a - L. \quad (7.A.30)$$

对于A类理论, 这是平庸的; 对 a 的求和取遍了, 所有 $\Psi^n = Q^n$ 和 $\Pi_n = P_n$ 是独立正则变量的 n 值, 以及所有 $\Pi_r = \mathcal{P}_r = 0$ 的 r 值. 对于B类理论, 我们注意到方程(7.A.17)给出

$$P_n \dot{Q}^n = \Pi_b \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} \dot{Q}^n = \Pi_b \dot{\Psi}^b$$

其又一次给出了方程(7.A.30).

参考文献

- [1] H. B. G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 635 (1948); M. J. Spaarnay, *Nature* **180**, 334 (1957).

-
- [2] F. Belinfante, *Physica* **6**, 887 (1939); 另见L. Rosenfeld, *Mémoires de l'Académie Roy. Bel-gique* **6**, 30 1930.
- [3] 参看S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Chapter 12.
- [4] 参看J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton 1983), 以及在那里所引用的原始文献.
- [5] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964). 另见P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950); *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A, **246**, 326 (1958); P. G. Bergmann, *Helv. Phys. Acta Suppl.* IV, 79 (1956).
- [6] T. Maskawa and H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 1295 (1976). 我很感谢J. Feinberg让我知道了这个文献.

第 8 章 电动力学

量子电动力学的原始方法是视Maxwell的经典电磁理论理所应当, 并量子化它. 读者可能不会惊讶本书会走上一个不同的道路. 我们将先从公式化有自旋无质量粒子的量子理论时产生的特殊困难中推断出规范对称原理的必要性, 然后从规范对称原理推断出电动力学的主要特征. 在那之后, 我们将跟随一个更加方便的现代方法, 在这个方法中, 将视规范对称性为出发点, 并用它推断出用以描述单位自旋无质量粒子的矢势的存在.

现在谈论这两个方法中的那一个对应自然的逻辑顺序还为时尚早. 大多数的理论家倾向于取规范对称性为出发点, 但是在现代弦理论中,¹ 讨论走向了另一条道路; 首先发现无质量的态以及弦的简正模中的单位自旋, 然后从此推断出描述这类粒子的有效场论的规范对称性. 无论如何, 正如我们将看到的, 利用那一种方法都会导出Maxwell理论的量子版本, 这仍是一个成功的量子场论的经典案例.

8.1 规范对称性

在构建螺旋度 ± 1 的无质量粒子的协变自由场时, 我们遇到了问题, 我们从回顾这个问题出发. 在5.9节, 我们看到对于这类粒子, 构建一个反对称张量自由场 $f_{\mu\nu}(x)$ 是不存在困难的. 这个场可以表示成4-势 $a_\mu(x)$ 的形式, 由方程(5.9.23)给定, 经由一个熟悉的关系

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x). \quad (8.1.1)$$

然而, 方程(5.9.31)证明了 $a_\mu(x)$ 按照一个4-矢变换, 但相差一个规范变换

$$U_0(\Lambda)a_\mu(x)U_0^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu(x)a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu\Omega(x, \Lambda). \quad (8.1.2)$$

事实上, 不可能将一个真正的4-矢构建为螺旋度为 ± 1 的产生湮灭算符的线性组合. 这是理解在有质量矢量场的传播子中在 $m = 0$ 处出现奇异的一种方法

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q e^{iq \cdot (x-y)} \frac{\eta_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / m^2}{q^2 + m^2 - i\epsilon},$$

这阻止我们通过取自旋1的有质量粒子理论的 $m \rightarrow 0$ 极限来处理螺旋度 ± 1 的无质量粒子.

通过要求所有相互作用仅包含 $*F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ 以及它的导数, 而不是 $A_\mu(x)$, 我们可以避免这些问题, 但这不是最普遍的可能性, 也不是自然中所实现的方式. 取代禁止 $A_\mu(x)$ 出现在作用量中, 我们应该转而要求作用量的物质部分 I_M 以及它与辐射的相互作用部分在普遍的规范变换下不变

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\epsilon(x) \quad (8.1.3)$$

*我们现在对电磁势矢量以及场强张量使用 A_μ 和 $F_{\mu\nu}$, 这是因为它们是相互作用场.

(至少在物质场满足场方程时) 使得方程(8.1.2)中的额外项没有效应. 物质作用量在变换(8.1.3)下的改变可以写成

$$\delta I_M = \int d^4x \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} \partial_\mu \epsilon(x). \quad (8.1.4)$$

因此, I_M 的Lorentz不变性要求

$$\partial_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 0. \quad (8.1.5)$$

如果 I_M 仅包含 $F_{\mu\nu}(x)$ 和它的导数, 以及物质场, 这是平庸正确的. 在这个情况下

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 2\partial_\nu \frac{\delta I_M}{\delta F_{\mu\nu}(x)}.$$

但如果 I_M 包含 $A_\mu(x)$ 本身, 那么方程(8.1.5)是理论上的一个不平庸约束.

现在, 哪一类理论将提供给我们能与场 $A^\mu(x)$ 耦合的守恒流? 我们在7.3节看到, 作用量的无限小内部对称性暗示着守恒流的存在. 特别地, 如果变换**

$$\delta \Psi^\ell(x) = i\epsilon(x) q_\ell \Psi^\ell(x) \quad (8.1.6)$$

对于常数的 ϵ 保持作用量不变, 那么对于一般的无限小函数 $\epsilon(x)$, 物质作用量的改变必须采取如下的形式

$$\delta I_M = - \int d^4x J^\mu(x) \partial_\mu \epsilon(x). \quad (8.1.7)$$

当物质场满足它们的场方程时, 物质作用量相对于 Ψ^ℓ 的任何变分都是稳定的, 所以在这一情况下, (8.1.7)必须为零, 因而

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (8.1.8)$$

特别地, 我们在7.3节看到, 如果 I_M 是 Ψ^ℓ 和 $\partial_\mu \Psi^\ell$ 的某个函数 \mathcal{L}_M 的积分, 那么守恒流给定为†

$$J^\mu = -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell)} q_\ell \Psi^\ell,$$

并且这生成了变换(8.1.6), 也就是说

$$[Q, \Psi^\ell(x)] = -q_\ell \Psi^\ell(x), \quad (8.1.9)$$

其中 Q 是时间独立荷算符

$$Q = \int d^3x J^0. \quad (8.1.10)$$

我们因而能通过耦合矢量场 A_μ 与守恒流 J^μ 来构建Lorentz-不变理论, 也就是说 $\delta I_M / \delta A_\mu(x)$ 被取成正比于 $J^\mu(x)$. 任何比例常数可以被吸收进荷 q_ℓ 的总尺度定义中, 所以我们可以简单地令这些量相等:

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = J^\mu(x). \quad (8.1.11)$$

**因为现在所取的场变换矩阵是对角的, 在这里对场指标的求和使用求和约定是不方便的, 所以在方程(8.1.6)中没有求和.

† Ψ^ℓ 在这里被理解成取遍除 A_μ 以外的所有独立场. 我们使用大写的 ψ 是为了表明它们是Heisenberg-绘景场, 其时间相关性包含相互作用的效应. 当然, 这一 Ψ^ℓ 不要与态矢或波函数相混淆.

电荷的守恒仅允许我们以它们任何一个值的形式确定所有荷的值, 通常取为电子荷, 记为 $-e$. 正是方程(8.1.11)给出了 e 值的明确含义.[‡]

要求(8.1.11)可以重述为一个不变性原理:^{1a} 物质作用量在如下联合变换下不变

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x), \quad (8.1.12)$$

$$\delta \Psi_\ell(x) = i\epsilon(x)q_\ell \Psi_\ell(x). \quad (8.1.13)$$

这类有着任意函数 $\epsilon(x)$ 的对称性被称为定域对称性, 或者第二类规范不变性. 而在 ϵ 为常数的变换下的对称性被称为整体对称性, 或者第一类规范对称性. 现在已经知道了几个精确的定域对称性, 但唯一的纯整体对称性表现为其它原理所迫使的偶然. (见12.5节.)

我们还没有讨论过光子本身的作用量. 作为一个猜测, 我们取其与有质量矢量场相同, 当 $m = 0$:

$$I_\gamma = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (8.1.14)$$

这与经典电动力学中所使用的作用量是相同的, 但是真正的理由是它是(差一个常数)唯一的 $F_{\mu\nu}$ 的二次型规范不变泛函, 而没有更高的导数. 另外, 正如我们在下一节所看到的, 它导出了一个相容的量子理论. 如果作用量中含有任何高阶导数项和/或 $F_{\mu\nu}$ 的高阶项, 它们可以被归入我们所谓的物质作用量. 利用方程(8.1.11)和(8.1.14), 电磁场的场方程现在变成

$$0 = \frac{\delta}{\delta A_\nu} [I_\gamma + I_M] = \partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu. \quad (8.1.15)$$

我们将它们视为通常的带有流 J^ν 的非齐次Maxwell方程. 还存在另一组齐次Maxwell方程

$$0 = \partial_\mu F_{\nu\epsilon} + \partial_\epsilon F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\epsilon\mu}, \quad (8.1.16)$$

其可以从定义 $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 直接导出.

在之上的讨论中, 我们从无质量自旋1粒子的存在出发, 然后推断出了物质作用量在定域变换(8.1.12), (8.1.13)下的不变. 像往常呈现的那样, 推导可以采取相反的方向. 即, 从一个整体内部对称性出发

$$\delta \Psi^\ell(x) = i\epsilon q_\ell \Psi^\ell(x) \quad (8.1.17)$$

然后寻求为了将其提升为一个定域对称性必必须要做什么

$$\delta \Psi^\ell(x) = i\epsilon(x)q_\ell \Psi^\ell(x). \quad (8.1.18)$$

如果拉格朗日量密度 \mathcal{L} 仅依赖于场 $\Psi^\ell(x)$ 而不依赖于它们的导数, 那么 ϵ 是否是一个常数无关紧要; ϵ 为常数的不变性将暗示着 ϵ 为时空位置的函数的不变性. 但是所有真实的拉格朗日量确实包含场导数, 并且在这里我们有一个问题, 场导数的变换与场本身不同:

$$\delta \partial_\mu \Psi^\ell(x) = i\epsilon(x)q_\ell \partial_\mu \Psi^\ell(x) + iq_\ell \Psi^\ell(x) \partial_\mu \epsilon(x). \quad (8.1.19)$$

为了抵消这里的第二项, 我们“发明”了一个矢量场 $A_\mu(x)$, 其变换规则是

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x) \quad (8.1.20)$$

[‡]当然, 仅在我们定义了如何归一化 $A_\mu(x)$ 后, 方程(8.1.11)确定了 e 的定义. 电磁场归一化的问题在10.4节研究.

并要求拉格朗日量密度对 $\partial_\mu \Psi^\ell$ 和 A_μ 的依赖性仅为如下的组合

$$D_\mu \Psi^\ell \equiv \partial_\mu \Psi^\ell - iq_\ell A_\mu \Psi^\ell, \quad (8.1.21)$$

它的变换类似 Ψ^ℓ

$$\delta D_\mu \Psi^\ell(x) = i\epsilon(x)q_\ell D_\mu \Psi^\ell(x). \quad (8.1.22)$$

一个由 Ψ^ℓ 和 $D_\mu \Psi^\ell$ 构建的物质拉格朗日量密度 $\mathcal{L}_M(\Psi, D\Psi)$ 如果在 ϵ 为常数的变换(8.1.18), (8.1.20)下不变, 那么对于任意函数 $\epsilon(x)$ 这也是不变的. 对于这类形式的拉格朗日量, 我们有

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\mu \Psi^\ell} (-iq_\ell \Psi^\ell) = -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \Psi^\ell} q_\ell \Psi^\ell,$$

这与方程(8.1.11)是相同的. (我们也能在 \mathcal{L}_M 引入 $F_{\mu\nu}$ 和它的导数.) 从这个观点来看, 由 A_μ 所描述的粒子的无质量性是规范不变性的结果而不是一个假定: 拉格朗日量密度中的项 $-\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ 将违反规范对称性.

8.2 约束与规范条件

电动力学的几个性质妨碍了我们像上一章中对有质量粒子的各种理论做的那样量子化这个理论. 像往常一样, 我们可以定义电磁矢势的正则共轭为

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)}. \quad (8.2.1)$$

通常的量子化规则将给出

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

但是在这里这是不可能的, 因为 A_μ 和 Π^ν 服从于几个约束.

第一个约束缘于拉格朗日量密度独立于 A_0 的时间导数, 因而

$$\Pi^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.2.2)$$

这称为初级约束, 这是因为它是从拉格朗日量的结构中得出的. 这里也有次级约束, 其源于由初级约束固定的量的场方程:**

$$\partial_i \Pi^i = -\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = -J^0, \quad (8.2.3)$$

由于 $F_{00} = 0$, 扔掉了时间导数项. 即使物质作用量一般会依赖于 A^0 , 电荷密度仅依赖于正则物质场 $^\dagger Q^n$ 和它们正则共轭 P_n :

$$J^0 = -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Psi^\ell)} q_\ell \Psi^\ell = -i \sum_n P_n q_n Q^n. \quad (8.2.4)$$

*对于 $\mathcal{L}_\gamma = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$, 我们有 $\partial \mathcal{L}_\gamma / \partial (\partial_0 A_\mu) = -F^{0\mu}$, 由于 $F^{\mu\nu}$ 是反对称的, 其对于 $\mu = 0$ 为零. 对于仅包含 Ψ^ℓ 和 $D_\mu \Psi^\ell$ 的物质拉格朗日量 \mathcal{L}_M , 处理(8.1.21)告诉我们 \mathcal{L}_M 不依赖于任何 A^ν 的导数. 即使物质作用量也依赖于 $F_{\mu\nu}M$, $\partial \mathcal{L}_M / \partial (\partial_\nu A_\mu)$ 也将是对于 μ 和 ν 反对称的, 因而对于 $\mu = \nu = 0$, 其为零.

**像往常一样, i, j 等取遍值1,2,3.

[†]由于字母源用完了, 我在这里不得不采用一个与上一章不同的记法. 符号 Q^n 和 P_n 分别留作正则物质场以及它们正则共轭, 而正则电磁场和正则共轭是 A_i 和 Π_i .

因此方程(8.2.3)是正则变量之间的泛函关系. 方程(8.2.2)和(8.2.3)均与通常假定 $[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 和 $[Q^n(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = [P_n(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = 0$ 不一致.

在有质量矢量场论中, 我们遇到了类似的问题. 在那个情况下, 我们发现了处理它的两个等价方式: 要么通过Dirac括号的方法, 要么更直接些, 仅把 A_i 和 Π^i 处理为正则变量, 解出类似(8.2.3)的方程, 以这些变量的形式计算 A^0 . 显然在这里我们不能使用Dirac括号; 约束函数 χ 在这里是 Π^0 和 $\partial_i \Pi_i + J^0$ (与 $\partial_i \Pi_i - m^2 A^0 + J^0$ 相比)以及那些显然有归零Poisson括号的量. 在Dirac的术语中, 约束(8.2.2)和(8.2.3)是第一类. 我们无法通过以其它变量解出 A^0 进而将其作为动力学变量消除它. 我们转而给出所有时刻的 A^0 , 方程(8.2.3)仅是个初始条件; 如果方程(8.2.3)在某个时刻成立, 那么它对于所有时刻都成立, 这是因为(利用其它场 A^i 的场方程), 我们有

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} - J^0 \right] &= -\partial_i \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} - \partial_0 J^0 \\ &= +\partial_i \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{ji}} - \partial_i J_i - \partial_0 J^0 \end{aligned}$$

那么流守恒条件给出

$$\partial_0 \left[\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} - J^0 \right] = 0. \quad (8.2.5)$$

不应该惊奇的是, 在仅有三个场方程的情况下, 我们仍有 A^μ 的4个分量, 这是因为这个理论有一定域对称性使得它, 原则上, 不可能从场在某一时刻的值或变化率推断出它们在任意时刻的值. 给定场方程的任意解 $A_\mu(\mathbf{x}, t)$, 我们总能找到另一解 $A_\mu(\mathbf{x}, t) + \partial_\mu \epsilon(\mathbf{x}, t)$, 其在 $t = 0$ 时有相同的值和时间导数(通过选择 ϵ , 使得它的一阶导数和二阶导数在那时为零), 但在后来的时刻, 其与 $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ 不同.

由于 $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ 这个独特的任意性, 对 A_μ (或者, 对于有限质量, 对 \mathbf{A})直接应用正则量子化步骤是不可能的. 解决这一困难的几个方法中, 有两个是特别有用的. 一个是现代的Lorentz不变的BRST-量子化方法, 将在卷II讨论. 另一个, 将在这里说明, 是开拓理论的规范不变性, 取“选择一个规范”. 即, 我们做一个有限的规范变换

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x), \quad \Psi_\ell(x) \rightarrow \exp(iq_\ell \lambda(x)) \Psi_\ell(x)$$

以在 $A_\mu(x)$ 上强加一个条件, 这将允许我们使用正则量子化的方法. 如下是几个在不同的应用中发现有用的规范:[‡]

Lorentz(或Landau)规范:	$\partial_\mu A^\mu = 0$
Coulomb规范:	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
时性规范:	$A^0 = 0$
轴向规范:	$A^3 = 0$
么正规范:	Φ 为实

正则量子化步骤在轴向规范或Coulomb规范下最易处理, 但是Coulomb规范显然保留着旋转不变性而轴向规范没有, 所以我们在这里采取Coulomb规范.²

为了验证这是可能的, 注意到如果 A^μ 不满足Coulomb规范条件, 那么假定我们选择 λ 使得 $\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}$, 规范变换场 $A^\mu + \partial^\mu \lambda$ 就会满足这个条件. 从现在起, 我们假定已经做了这个变换, 使得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (8.2.6)$$

[‡]这里的 Φ 是任何 $q \neq 0$ 的复标量场; 当规范对称性被 Φ 的非零真空期望值自发破缺掉后, 使用这个规范条件.

从现在起, 将我们自身限制在物质拉格朗日量 \mathcal{L}_M 可以依赖物质场, 物质场的时间导数以及 A^μ , 但不依赖于 A^μ 的导数的理论中将是方便的. (标量场和Dirac场电动力学的标准理论有这种类型的拉格朗日量.) 那么拉格朗日量中唯一依赖 $F_{\mu\nu}$ 的项是动能项 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, 并且约束方程(8.2.3)变成

$$-\partial_i F^{i0} = J^0. \quad (8.2.7)$$

与Coulomb规范条件(8.2.6)一起, 这给出

$$-\nabla^2 A^0 = J^0, \quad (8.2.8)$$

其可以被解, 给出

$$A^0(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \frac{J^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (8.2.9)$$

剩余自由度是 A^i , 其中 $i = 1, 2, 3$, 服从规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

正如之前所提到的, 电荷密度仅依赖正则物质场 Q^n 与它们的正则共轭 P_n , 所以方程(8.2.9)表示了辅助场 A^0 的一个显式解.

8.3 Coulomb规范中的量子化

电动力学在Coulomb规范的正则量子化仍然存在一个障碍. 即使在我们用方程(8.2.9)从正则变量的名单中消除 A^0 (和 Π_0)后, 我们仍无法对 A^i 和 Π_i 应用通常的正则对易关系, 这是因为在这些变量上还存在两个约束.* 其中一个Coulomb规范条件

$$\chi_{1\mathbf{x}} \equiv \partial_i A^i(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.3.1)$$

另一个是次级约束方程(8.2.3), 其要求

$$\chi_{2\mathbf{x}} \equiv \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + J^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.3.2)$$

这两个约束均不与通常的对易关系 $[A_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 相容, 这是因为无论是 $\partial/\partial x^i$ 还是 $\partial/\partial y^i$ 作用在右边并不给出零.

这些约束属于称为第二类的约束, 对于这样的约束, 存在对易关系的一个通用处理, 在7.6节讨论过. 注意约束函数有Poisson括号

$$\begin{aligned} C_{1\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} &= -C_{2\mathbf{y}, 1\mathbf{x}} \equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_{\text{P}} = -\nabla^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ C_{1\mathbf{x}, 1\mathbf{y}} &\equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{1\mathbf{y}}]_{\text{P}} = 0, \\ C_{2\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} &\equiv [\chi_{2\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_{\text{P}} = 0, \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

其中, 在这里, 对于任意函数 U 和 V ,

$$[U, V]_{\text{P}} \equiv \int d^3x \left[\frac{\delta U}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta V}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta V}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta U}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} \right].$$

*在本节, i, j 等取遍值1, 2, 3. 我们延续取所有算符于同一时刻的惯例, 并省略时间变量.

“矩阵” C_{NM} 是非奇异的, 将它们与第二类约束等同起来. 另外, 场变量 A^i 可以被表示成独立正则变量的形式, 例如, 其可以取为 $Q_{1\mathbf{x}} = A^1(\mathbf{x})$, $Q_{2\mathbf{x}} = A^2(\mathbf{x})$, 而 A^3 由方程(8.3.1)的解给定:

$$A^3(x) = - \int^{x^3} ds [\partial_1 A^1(x^1, x^2, s) + \partial_2 A^2(x^1, x^2, s)].$$

利用方程(8.3.2), A^i 的正则共轭 Π_i 同样可以被表示成 $Q_{1\mathbf{x}}$ 和 $Q_{2\mathbf{x}}$ 的正则共轭 $P_{1\mathbf{x}}$ 和 $P_{2\mathbf{x}}$ 的形式. 在这样的情况下, 上一章附录的Part B告诉我们, 如果独立变量 $Q_{1\mathbf{x}}$, $Q_{2\mathbf{x}}$, $P_{1\mathbf{x}}$ 和 $P_{2\mathbf{x}}$ 满足通常的对易关系, 那么约束变量与它们正则共轭的对易子由相对应的Dirac括号(7.6.20)(除了一个因子 i)给定. 这一处理有着我们无须以独立变量显式地表示非独立变量的巨大优点.

为了计算Dirac括号, 我们注意到矩阵 C 有逆

$$\begin{aligned} (C^{-1})_{1\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} &= -(C^{-1})_{2\mathbf{y}, 1\mathbf{x}} = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} = - \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \\ (C^{-1})_{1\mathbf{x}, 1\mathbf{y}} &= (C^{-1})_{2\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} = 0. \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

另外, A^i 和 Π_i 与约束函数的非零Poisson括号是

$$[A^i(\mathbf{x}), \chi_{2\mathbf{y}}]_{\text{P}} = - \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

以及

$$[\Pi_i(x), \chi_{1\mathbf{y}}]_{\text{P}} = + \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

因此, 根据方程(7.6.19)与(7.6.20), 等时对易子是

$$\begin{aligned} [A^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] &= i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right), \\ [A^i(\mathbf{x}), A^j(\mathbf{y})] &= [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

注意到这些是与Coulomb规范条件(8.3.1)和(8.3.2)是相容的, 这也是Dirac括号的普遍性质所保证的.

现在的问题是, Π 在电动力学中是什么呢? 对于上节所讨论的那类理论, 其中拉格朗日量中只有动能项 $-\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 依赖于 $\dot{\mathbf{A}}$, 不考虑约束 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 而对拉格朗日量做相对 $\dot{\mathbf{A}}$ 的变分给出

$$\Pi_j = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^j(\mathbf{x})} = \dot{A}^j(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^j} A^0(\mathbf{x}). \quad (8.3.6)$$

但是 \mathbf{A} 被条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 所约束, 对 $\dot{\mathbf{A}}$ 的变分导数不是真的被良好定义. 如果在 $\dot{\mathbf{A}}$ 的变分 $\delta \dot{\mathbf{A}}$ 下, L 的变分是 $\delta L = \int d^3x \mathcal{P} \cdot \delta \dot{\mathbf{A}}$, 那么由于 $\nabla \cdot \delta \dot{\mathbf{A}} = 0$, 对于任意的标量函数 $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ 我们又有 $\delta L = \int d^3x [\mathcal{P} + \nabla \mathcal{F}] \cdot \delta \dot{\mathbf{A}}$. 因此从拉格朗日量的审视中所有我们能得到的是 Π 等于 $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \nabla A^0(\mathbf{x})$ 加上某个标量的梯度. 这种任意性被条件(8.3.2)移除, 其要求 $\nabla \cdot \Pi = -J^0 = \nabla^2 A^0$. 由于 $\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = 0$, 我们得出结论, 方程(8.3.6)确实给出 Π^i 的正确公式.

尽管对易关系(8.3.5)是相当简单的, 我们必须面对 Π 与物质场以及它们正则共轭不对易的

困难. 如果 F 是这些物质自由度的泛函, 那么它与 \mathbf{A} 的Dirac括号为零, 但它与 $\mathbf{\Pi}$ 的Dirac括号是

$$\begin{aligned} [F, \mathbf{\Pi}(\mathbf{z})]_{\text{D}} &= - \int d^3x d^3y [F, \chi_{2\mathbf{x}}]_{\text{P}} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} [\chi_{1\mathbf{y}}, \mathbf{\Pi}(\mathbf{z})]_{\text{P}} \\ &= - \int d^3x d^3y [F, J^0(\mathbf{x})]_{\text{P}} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &= - \int d^3y [F, A^0(\mathbf{y})]_{\text{P}} \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &= [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_{\text{P}} = [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_{\text{D}} . \end{aligned}$$

为了帮助过渡到相互作用绘景, 取代将哈密顿量表示成 \mathbf{A} 和 $\mathbf{\Pi}$ 的形式, 我们将它写成 \mathbf{A} 和 $\mathbf{\Pi}_{\perp}$ 的形式, 其中 $\mathbf{\Pi}_{\perp}$ 是 $\mathbf{\Pi}$ 的无散部分:

$$\mathbf{\Pi}_{\perp} \equiv \mathbf{\Pi} - \nabla A^0 = \dot{\mathbf{A}} , \quad (8.3.7)$$

对此 $[F, \mathbf{\Pi}_{\perp}(\mathbf{z})]$ 为零. 通过使用 $\mathbf{\Pi}_{\perp}(\mathbf{x})$ 与 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Pi}_{\perp}(\mathbf{y}) = \nabla A^0(\mathbf{y})$ 对易以及 $\partial_i A^0(\mathbf{x})$ 与 $\partial_j A^0(\mathbf{y})$ 对易的性质, 容易看到 $\mathbf{\Pi}_{\perp}(\mathbf{x})$ 满足与 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$ 相同的对易关系(8.3.5), 以及简单约束

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_{\perp} = 0 . \quad (8.3.8)$$

现在我们需要构建一个哈密顿量. 根据第7章附录的普遍结果, 我们可以利用约束变量 A 和 $\mathbf{\Pi}_{\perp}$, 而不用显式地以非约束的 Q 和 P 写出哈密顿量, 来使用哈密顿量和拉格朗日量之间的通常关系. 在电动力学中, 这给出

$$H = \int d^3x \left[\mathbf{\Pi}_{\perp i} \dot{A}^i + P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L} \right] , \quad (8.3.9)$$

其中, 正如之前所提到的, Q^n 和 P_n 被理解成物质场和它们的共轭. (由于 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 我们可以在方程(8.3.9)中用 $\mathbf{\Pi}_{\perp}$ 取代 $\mathbf{\Pi}$.)

具体些, 考察一个理论, 其拉格朗日量密度如下

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_{\mu} A^{\mu} + \mathcal{L}_{\text{matter}} , \quad (8.3.10)$$

其中 J_{μ} 是不包含 A^{μ} 的流, 而任何出现在 J^{μ} 中的其它场, 去掉它们的由方程(8.3.10)中 $J_{\mu} A^{\mu}$ 显式表达的电磁相互作用后, $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ 是它们的拉格朗日量. (自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的电动力学有这种形式的拉格朗日量, 但是无质量粒子的电动力学更加复杂.) 将所有的 $\dot{\mathbf{A}}$ 替换成 $\mathbf{\Pi}_{\perp}$, 这给出了哈密顿量(8.3.9)的如下形式

$$H = \int d^3x \left[\mathbf{\Pi}_{\perp}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}_{\perp} + \nabla A^0)^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + J^0 A^0 \right] + H_{\text{M}} ,$$

其中 H_{M} 是物质场在去掉它们的电磁相互作用后的哈密顿量,

$$H_{\text{M}} \equiv \int d^3x (P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L}_{\text{matter}}) .$$

利用 A^0 的解(8.2.9), 这是

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_{\perp}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{2} J^0 A^0 \right] + H_{\text{M}} . \quad (8.3.11)$$

项 $\frac{1}{2}J^0 A^0$ 可能看起来奇怪,但其只不过是熟悉的Coulomb能

$$\begin{aligned} V_{\text{Coul}} &= \frac{1}{2} \int d^3x J^0 A^0 \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{J^0(\mathbf{x})J^0(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

利用对易关系(8.3.5),读者可以证明, \mathbf{A} 和 $\boldsymbol{\Pi}$ 的任意算符函数 F 的变化率,理所应当,由 $i\dot{F} = [F, H]$ 给出.

8.4 相互作用绘景中的电动力学

我们现在将哈密顿量(8.3.11)分成自由粒子项 H_0 和相互作用 V

$$H = H_0 + V, \quad (8.4.1)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})^2 \right] + H_{\text{matter},0}, \quad (8.4.2)$$

$$V = - \int d^3x \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + V_{\text{Coul}} + V_{\text{matter}}, \quad (8.4.3)$$

其中 $H_{\text{matter},0}$ 和 V_{matter} 分别是 H_{matter} 中的自由粒子项和相互作用项,而 V_{Coul} 是Coulomb相互作用(8.3.12).总哈密顿量(8.4.1)是时间无关的,所以方程(8.4.2)和(8.4.3)可以在任何我们想要的时刻计算(只要它们在同一时刻计算),尤其是 $t=0$.正如第7章那样,过渡到相互作用绘景是经由相似变换

$$\begin{aligned} V(t) &= \exp(iH_0 t) V[\mathbf{A}, \boldsymbol{\Pi}_\perp, Q, P]_{t=0} \exp(-iH_0 t) \\ &= V[\mathbf{a}(t), \boldsymbol{\pi}(t), q(t), p(t)], \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

其中 P 在这里代表物质场 Q 的正则共轭,而相互作用绘景中的任意算符 $o(\mathbf{x}, t)$ 与其在Heisenberg绘景中 $t=0$ 时的算符 $O(\mathbf{x}, 0)$ 的关系为

$$o(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0 t) O(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (8.4.5)$$

使得

$$i\dot{o}(\mathbf{x}, t) = [o(\mathbf{x}, t), H_0]. \quad (8.4.6)$$

(我们扔掉了 $\boldsymbol{\pi}(x)$ 的下标 \perp .)既然方程(8.4.5)是相似变换,等时对易关系与Heisenberg绘景中的对易关系是相同的:

$$\left[a^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t) \right] = i \left[\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right], \quad (8.4.7)$$

$$\left[a^i(\mathbf{x}, t), a^j(\mathbf{y}, t) \right] = 0, \quad (8.4.8)$$

$$\left[\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t) \right] = 0, \quad (8.4.9)$$

对于物质场以及它们的共轭同样如此.由于相同的原因,约束(8.2.6)和(8.3.8)仍然适用

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (8.4.10)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\pi} = 0. \quad (8.4.11)$$

为了构建 $\boldsymbol{\pi}$ 与 $\dot{\mathbf{a}}$ 之间的关系, 我们必须使用方程(8.4.6)计算 $\dot{\mathbf{a}}$:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_i(\mathbf{x}, t) &= [a_i(\mathbf{x}, t), H_0] \\ &= i \int d^3y \left[\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] \pi_j(\mathbf{y}, t) . \end{aligned}$$

我们可以将第二项中的 $\partial/\partial x^j$ 替换为 $-\partial/\partial y^j$, 分布积分, 并利用方程(8.4.11), 得到

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\pi} \quad (8.4.12)$$

正如Heisenberg绘景中那样. 场方程同样给定为

$$\begin{aligned} i\dot{\pi}_i(\mathbf{x}, t) &= [\pi_j(\mathbf{x}, t), H_0] \\ &= -i \int d^3y \left[\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] \\ &\quad \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{y}, t))_j , \end{aligned}$$

其(利用方程(8.4.10)和(8.4.12))恰好产生通常的波动方程

$$\square \mathbf{a} = 0 . \quad (8.4.13)$$

既然 A^0 不是独立的Heisenberg绘景场变量, 而是物质场和它们正则共轭的一个泛函(8.2.9), 这个泛函在零电荷极限下为零, 在相互作用绘景中我们不引入任何相对应的算符 a^0 , 而是取

$$a^0 = 0 . \quad (8.4.14)$$

方程(8.4.10), (8.4.13)和(8.4.14)最普遍的实解可以写成

$$a^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \sum_{\sigma} \left[e^{ip \cdot x} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + e^{-ip \cdot x} e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) \right] , \quad (8.4.15)$$

其中 $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$; $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ 是任意两个独立的“偏振矢量”, 满足

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{p}, \sigma) = 0 , \quad (8.4.16)$$

$$e^0(\mathbf{p}, \sigma) = 0 , \quad (8.4.17)$$

而 $a(\mathbf{p}, \sigma)$ 是一对算符系数, 其中 σ 是二值指标. 通过调整 $a(\mathbf{p}, \sigma)$ 的归一化, 我们可以对 $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ 归一化, 使得完备关系变成

$$\sum_{\sigma} e^i(\mathbf{p}, \sigma) e^j(\mathbf{p}, \sigma)^* = \delta_{ij} - p_i p_j / |\mathbf{p}|^2 . \quad (8.4.18)$$

例如, 我们可以取 $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ 为我们在5.9节所遇到的偏振矢量:

$$e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (8.4.19)$$

其中 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 是将3-轴转到 \mathbf{p} 方向的标准旋转. 利用方程(8.4.18)和(8.4.12), 我们可以轻松地看到, 当(且实际上仅当)方程(8.4.15)中的算符系数满足

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (8.4.20)$$

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma')] = 0, \quad (8.4.21)$$

对易关系(8.4.7)–(8.4.9)才会被满足. 正如之前对于有质量粒子所提及的, 这个结果预期认为是方程(8.4.20)和(8.4.21)的另一推导, 不如认为是方程(8.4.2)给出了螺度 ± 1 无质量粒子的正确哈密顿量的一个证明. 本着同样的精神, 也可在方程(8.4.2)中使用方程(8.4.12)和(8.4.15)以计算自由光子哈密顿量

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3p \sum_{\sigma} \frac{1}{2} p^0 [a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)]_+ \\ &= \int d^3p \sum_{\sigma} p^0 \left(a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}) \right) \end{aligned} \quad (8.4.22)$$

其(除了一个不重要的无限大c-数项外)正是我们所预期的.

最后, 我们标明, 相互作用绘景中的相互作用(8.4.4)是

$$V(t) = - \int d^3x j_{\mu}(\mathbf{x}, t) a^{\mu}(\mathbf{x}, t) + V_{\text{Coul}}(t) + V_{\text{matter}}(t), \quad (8.4.23)$$

其中, 以Heisenberg绘景中流 J 的形式

$$j_{\mu}(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iH_0 t) J_{\mu}(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (8.4.24)$$

而 $V_{\text{Coul}}(t)$ 是Coulomb项

$$\begin{aligned} V_{\text{Coul}}(t) &= \exp(iH_0 t) V_{\text{Coul}} \exp(-iH_0 t) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{j^0(\mathbf{x}, t) j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \end{aligned}$$

而 $V_{\text{matter}}(t)$ 是相互作用绘景中物质场相互作用的非电磁部分:

$$V_{\text{matter}}(t) = \exp(iH_0 t) V_{\text{matter}} \exp(-iH_0 t). \quad (8.4.25)$$

在方程(8.4.23)中我们写成 $j_{\mu} a^{\mu}$ 而不是 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}$, 但由于 a^{μ} 已经被定义为 $a^0 = 0$, 所以它们是等价的.

8.5 光子传播子

第6章所描述的普遍Feynman规则陈述了, Feynman图中的一个内光子线给 S -矩阵中相对应的项贡献一个因子, 由传播子给定:

$$-i\Delta_{\mu\nu}(x - y) \equiv (\Phi_{\text{VAC}}, T\{a_{\mu}(x), a_{\nu}(y)\} \Phi_{\text{VAC}}), \quad (8.5.1)$$

其中 T 像往常一样代表编时乘积. 代入我们的电磁势公式(8.4.15)则给出

$$-i\Delta_{\mu\nu}(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2 2|\mathbf{p}|} P_{\mu\nu}(\mathbf{p}) \left[e^{ip \cdot (x-y)} \theta(x - y) + e^{ip \cdot (y-x)} \theta(y - x) \right], \quad (8.5.2)$$

其中

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma=\pm 1} e_{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) e_{\nu}(\mathbf{p}, \sigma)^* \quad (8.5.3)$$

并且, 指数中的 p^{μ} 取为 $p^0 = |\mathbf{p}|$. 我们从方程(8.4.18)和(8.4.17)记起

$$\begin{aligned} P_{ij}(\mathbf{p}) &= \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2}, \\ P_{0i}(\mathbf{p}) &= P_{i0}(\mathbf{p}) = P_{00}(\mathbf{p}) = 0. \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

正如我们在第6章所看到的, 方程(8.5.2)中的 θ -函数可以表示成对非质量壳上4-动量 q^{μ} 的独立时间变量 q^0 的积分, 使得方程(8.5.2)可以重写成

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon} e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (8.5.5)$$

因此, 在动量空间Feynman规则的使用中, 若一个内光子线携带4-动量 q , 且连接光子被场 a^{μ} 和 a^{ν} 创造和消灭的顶点, 其贡献是

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon}. \quad (8.5.6)$$

将方程(8.5.4)重写为

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \eta_{\mu\nu} + \frac{q^0 q_{\mu} n_{\nu} + q^0 q_{\nu} n_{\mu} - q_{\mu} q_{\nu} + q^2 n_{\mu} n_{\nu}}{|\mathbf{q}|^2} \quad (8.5.7)$$

将是非常有用的(尽管显然不合常理), 其中 $n^{\mu} \equiv (0, 0, 0, 1)$ 是固定的类时矢量, q^2 像往常一样为 $\mathbf{q}^2 - (q^0)^2$, 但 q^0 在这里是完全任意的. 我们将选择方程(8.5.7)中的 q^0 , 使其由4-动量守恒给定: 在光子线被创造的顶点, 它是流入和流出顶点的物质 p^0 的差. 那么正比于 q_{μ} 和/或 q_{ν} 的项不对 S -矩阵产生贡献, 这是因为因子 q_{μ} 和 q_{ν} 的作用类似导数 ∂_{μ} 和 ∂_{ν} , 而与光子场 a_{μ} 和 a_{ν} 耦合的流 j^{μ} 和 j^{ν} 满足守恒条件 $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$.^{*} 正比于 $n_{\mu} n_{\nu}$ 的项包含一个因子 q^2 , 其抵消了传播子分母中的 q^2 , 产生的项与作用量中

$$-i \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y [-ij^0(x)][-ij^0(y)] \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{|\mathbf{q}|^2} e^{iq \cdot (x-y)}$$

产生的项是相同的. 这里对 q^0 的积分产生时间的 δ -函数, 所以这是等价与对相互作用哈密顿量 $V(t)$ 的一个修正, 形式为

$$-\frac{1}{2} \int d^3 x \int d^3 y \frac{j^0(\mathbf{x}, t) j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

这恰好抵消了Coulomb相互作用(8.4.24). 我们的结果是, 光子传播子可以给有效地取成协变量

$$\Delta_{\mu\nu}^{\text{eff}}(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} e^{iq \cdot (x-y)} \quad (8.5.8)$$

其中Coulomb相互作用从现在起被扔掉了. 我们看到, 在暂时的Coulomb相互作用中Lorentz不变性的显然破坏被另一显然的Lorentz不变性破坏抵消了, 这正如5.9节所评述的, 场 $a^{\mu}(x)$ 不是4-矢,

^{*}这里所给出的讨论并不比草草了事强多少. 这一结果已经通过一个细致的Feynman图分析被证明了,³ 但是处理这一问题的最简单方法是路径积分方法, 将在9.6节讨论.

因而有一不协变的传播子. 从实用观点看, 重点是, 在动量空间的Feynman规则中, 内光子线的贡献简单地给定为

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \quad (8.5.9)$$

而Coulomb相互作用被扔掉了.

8.6 旋量电动力学的Feynman规则

我们现在将陈述量子电动力学中计算 S -矩阵的Feynman规则. 明确起见, 我们将考察电荷 $q = -e$ 且质量为 m 的单种自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的电动力学. 我们将称这些费米子为电子, 当同样的形式体系对 μ 子以及其它这样的粒子都是适用的. 这个理论最简单的规范不变且Lorentz-不变的拉格朗日量是*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\Psi} (\gamma^\mu [\partial_\mu + ieA_\mu] + m) \Psi . \quad (8.6.1)$$

那么电子流4-矢就是

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -ie \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi . \quad (8.6.2)$$

相互作用绘景中的相互作用(8.4.23)在这里是

$$V(t) = +ie \int d^3x (\bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}, t)) a_\mu(\mathbf{x}, t) + V_{\text{Coul}}(t) . \quad (8.6.3)$$

(这里没有 V_{matter} .) 正如我们所看到的, Coulomb项 $V_{\text{Coul}}(t)$ 仅帮助抵消光子传播子中非协变且在时间上定域的那部分.

跟随6.3节的普遍结果, 我们可以将该理论中 S -矩阵连接部分的动量空间规则表述如下:

(i) 画出所有顶点数目最多至某个给定数目的Feynman图. 这些图由带箭头的电子线和不带箭头的光子线构成, 这些线连接顶点, 而在每个顶点处有一个入电子线, 一个出电子线以及一个光子线. 对于初态和末态中的每个粒子, 分别有一个从下方进入图的外线和从上方离开图的外线; 电子由箭头指向上方流入或流出图的外线表示, 正电子由箭头指向下方流入或流出图的外线表示. 还有与顶点所需连接线数目相同的内线. 每个内线被一个指向明确沿着线流动的非质量壳4-动量标记(对于电子线习惯上将流动的方向取为箭头的方向.) 每个外线被初态和末态中的电子或光子的动量以及自旋 z -分量或螺度标记.

(ii) 对图的组分赋予如下因子:

顶点

对于每一顶点, 在箭头指向指向该顶点的电子线处标记一个4-分量的Dirac指标 α , 在箭头指离顶点的电子线处标记一个4-分量的Dirac指标 β , 而在光子线处标记时间指标 μ . 对于这样的顶点, 引入因子

$$(2\pi)^4 e(\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \delta^4(k - k' + q) , \quad (8.6.4)$$

其中 k 和 k' 是进入和离开顶点的电子4-动量, 而 q 是进入顶点的光子4-动量(或是减去离开顶点的光子动量).

*在第12章, 我们将讨论为什么更加复杂的项被排除在这个拉格朗日量密度之外的原因.

外线:

用初态和末态中粒子的3-动量 \mathbf{p} 和自旋 z -分量或螺旋度 σ 来标记每个外线. 对于对应末态中电子的每一条线, 若其离开的顶点且顶点携带Dirac指标 β , 引入因子**

$$\frac{\bar{u}_\beta(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.5)$$

对于对应末态中正电子的每一条线, 若其进入顶点且顶点携带Dirac指标 α , 引入因子

$$\frac{v_\alpha(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.6)$$

对于对应初态中电子的每一条线, 若其进入顶点且顶点携带Dirac指标 α , 引入因子

$$\frac{u_\alpha(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.7)$$

对于对应初态中正电子的每一条线, 若其离开顶点且顶点携带Dirac指标 β , 引入因子

$$\frac{\bar{v}_\beta(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.8)$$

u 和 v 是5.5节所讨论的4-分量旋量. 对于对应末态中光子且连接一个顶点的每一条线, 若顶点携带时空指标 μ , 引入因子

$$\frac{e_\mu^*(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}}. \quad (8.6.9)$$

对于对应初态中光子且连接一个顶点的每一条线, 若顶点携带时空指标 μ , 引入因子

$$\frac{e_\mu(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}}. \quad (8.6.10)$$

e_μ 是上一节所描述的光子偏振4-矢.

内线:

对于每一携带4-动量 k 的内电子线, 若其离开的顶点携带Dirac指标 β 而其进入的顶点携带Dirac指标 α , 引入因子

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{[-i\not{k} + m]_{\alpha\beta}}{k^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (8.6.11)$$

(我们在这里使用了非常方便的“Dirac斜横”记号; 对于4-矢 v^μ , \not{v} 代表 $\gamma_\mu v^\mu$.) 对于每一携带4-动量 q 的内光子线, 若其连接的顶点携带时空指标 μ 和 ν , 引入因子

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon}. \quad (8.6.12)$$

(iii) 将所有这些因子乘起来, 对内线所携带的动量积分并对所有的Dirac指标和时空指标求和.

(iv) 将以这种方法从每一Feynman图获得的结果加起来.

以及, 正如6.1节所描述的, 可能要引入额外的组合学因子以及费米符号.

**矩阵 β 已经从(8.6.4)中的相互作用中抽取出来了, 使得出现的是 \bar{u} 和 \bar{v} 而不是 u^\dagger 和 v^\dagger .

计算Feynman图的难度随着内线和顶点数目的增多而急剧上升, 所以重要的是要对什么数值因子趋于抑止更复杂图的贡献有所理解. 我们将估计说这些数值因子, 其不仅包含与顶点相联系的电荷因子 e , 还包含来自顶点, 传播子以及动量空间积分的因子 2 和 π .

考察一个有 V 个顶点, I 条内线, E 条外线和 L 个圈的连接Feynman图. 这些量不是独立的, 而是服从于已在6.3节用过的关系:

$$L = I - V + 1, \quad 2I + E = 3V.$$

每个顶点会有一个因子 $e(2\pi)^4$, 每个内线会有一个因子 $(2\pi)^{-4}$, 而每个圈会有一个动量空间积分. 4-维欧几里得空间中的体积元以半径参量 κ 的形式是 $\pi^2 \kappa^2 d\kappa^2$, 所以每个圈贡献一个因子 π^2 . 因此这个图将包含一个因子

$$(2\pi)^{4V} e^V (2\pi)^{-4I} \pi^{2L} = (2\pi)^4 e^{E-2} \left(\frac{e^2}{16\pi^2} \right)^L.$$

对于一个给定过程, 外线的数目 E 是固定的, 所以我们看到对于每个额外圈抑制Feynman图的展开参量是

$$\frac{e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha}{4\pi} = 5.81 \times 10^{-4}.$$

幸运的是, 这足够小使得通常最多几个圈的Feynman图就能获得很好的精确度.

* * *

关于光子和电子的自旋态我们必须再多讨论一些, 在真实的实验中, 初态和末态中并不是每个粒子都有明确的螺度或自旋 z -分量. 这个考虑对于光子是尤其重要的, 实际上通常被横向偏振态或椭圆偏振态而不是螺度所表征. 正如我们在上一节所看到的, 对于螺度 ± 1 的光子, 偏振矢量是

$$e(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 是令 z -方向转为 \mathbf{p} 方向的标准旋转. 它们不是唯一可能的光子态; 一般而言, 一个光子态可以是螺度态 $\Psi_{\mathbf{p}, \pm 1}$ 的线性组合

$$\alpha_+ \Psi_{\mathbf{p}, +1} + \alpha_- \Psi_{\mathbf{p}, -1} \quad (8.6.13)$$

如果

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1, \quad (8.6.14)$$

其被恰当地归一化. 为了计算吸收或发射这样一个光子的 S -矩阵元, 我们简单地将Feynman规则中的 $e_\mu(\mathbf{p}, \pm 1)$ 替换为

$$e_\mu(\mathbf{p}) = \alpha_+ e_\mu(\mathbf{p}, +1) + \alpha_- e_\mu(\mathbf{p}, -1). \quad (8.6.15)$$

螺度明确的偏振矢量满足归一化矢量

$$e_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda') e^\mu(\mathbf{p}, \lambda) = \delta_{\lambda'\lambda} \quad (8.6.16)$$

并且, 因而一般而言

$$e_{\mu}^{*}(\mathbf{p}) e^{\mu}(\mathbf{p}) = 1. \quad (8.6.17)$$

有两种极端的情况, 一是 $\alpha_{-} = 0$ 或 $\alpha_{+} = 0$ 的圆偏振; 一是 $|\alpha_{+}| = |\alpha_{-}| = 1/\sqrt{2}$ 的线偏振. 对于线偏振, 通过对态(8.6.13)的总相位的调整, 我们可以使 α_{+} 和 α_{-} 复共轭, 使得它们可以表示成

$$\alpha_{\pm} = \exp(\mp i\phi) / \sqrt{2}. \quad (8.6.18)$$

那么在Feynman规则中, 我们应该使用偏振矢量

$$e_{\mu}(\mathbf{p}) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.6.19)$$

即, ϕ 是垂直于 \mathbf{p} 的平面中光子偏振的方位角. 注意到光子偏振矢量在这里是实的, 这仅对于线偏振是可能的. 在极端的圆偏振和线偏振之间的是椭圆偏振态, 对于椭圆偏振态, $|\alpha_{+}|$ 和 $|\alpha_{-}|$ 是非零且不相等的.

更普遍地, 初态光子可能是以自旋态的统计混合准备的. 在最普遍的情况下, 一个初态光子可能有任意个可能的偏振矢量 $e_{\mu}^{(r)}(\mathbf{p})$, 每个偏振矢量带几率 P_r . 那么在一个给定过程中吸收这样光子的速率将是如下形式

$$\Gamma = \sum_r P_r |e_{\mu}^{(r)}(\mathbf{p}) M^{\mu}|^2 = M^{\mu*} M^{\nu} \rho_{\nu\mu}, \quad (8.6.20)$$

其中 ρ 是密度矩阵

$$\rho_{\nu\mu} \equiv \sum_r P_r e_{\nu}^{(r)}(\mathbf{p}) e_{\mu}^{(r)*}(\mathbf{p}). \quad (8.6.21)$$

既然 ρ 显然是一个单位迹(由于 $\sum_r P_r = 1$)的厄密正定矩阵, 且其有 $\rho_{\nu 0} = \rho_{0\mu} = 0$ 以及 $\rho_{\nu\mu} p^{\nu} = \rho_{\nu\mu} p^{\mu} = 0$, 它可以被写为

$$\rho_{\nu\mu} = \sum_{s=1,2} \lambda_s e_{\nu}(\mathbf{p}; s) e_{\mu}^{*}(\mathbf{p}; s), \quad (8.6.22)$$

其中 $e_{\mu}(\mathbf{p}; s)$ 是 ρ 的两个正交本征矢且有

$$e_0(\mathbf{p}; s) = e_{\mu}(\mathbf{p}; s) p^{\mu} = 0 \quad (8.6.23)$$

而 λ_s 是相对应的本征值, 其有

$$\lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1,2} \lambda_s = 1.$$

那么我们可以将该光子吸收过程的速率写为

$$\Gamma = \sum_{s=1,2} \lambda_s |e_{\nu}(\mathbf{p}; s) M^{\nu}|^2.$$

因此任何初光子态的统计混合总是等价于仅有两个几率为 λ_s 的正交偏振 $e_{\nu}(\mathbf{p}; s)$.

特别地, 如果我们对初态光子偏振一无所知, 那么偏振矢量 $e_\nu(\mathbf{p}; s)$ 的两个几率 λ_s 相等, 使得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, 且密度矩阵(以及随之的吸收速率)是对初态偏振的平均

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{s=1,2} e_i(\mathbf{p}; s) e_j^*(\mathbf{p}; s) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) . \quad (8.6.24)$$

幸运的是, 这个结果不依赖于我们要平均的那对特定的偏振矢量 $e_i(\mathbf{p}; s)$; 对于非偏振光子, 我们可以对任意一对正交偏振矢量取吸收速率的平均. 类似地, 如果我们不尝试测量末态中光子的偏振, 那么速率可以通过对任意对正交末态光子偏振矢量求和计算出来.

同样的讨论适用于电子和正电子; 如果(通常是这样的情况)我们不尝试准备电子或正电子, 使得某些自旋态比其它自旋态更有可能, 那么速率要通过对任意两个正交自旋初态, 诸如那些自旋 z -分量 $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ 的态, 取平均计算出来; 如果我们不试图测量电子或正电子的自旋末态, 那么我们必须对速率的任意两个正交自旋末态求和, 例如那些自旋 z -分量 $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ 的态. 这样的和可以利用关系(5.5.37)和(5.5.38)计算:

$$\sum_{\sigma} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \left(\frac{-i \not{p} + m}{2p^0} \right)_{\alpha\beta} , \quad (8.6.25)$$

$$\sum_{\sigma} v_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{v}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \left(\frac{-i \not{p} - m}{2p^0} \right)_{\alpha\beta} , \quad (8.6.26)$$

其中 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. 例如, 如果初态包含一个动量为 \mathbf{p} 且自旋 z -分量为 σ 的电子, 和一个动量为 \mathbf{p}' 且自旋 z -分量为 σ' 的正电子, 那么该过程的 S -矩阵元将是 $(\bar{v}_{\alpha}(\mathbf{p}', \sigma') \mathcal{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma))$ 的形式. 因此, 如果电子自旋和正电子自旋都没有观测, 那么速率将正比于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{\sigma', \sigma} |(\bar{v}_{\alpha}(\mathbf{p}', \sigma') \mathcal{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma))|^2 \\ & = \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ \beta \mathcal{M}^{\dagger} \beta \left(\frac{-i \not{p}' - m}{2p'^0} \right) \mathcal{M} \left(\frac{-i \not{p} + m}{2p^0} \right) \right\} . \end{aligned}$$

本章附录将描述计算这种迹的技巧.

8.7 Compton 散射

作为该章所描述方法的一个粒子, 我们将在这里考察光子在电子(或其它自旋 $\frac{1}{2}$ 且电荷为 $-e$ 的粒子)上的散射, 至 e 的最低阶. 我们将初态和末态光子的动量和偏振矢量记为 k^{μ} , e^{μ} 和 k'^{μ} , e'^{μ} , 其中 $k^0 = |\mathbf{k}|$ 且 $k'^0 = |\mathbf{k}'|$. 另外, 初态和末态电子动量和自旋 z -分量被标记为 p^{μ} , σ 和 p'^{μ} , σ' , 其中 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 且 $p'^0 = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}$, m 是电子质量. 这样过程的最低阶 Feynman 图如图 8.1 所示.

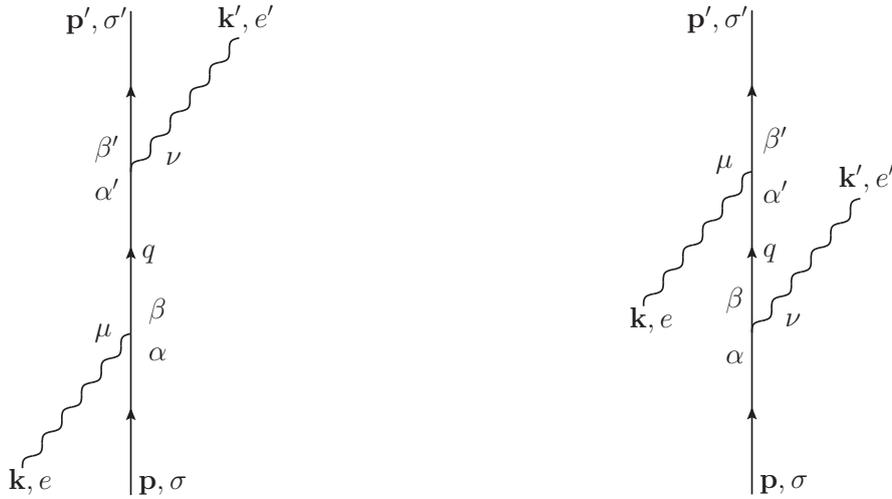


图 8.1 Compton散射的两个最低阶Feynman图. 直线是电子; 波浪线是光子.

利用上一节中所概述的规则, 相对应的 S -矩阵元是

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') = & \\
 & \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')_{\beta'}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e'_{\nu}{}^*}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k'^0}} \frac{u(\mathbf{p}, \sigma)_{\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e_{\mu}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} \\
 & \times \int d^4q \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right] \left[\frac{-i \not{q} + m}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right]_{\alpha'\beta} \\
 & \times \left\{ \left[e(2\pi)^4 \gamma_{\beta'\alpha'}^{\nu} \delta^4(q - p' - k') \right] \left[e(2\pi)^4 \gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \delta^4(q - p - k) \right] \right. \\
 & \left. + \left[e(2\pi)^4 \gamma_{\beta'\alpha'}^{\mu} \delta^4(q + k - p') \right] \left[e(2\pi)^4 \gamma_{\beta\alpha}^{\nu} \delta^4(q + k' - p) \right] \right\}. \quad (8.7.1)
 \end{aligned}$$

进行(平庸的) q -积分, 合并因子 i 和 2π , 并以矩阵记法重写这个结果, 我们有更简单的

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{-ie^2 \delta^4(p' + k' - p - k)}{(2\pi)^2 \sqrt{2k'^0} \cdot 2k^0} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[\not{\epsilon}'^* \left(\frac{-i(\not{p} + \not{k}) + m}{(p+k)^2 + m^2} \right) \not{\epsilon} \right. \\
 & \left. + \not{\epsilon} \left(\frac{-i(\not{p} - \not{k}') + m}{(p-k')^2 + m^2} \right) \not{\epsilon}'^* \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (8.7.2)
 \end{aligned}$$

(这里 $\not{\epsilon}'^*$ 意味着 $e_{\mu}^* \gamma^{\mu}$, 不是 $(\not{\epsilon})^*$. 另外, 由于这里分母不为零, 我们扔掉了 $-i\epsilon$.) 因为 $p^2 = -m^2$ 并且 $k^2 = k'^2 = 0$, 分母可以被简化成

$$(p+k)^2 + m^2 = 2p \cdot k, \quad (8.7.3)$$

$$(p-k')^2 + m^2 = -2p \cdot k'. \quad (8.7.4)$$

另外, “Feynman振幅” M 在方程(3.3.2)中被普遍定义, 其(由于某些散射被假定发生了)在这里变成

$$S = -2\pi i \delta^4(p' + k' - p - k) M, \quad (8.7.5)$$

所以

$$M = \frac{e^2}{4(2\pi)^3 \sqrt{k^0 k'^0}} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left\{ \not{\epsilon}'^* \left[-i(\not{p} + \not{k}) + m \right] \not{\epsilon} / p \cdot k - \not{\epsilon} \left[-i(\not{p} - \not{k}') + m \right] \not{\epsilon}'^* / p \cdot k' \right\} u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (8.7.6)$$

微分散射截面通过方程(3.4.15)以 M 的形式给出, 其在这里变成

$$d\sigma = (2\pi)^4 u^{-1} |M|^2 \delta^4(p' + k' - p - k) d^3 p' d^3 k'. \quad (8.7.7)$$

既然这里有一个粒子是无质量的, 初速度的方程(3.4.17)给出

$$u = |p \cdot k| / p^0 k^0. \quad (8.7.8)$$

为了更加一步, 采用特定的坐标系将是方便的. 既然原子中的电子非相对论运动, 高能(X射线或 γ 射线)光子-电子散射实验的实验坐标系通常是(尽管不总是这样)初态电子可以取为静止的坐标系. 我们将在这里采取这个坐标系, 使得

$$\mathbf{p} = 0, \quad p^0 = m. \quad (8.7.9)$$

那么速度(8.7.8)就是

$$u = 1. \quad (8.7.10)$$

为了节省空间, 我们把光子能量记为

$$\omega = k^0 = |\mathbf{k}| = -p \cdot k / m, \quad (8.7.11)$$

$$\omega' = k'^0 = |\mathbf{k}'| = -p \cdot k' / m. \quad (8.7.12)$$

方程(8.7.7)中的3-动量 δ -函数仅帮助消除了微分 $d^3 p'$, 使得 $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. 这留下了剩下的能量 δ -函数

$$\delta(p'^0 + k'^0 - p^0 - k^0) = \delta \left(\sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + m^2} + \omega' - m - \omega \right). \quad (8.7.13)$$

这确定 ω' 以满足

$$\sqrt{\omega^2 - 2\omega\omega' \cos \theta + \omega'^2 + m^2} = \omega + m - \omega',$$

其中 θ 是 \mathbf{k} 和 \mathbf{k}' 之间的角度. 对两边积分并抵消 ω'^2 项给出*

$$\omega' = \omega \frac{m}{m + \omega(1 - \cos \theta)} \equiv \omega_c(\theta). \quad (8.7.14)$$

*等价的, X射线在电子的散射中, 波长上有一个增长

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1 - \cos \theta}{m}.$$

这一公式的证明由A. H. Compton在1922-1923年完成, 其在证实Einstein1905年的光量子假说中起了关键作用, 在Compton实验不久之后, 光量子从此称为光子.

能量 δ -函数(8.7.13)可以写成

$$\begin{aligned}\delta(p^0 + k^0 - p^0 - k^0) &= \frac{\delta(\omega' - \omega_c(\theta))}{|\partial[\sqrt{\omega^2 - 2\omega\omega' \cos \theta + \omega'^2 + m^2 + \omega'}]/\partial\omega'|} \\ &= \frac{\delta(\omega' - \omega_c(\theta))}{|(\omega' - \omega \cos \theta)/p^0 + 1|} \\ &= \frac{p^0 \omega'}{m\omega} \delta(\omega' - \omega_c(\theta)).\end{aligned}\quad (8.7.15)$$

另外, 微分 d^3k' 可以写成

$$d^3k' = \omega'^2 d\omega' d\Omega, \quad (8.7.16)$$

其中 $d\Omega$ 是末态光子所散射的立体角. 方程(8.7.15)中的末态 δ -函数仅帮助抵消了方程(8.7.16)中的微分 $d\omega'$, 给我们留下了微分散射截面

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M|^2 \frac{p^0 \omega'^3}{m\omega} d\Omega \quad (8.7.17)$$

其中 $p^0 = m + \omega - \omega'$, 而 ω' 由方程(8.7.14)给定.

通常我们不测量初态电子和末态电子的自旋 z -分量. 在这种情况下, 我们必须对 σ' 求和并对 σ 平均, 或者换句话说, 取对 σ 和 σ' 的求和的一半:

$$d\bar{\sigma}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}' + \mathbf{k}', e') \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma', \sigma} d\sigma(\mathbf{p} + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}' + \mathbf{k}', e'). \quad (8.7.18)$$

为了计算这个, 我们使用标准公式

$$\sum_{\sigma} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{(-i\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{2p^0} \quad (8.7.19)$$

对 σ' 的求和同样如此. 由此得出对于一个任意的 4×4 矩阵 A

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma, \sigma'} |\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') A u(\mathbf{p}, \sigma)|^2 &= \sum_{\sigma, \sigma'} (\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') A u(\mathbf{p}, \sigma)) (\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) \beta A^{\dagger} \beta u(\mathbf{p}', \sigma')) \\ &= \sum_{\sigma, \sigma'} A_{\beta\alpha} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_{\gamma}(\mathbf{p}, \sigma) (\beta A^{\dagger} \beta)_{\gamma\delta} u_{\delta}(\mathbf{p}', \sigma') \bar{u}_{\beta}(\mathbf{p}', \sigma') \\ &= \text{Tr} \left\{ A \left(\frac{-i\not{p} + m}{2p^0} \right) \beta A^{\dagger} \beta \left(\frac{-i\not{p}' + m}{2p'^0} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (8.7.20)$$

回忆起 $\beta\gamma_{\mu}^{\dagger}\beta = -\gamma_{\mu}$, 方程(8.7.6)现在给出

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 &= \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \\ &\times \text{Tr} \left[\left\{ \not{\epsilon}'^* \frac{[-i(\not{p} + \not{k}) + m]}{p \cdot k} \not{\epsilon} - \not{\epsilon} \frac{[-i(\not{p} - \not{k}') + m]}{p \cdot k'} \not{\epsilon}'^* \right\} (-i\not{p} + m) \right. \\ &\left. \times \left\{ \not{\epsilon}^* \frac{[-i(\not{p} + \not{k}) + m]}{p \cdot k} \not{\epsilon}' - \not{\epsilon}' \frac{[-i(\not{p} - \not{k}') + m]}{p \cdot k'} \not{\epsilon}^* \right\} (-i\not{p}' + m) \right].\end{aligned}\quad (8.7.21)$$

再一次回忆起 $\not{\epsilon}^*$ 意味着 $e_\mu^* \gamma^\mu$, 而不是 $(e_\mu \gamma^\mu)^*$, 对 $\not{\epsilon}'^*$ 同样如此.) 我们在“规范”中处理, 其中

$$e \cdot p = e^* \cdot p = e' \cdot p = e'^* \cdot p = 0 \quad (8.7.22)$$

例如实验室坐标系中的Coulomb规范, 其中 $e^0 = e'^0 = 0$ 且 $\mathbf{p} = 0$. 这暗示着

$$\begin{aligned} [-i\not{p} + m] \not{\epsilon} [-i\not{p} + m] &= \not{\epsilon} [i\not{p} + m] [-i\not{p} + m] \\ &= \not{\epsilon} [\not{p}^2 + m^2] = \not{\epsilon} (p_\mu p^\mu + m^2) = 0 \end{aligned}$$

对 $\not{\epsilon}'^*$, $\not{\epsilon}'$ 和 $\not{\epsilon}^*$ 同样如此. 因而方程(8.7.21)可以写成如下非常简化的形式

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 &= \frac{-e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \text{Tr} \left[\left\{ \frac{\not{\epsilon}'^* \not{k} \not{\epsilon}}{p \cdot k} + \frac{\not{\epsilon} \not{k}' \not{\epsilon}'^*}{p \cdot k'} \right\} (-i\not{p} + m) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\epsilon}'}{p \cdot k} + \frac{\not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}^*}{p \cdot k'} \right\} (-i\not{p}' + m) \right]. \end{aligned} \quad (8.7.23)$$

奇数个 γ -矩阵的乘积的迹为零, 所以这分裂成 m 的零阶项和二阶项:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 &= \frac{-e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \left(\frac{T_1}{(p \cdot k)^2} + \frac{T_2}{(p \cdot k)(p \cdot k')} + \frac{T_3}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_4}{(p \cdot k')^2} - \frac{m^2 t_1}{(p \cdot k)^2} - \frac{m^2 t_2}{(p \cdot k)(p \cdot k')} - \frac{m^2 t_3}{(p \cdot k)(p \cdot k')} - \frac{m^2 t_4}{(p \cdot k')^2} \right) \end{aligned} \quad (8.7.24)$$

其中

$$T_1 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon}'^* \not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{\epsilon}^* \not{k} \not{\epsilon}' \not{p}' \right\}, \quad (8.7.25)$$

$$T_2 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon}'^* \not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}^* \not{p}' \right\}, \quad (8.7.26)$$

$$T_3 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon} \not{k}' \not{\epsilon}'^* \not{p} \not{\epsilon}^* \not{k} \not{\epsilon}' \not{p}' \right\}, \quad (8.7.27)$$

$$T_4 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon} \not{k}' \not{\epsilon}'^* \not{p} \not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}^* \not{p}' \right\}, \quad (8.7.28)$$

$$t_1 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon}'^* \not{k} \not{\epsilon} \not{\epsilon}^* \not{k} \not{\epsilon}' \right\}, \quad (8.7.29)$$

$$t_2 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon}'^* \not{k} \not{\epsilon} \not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}^* \right\}, \quad (8.7.30)$$

$$t_3 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon} \not{k}' \not{\epsilon}'^* \not{\epsilon}^* \not{k} \not{\epsilon}' \right\}, \quad (8.7.31)$$

$$t_4 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon} \not{k}' \not{\epsilon}'^* \not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}^* \right\}, \quad (8.7.32)$$

本章的附录展示了如何将任意的迹 $\text{Tr}\{\not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \dots\}$ 算成4-矢 a, b, c, d, \dots 标量积的乘积之和. 一般而言, 类似 t_k 或 T_k 这样, 6个或8个 γ -矩阵乘积的迹将分别由15项或105项的和给出, 幸运的是, 这里的大多数标量积为零; 除了方程(8.7.22), 我们还有 $k \cdot k = k' \cdot k' = 0$. (进一步地, $e \cdot e^* = e' \cdot e'^* = 1$.) 为了进一步简化计算, 我们指定线偏振的情况, 其中 e^μ 和 e'^μ 是实的. 扔掉方程(8.7.25)—(8.7.32)中的星号, 之后我们有

$$T_1 = \text{Tr} \left\{ \not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{\epsilon} \not{k} \not{\epsilon}' \not{p}' \right\}.$$

既然 $e^\mu p_\mu = 0$ 且 $e^\mu e_\mu = 1$, 我们有

$$\not{e} \not{p} \not{e} = -\not{p} \not{e} \not{e} = -\not{p}$$

所以

$$T_1 = -\text{Tr} \left\{ \not{e}' \not{k} \not{p} \not{k} \not{e}' \not{p}' \right\} .$$

另外, $k^\mu k_\mu = 0$, 所以

$$\not{k} \not{p} \not{k} = -\not{k} \not{k} \not{p} + 2 \not{k} p \cdot k = 2 \not{k} p \cdot k$$

以及随之的

$$T_1 = -2p \cdot k \text{Tr} \left\{ \not{e}' \not{k} \not{e}' \not{p}' \right\} .$$

利用方程(8.A.6), 这是

$$T_1 = -8p \cdot k [2e' \cdot k e' \cdot p' - k \cdot p'] .$$

作如下替换将是方便的

$$\begin{aligned} e' \cdot p' &= e' \cdot [p + k - k'] = e' \cdot k \\ k \cdot p' &= -\frac{1}{2}(p' - k)^2 - \frac{1}{2}m^2 = -\frac{1}{2}(p - k')^2 - \frac{1}{2}m^2 = p \cdot k' \end{aligned}$$

所以

$$T_1 = -16 p \cdot k (e' \cdot k)^2 + 8 p \cdot k p \cdot k' . \quad (8.7.33)$$

一个类似的(尽管更冗长些)计算给出

$$\begin{aligned} T_2 = T_3 &= -8(e \cdot k')^2 (p \cdot k) + 16(e \cdot e')^2 p \cdot k' p \cdot k + 8(e \cdot e')^2 k \cdot k' m^2 \\ &\quad - 8(e \cdot e') m^2 (k \cdot e')(k' \cdot e) + 8(e' \cdot k)^2 p \cdot k' \\ &\quad - 4(k \cdot p')^2 + 4(k \cdot k')(p \cdot p') - 4(k \cdot p')(p \cdot k') \end{aligned} \quad (8.7.34)$$

$$T_4 = 16p \cdot k' (e \cdot k')^2 + 8(p \cdot k)(p \cdot k') , \quad (8.7.35)$$

$$t_1 = t_4 = 0 , \quad (8.7.36)$$

$$t_2 = t_3 = -8 e \cdot e' k \cdot e' k' \cdot e + 8(k \cdot k')(e \cdot e')^2 - 4(k \cdot k') . \quad (8.7.37)$$

在方程(8.7.24)中组合所有这些因子给出

$$\sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 = \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \left[\frac{8(k \cdot k')^2}{(k \cdot p)(k' \cdot p)} + 32(e \cdot e')^2 \right] . \quad (8.7.38)$$

所有这些适用于任何Lorentz参考系. 在实验室参考系下, 我们有了特殊结果

$$\begin{aligned} k \cdot k' &= \omega \omega' (\cos \theta - 1) = m \omega \omega' \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) , \\ p \cdot k &= -m \omega, \quad p \cdot k' = -m \omega' . \end{aligned}$$

结合方程(8.7.38)与方程(8.7.17) 实验室参考系截面为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma', \sigma} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') &= \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2 \omega^2} \\ &\quad \times \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4(e \cdot e')^2 \right] . \end{aligned} \quad (8.7.39)$$

这正是 O. Klein(奥斯卡·克莱因)和 Y. Nishina(仁科芳雄)⁴在 1929 年(用旧式微扰论)所导出的著名公式.

正如 8.6 节所讨论的, 如果入射光子没有(像往常一样)以任何一个特定偏振态准备, 那么我们必须对 \mathbf{e} 的两个正交值取平均. 这个平均给出

$$\frac{1}{2} \sum_e e_i e_j = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j)$$

那么微分截面是

$$\frac{1}{4} \sum_{e, \sigma, \sigma'} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') = \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}')^2 \right]. \quad (8.7.40)$$

我们看到散射光子完全是在垂直于入射方向以及末态光子方向, 即垂直于散射所发生平面的方向上偏振. 这是一个著名的结果, 除此之外解释了来自食双星的光的偏振.**

为了计算没有测量末态光子偏振的实验中的截面, 我们必须对方程(8.7.40)的 e' 求和, 利用

$$\sum_{e'} e'_i e'_j = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}'_i \hat{\mathbf{k}}'_j$$

这给出

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{e, e', \sigma, \sigma'} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') \\ = \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{32\pi^2 m^2 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 1 + \cos^2 \theta \right], \end{aligned} \quad (8.7.41)$$

其中 θ 是 $\hat{\mathbf{k}}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}'$ 之间的夹角. 在非相对论情况下, $\omega \ll m$, 方程(8.7.41)给出

$$\frac{1}{4} \sum_{e, e', \sigma, \sigma'} d\sigma = \frac{e^4 d\Omega}{32\pi^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (8.7.42)$$

立体角积分是

$$\int [1 + \cos^2 \theta] d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi [1 + \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta = \frac{16\pi}{3},$$

给出了 $\omega \ll m$ 的总截面:

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi m^2}. \quad (8.7.43)$$

这通常写为 $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$, 其中 $r_0 = e^2/4\pi m = 2.818 \times 10^{-13} \text{cm}$ 被称为经典电子半径. 表达式(8.7.43)被称为 Tomson 截面, 以 J. J. Thomson(约瑟夫·约翰·汤姆逊), 电子发现者的名字命名. 方程(8.7.42)和(8.7.43)的原始推导利用了经典力学和经典电动力学, 通过计算一个处在平面电磁场中的相对论点电荷的再辐射光得到.

**两颗恒星之一的光, 当其非另一颗较冷恒星的外层大气中的电子散射且二者均沿着同样的视线时, 是偏振的. 这个偏振通常是不可探测的, 这是因为当天文学家把来自恒星盘所有部分的光加起来时, 它抵消了. 当较冷恒星仅阻挡了较热恒星一侧的光时, 在食双星中观测到了这个偏振.

8.8 推广: p -形式规范场*

电磁学的反对称场强张量是物理和数学中一类有特殊重要性的张量的一个特殊情况. p -形式是 p 阶反对称协变张量. 从 p -形式可以构建称为外导数**的 $(p+1)$ -形式 dt , 方法是求导数然后对所有指标反对称化:

$$\begin{aligned} (dt)_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}} &\equiv \partial_{[\mu_1} t_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{p+1}]} \\ &\equiv \partial_{\mu_1} t_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{p+1}} - \partial_{\mu_2} t_{\mu_1\mu_3\cdots\mu_{p+1}} + \cdots + (-1)^p \partial_{\mu_{p+1}} t_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} \end{aligned} \quad (8.8.1)$$

其中方括号表明对括号中的所有指标反对称化. 由于导数对易, 二次外导数为零

$$d(dt) = 0. \quad (8.8.2)$$

外导数为零的 p -形式称为闭的, 而本身就是外导数的 p -形式称为恰当的. 从方程(8.8.2)得出任何恰当 p -形式是闭的; Poincaré的一个著名定理⁶陈述为, 在一个单连通区域内, 任何闭 p -形式是恰当的[†]. 例如, 齐次Maxwell方程(8.1.16)告诉我们电磁场强2-形式 $F_{\mu\nu}$ 是闭的; 那么Poincaré定理表明它也是恰当的, 使得它可以写成一个外导数, 即, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. 再一次使用方程(8.8.2), 我们看到, 如果 A_μ 的改变是一个外导数, 即, 一个规范变换 $\delta A_\mu = \partial_\mu \Omega$, 2-形式 $F_{\mu\nu}$ 是不变的.

p -形式与外导数的形式体系使得很自然地去看由一 p -形式规范场[‡] $A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ 所描述的无质量粒子的可能性, 这个规范场在如下规范变换下不变

$$\delta A = d\Omega \quad (8.8.3)$$

或者更细致些

$$\delta A_{\mu_1\cdots\mu_p} = \partial_{[\mu_1} \Omega_{\mu_2\cdots\mu_p]},$$

其中 $\Omega_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ 是任意的 $(p-1)$ -形式. 从这样的 p -形式规范场, 我们可以构建规范不变场强张量

$$F = dA \quad (8.8.4)$$

或者更细致些

$$F_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]} . \quad (8.8.5)$$

(或者, 我们可以从 $(p+1)$ -形式 F 以及假定条件 $dF = 0$ 出发, 推断出满足 $F = dA$ 的 p -形式 A 的存在.) 通过与电动力学类比, 我们可以预期 A 的拉格朗日量密度采取如下形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2(p+1)} F_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} F^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} + J^{\mu_1\cdots\mu_p} A_{\mu_1\cdots\mu_p}, \quad (8.8.6)$$

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略.

**外导数与 p -形式在广义相对论中扮演了特殊的角色, 这部分是由于一个张量的外导数尽管是以普通导数计算而非协变导数, 但是它像张量那样变换.⁵

†在多连通空间中, 闭形式不一定是精确的; 尽管将一个闭 p -形式定域地写成一个恰当形式是可能的, 但其一般不能光滑的在全空间实现这点. 闭 p -形式的集合, 同模于闭 p -形式, 构成了该空间所谓的 p 阶de Rham(德拉姆)上调群. 空间的de Rham上调群与它的拓扑之间存在一个深刻的联系,⁶ 其将在卷II进一步讨论.

‡我们称 $A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ 为一个 p -形式并不严格, 这是由于为 $F = dA$ 是张量, 只需要 A 是一个张量加上一个规范变换. 事实上, 我们在4维时空中已经看到, 不可能从螺旋度 ± 1 的无质量物质粒子的产生和湮灭算符构建4-矢量, 所以我们不得不处理, 根据方程(8.1.2), 与一个4-矢量相差一个规范变换的 $A^\mu(x)$

其中 J 是反对称张量流(要么是 c -数, 要么是 A 以外的场的函数), 为了使作用量规范不变, 其必须满足守恒条件

$$\partial_{\mu_1} J^{\mu_1 \cdots \mu_p} = 0. \quad (8.8.7)$$

那么Euler-Lagrange方程是

$$\partial_{\mu} F^{\mu \mu_1 \cdots \mu_p} = -J^{\mu_1 \cdots \mu_p}. \quad (8.8.8)$$

这些 p -形式规范场在时空维数大于4的理论中扮演了重要角色. 例如, 在26维时空中最简单的弦理论中, 在低能处存在由2-形式规范场 $A_{\mu\nu}$ 表示的弦简正模. 但在4维时空中, p -形式不提供新的可能性.

为了看到这点, 首先注意到, 在 D 维时空中, 不存在指标个数大于 D 的反对称张量, 所以一般而言, 我们必须取 $p+1 \leq D$. 类似任何其它 $p+1 \leq D$ 的 $(p+1)$ -形式, 场强 F 可以用一对偶 $(D-p-1)$ -形式 \mathcal{F} 表示

$$F^{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}} = \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \mathcal{F}_{\mu_{p+2} \cdots \mu_D}. \quad (8.8.9)$$

同样, p -形式流 J 可以用一对偶 $(D-p)$ -形式 \mathcal{J} 表示

$$J^{\mu_1 \cdots \mu_p} = \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \mathcal{J}_{\mu_{p+1} \cdots \mu_D}. \quad (8.8.10)$$

那么场方程(8.8.8)与守恒条件(8.8.7)简化为

$$d\mathcal{F} = \mathcal{J}, \quad d\mathcal{J} = 0. \quad (8.8.11)$$

由于对偶流 \mathcal{J} 是闭的, 以 $(D-p-1)$ -形式 \mathcal{S} 的形式, 它可以写成

$$\mathcal{J} = d\mathcal{S}. \quad (8.8.12)$$

方程(8.8.11)和(8.8.12)告诉我们 \mathcal{F} 与 \mathcal{S} 的差是闭形式, 因而根据Poincaré定理, 可以写成

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} + d\phi, \quad (8.8.13)$$

其中 ϕ 是 $(D-p-2)$ -形式. 对于情况 $p = D-1$, 存在一个例外, 在该情况下, \mathcal{F} 与 \mathcal{S} 是0-形式, 即, 标量, 并且条件 $d\mathcal{F} = d\mathcal{S}$ 告诉我们 \mathcal{F} 与 \mathcal{S} 仅相差一个常数. 在该情况下, 规范场根本不描述自由度. 因而我们可以限制自身于 $p \leq D-2$ 的情况.

对于 $p \leq D-2$, 其次“Maxwell”方程 $dF = 0$ 变成

$$\partial_{\mu_1} \mathcal{F}^{\mu_1 \cdots \mu_{D-p-1}} = 0, \quad (8.8.14)$$

其与方程(8.8.13)给出 ϕ 的场方程:

$$\partial_{\mu_1} (d\phi)^{\mu_1 \cdots \mu_{D-p-1}} = -\partial_{\mu_1} \mathcal{S}^{\mu_1 \cdots \mu_{D-p-1}}. \quad (8.8.15)$$

这在一组新的规范变换 $\phi \rightarrow \phi + d\omega$ 下是不变的, 除了当 $D-p-2 = 0$ 时, 使 F 不变的规范变换是 $\phi \rightarrow \phi + c$, 其中 c 是任意常数. 我们看到, 在 D 维时空中, p -形式规范场 A 的理论等价于 $D-p-2$ -形式规范场 ϕ 的理论.

我们现在可以理解为什么 p -形式规范场在4维时空中不提供新的可能性. 正如我们所看到的, 我们仅需要考察 $p \leq D-2$ 的情况, 或者说 $p = 0, 1$ 或2的情况. 0-形式规范场是一标量 S , 对于这一

情况, 方程(8.8.5)变成 $F_\mu = \partial_\mu S$, 并且场方程(8.8.8)简化为 $\square S = -J$. 这里的规范不变性是在偏移 $S \rightarrow S + c$ 下的不变, 其中 c 是一常数. 这正是仅有导数相互作用的无质量标量场理论. 1-形式规范场是与一守恒4-矢量流耦合的4-矢 $A^\mu(x)$, 就像电动力学中那样. 最后根据之上所引述的结果, 4维时空中的2-形式规范场等价于0-形式规范场, 正如我们所看到的, 其等价于无质量导数耦合标量场.

附录 迹

在计算包含自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的过程的 S -矩阵元和跃迁几率时, 我们经常会遇到Dirac γ -矩阵乘积的迹. 因而给出可以在所有这类计算中可以使用的求迹公式将是有益的.

对于偶数个 γ -矩阵的乘积, 迹给定为

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2N}}\} = 4 \sum_{\text{pairings}} \delta_P \prod_{\text{pairs}} \eta_{\text{paired } \mu s} . \quad (8.A.1)$$

这里是对指标 μ_1, \cdots, μ_{2N} 的所有不同配对(pairing)方式求和. 一个配对可以视为整数 $1, 2, \cdots, 2N$ 到某个次序 $P_1, P_2, \cdots, P \cdot (2N)$ 的置换, 其中, μ_{P_1} 与 μ_{P_2} 配对, μ_{P_3} 与 μ_{P_4} 配对, 以此类推. 置换对或置换一对中的 μ 给出相同的配对, 所以不同的配对个数是

$$(2N)!/N!2^N = (2N-1)(2N-3)\cdots 1 \equiv (2N-1)!! . \quad (8.A.2)$$

通过要求

$$P_1 < P_2, P_3 < P_4, \cdots, P \cdot (2N-1) < P \cdot (2N) \quad (8.A.3)$$

以及

$$P_1 < P_3 < P_5 < \cdots , \quad (8.A.4)$$

我们可以避免对等价配对的求和. 在这一约定下, 根据配对是所包含的指标置换是偶数个还是奇数个, 因子 δ_P 是+1或-1. 方程(8.A.1)中的乘积是对所有 N 个配对求乘积, 第 n 对贡献因子 $\eta_{\mu_{P \cdot (2n-1)}\mu_{P \cdot (2n)}}$. 例如, (取代 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \cdots$, 写成 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \cdots$), 对于 $N = 1, 2$ 和 3 , 我们有*

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 4\eta_{\mu\nu} , \quad (8.A.5)$$

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 4\left[\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\right] , \quad (8.A.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\kappa\gamma_\eta\} = & 4\left[\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\kappa}\eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\eta}\eta_{\sigma\kappa} \right. \\ & - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\kappa\eta} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\sigma\eta} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\eta}\eta_{\sigma\kappa} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\rho\eta} \\ & + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\eta}\eta_{\rho\kappa} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\rho}\eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\rho\eta} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\eta}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\rho}\eta_{\sigma\kappa} \\ & \left. - \eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\rho\kappa} + \eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\rho\sigma}\right] . \quad (8.A.7) \end{aligned}$$

对于奇数个 γ -矩阵, 这一结果简单得多

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2N+1}}\} = 0 . \quad (8.A.8)$$

*有新的可用于计算大量Dirac矩阵乘积的迹的计算程序.⁷

(8.A.1)的证明是通过数学归纳法. 首先注意到

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = -\text{Tr}\{\gamma_\nu\gamma_\mu\} + 2\text{Tr}\{\eta_{\mu\nu}1\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} + 8\eta_{\mu\nu},$$

所以 $\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 4\eta_{\mu\nu}$, 与方程(8.A.1)一致. 接下来假定方程(8.A.1)对于 $N \leq M - 1$ 是正确的, 那么我们有

$$\begin{aligned}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} &= 2\eta_{\mu_1\mu_2}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\ &= 2\eta_{\mu_1\mu_2}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\eta_{\mu_1\mu_3}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\ &\quad + \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\ &= 2\eta_{\mu_1\mu_2}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\eta_{\mu_1\mu_3}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\ &\quad + 2\eta_{\mu_1\mu_4}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_5}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - \cdots \\ &\quad + 2\eta_{\mu_1\mu_{2M}}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M-1}}\} - \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\gamma_{\mu_1}\}\end{aligned}$$

所有对易子的迹为零, 所以这里所减去的最后一项与左边是相同的, 因而

$$\begin{aligned}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} &= \eta_{\mu_1\mu_2}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\ &\quad - \eta_{\mu_1\mu_3}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} + \eta_{\mu_1\mu_4}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_5}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\ &\quad - \cdots + \eta_{\mu_1\mu_{2M}}\text{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M-1}}\}.\end{aligned}\tag{8.A.9}$$

如果我们假定方程(8.A.1)正确地给出任意 $2N - 2$ 个Dirac矩阵的乘积的迹, 那么方程(8.A.9)表明方程(8.A.1)也正确地给出任意 $2N$ 个Dirac矩阵的乘积的迹.

发现奇数个Dirac矩阵的迹为零的最简单方式是注意到, $-\gamma_\mu$ 通过一个相似变换 $-\gamma_\mu = \gamma_5\gamma_\mu(\gamma_5)^{-1}$ 与 γ_μ 相关. 这样的相似变换是不影响迹的, 所以奇数个Dirac矩阵的迹等于负的本身, 因而为零.

有时会遇到另一类迹, 形式为

$$\text{Tr}\{\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\}.$$

由于与上面所给出的, 针对没有 γ_5 的迹, 相同的原因, 对于奇数的 n 这为零. 它对于 $n = 0$ 和 $n = 2$ 也为零:

$$\text{Tr}\{\gamma_5\} = 0\tag{8.A.10}$$

$$\text{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 0.\tag{8.A.11}$$

(为了看到这点, 回忆起 $\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ 即可, 注意到在 $\text{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\}$ 或 $\text{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\}$ 中没有一种配对指标的方式使得每对中的时空指标相等.) 对于 $n = 4$, 在 $\text{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\}$ 中有可能对指标进行配对使得每对中的时空指标相等, 但仅限于 μ, ν, ρ, σ 是 $0, 1, 2, 3$ 的某个置换. 更进一步, 由于带有不同指标的 γ -矩阵反对易, 这个迹在 μ, ν, ρ, σ 的置换下为奇. 因此迹 $\text{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\}$ 必须正比于全反对称张量 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. 通过令 μ, ν, ρ, σ 取值 $0, 1, 2, 3$ 以及 $\epsilon_{0123} = -1$ 可以解出这个比例常数. 以这种方法, 我们发现

$$\text{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}.\tag{8.A.12}$$

γ_5 与6个, 8个或更多的 γ -矩阵的乘积的迹可以用上面证明方程(8.A.1)的相同方法计算出来.

参考文献

- [1] 参看M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987): Section 2.2.
- [1a] V. Fock, *Z. f. Phys.* **39**, 226 (1927); H. Weyl, *Z. Phys.* **56**, 330 (1929). “规范不变”项是从更早的H. Weyl对尺度不变性的猜测的类比中推断出来的, in *Raum, Zeit, Materie*, 3rd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1920). 另见F. London, *Z. f. Phys.* **42**, 375 (1927). 杨振宁在城市学院(City College)的讲话中回忆了这段历史(未发表).
- [2] 基于与这里差不多的理由, Schwinger大力提倡在电动力学中使用Coulomb规范: 我们不该引入螺度为 ± 1 以外的光子. 参看J. Schwinger, *Phys. Rev.* **78**, 1439 (1948); **127**, 324 (1962); *Nuovo Cimento* **30**, 278 (1963).
- [3] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **101**, 769 (1949): Section 8.
- [4] O. Klein and Y. Nishina, *Z. f. Phys.* **52**, 853 (1929); Y. Nishina, *ibid.*, 869 (1929); 另见I. Tamm, *Z. f. Phys.* **62**, 545 (1930).
- [5] 参看S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Section 4.11.
- [6] 关于 p -形式的几何与拓扑的一个易懂且普遍的介绍, 参看H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963).
- [7] T. West, *Comput. Phys. Commun.* **77**, 286 (1993).

第 9 章 路径积分方法

在第7章和第8章, 我们应用正则量子化算符形式体系导出了多种理论的Feynman规则. 在很多情况下, 例如有导数耦合的标量场或质量为零或非零的矢量场, 这个步骤尽管直接却相当笨拙. 相互作用哈密顿量会包含一个协变项, 等于拉格朗日量中相互作用项的负数, 加上一个非协变项, 其帮助抵消传播子中的非协变项. 在电动力学的情况下, 这个非协变项(Coulomb能)甚至不是空间定域的, 尽管它在时间上是定域的. 最后结果仍是相当简单的: Feynman规则仅是那些我们用协变传播子所获得的, 并且使用拉格朗日量中相互作用项的负数以计算顶点贡献. 得到这些结果时的繁琐, 其对于第7章和第8章所考虑的力量已经足够坏了, 对于更加复杂的理论, 像卷II将要讨论的非阿贝尔规范理论以及广义相对论, 这些繁琐变得无法容忍. 我们将更倾向于这样的计算方法, 可以直接从拉格朗日量得到最终的, Lorentz-协变的Feynman规则.

幸运的是, 这样的方法确实存在. 其由量子力学的路径积分方法提供. 这首次出现在Feynman的普林斯顿大学Ph.D论文¹中的非相对论量子力学部分, 作为一种直接处理拉格朗日量而非哈密顿量的方法. 在这一方面, 它受到了Dirac²早期工作的启发. 路径积分方法(和灵感的猜测)在Feynman稍后他的图形规则的推导中起了部分作用.³ 然而, 尽管Feynman图在20世纪50年代变得广泛使用, 大多数物理学家(包括我自己)倾向于用Schwinger和Tomonaga的算符方法导出它们, Dyson在1949年证明这一方法所导出的图形规则与Feynman用他自己的方法导出的规则相同.

路径积分于20世纪60年代复兴, 当时Faddeev(法捷耶夫)和Popov(波波夫)⁴以及De Witt(德维特)⁵说明了如何将其应用于非阿贝尔规范理论和广义相对论. 对于大多数理论家, 转折点于1971年来临, 此时't Hooft(特·霍夫特)⁶利用路径积分方法, 在相互作用的高能行为变得非常显然的规范下, 导出了自发破缺规范理论(将在卷II讨论)的Feynman规则, 自发破缺规范理论特别地包含弱作用和电磁作用理论. 不久之后, 我们将在卷II进行讨论, 我们发现路径积分方法允许我们解释那些在零耦合常数处有显然奇异性的 S -矩阵贡献, 这样的贡献本来会因此而无法在任何有限阶微扰论中被发现. 自此以后, 这里所描述的路径积分方法就变成了所有使用量子场论的物理学家的工具中不可分割的一部分.

这时候读者可能会产生疑问, 如果路径积分方法如此方便, 为什么我们还要费心地在第7章介绍正则形式体系. 诚然, Feynman起初似乎认为他的路径积分方法是普通的量子力学正则形式的一个替代品. 从正则形式体系开始有两个原因. 其一是原理上的: 尽管路径积分形式体系提供给我们显然Lorentz-不变的图形规则, 但它并没有说明为什么以这种方式计算的 S -矩阵是幺正的. 就我所知, 证明路径积分形式体系所产生的是幺正的 S -矩阵的唯一方法是, 用它来重构幺正性显然的正则体系. 这里存在一种困难的守恒; 我们可以使用正则方法, 其中幺正性显然但Lorentz不变性不明显, 或者路径积分方法, 其是显然Lorentz-不变的但幺正性远没有那么显然. 既然这里是从正则方法导出路径积分方法, 我们知道两种方法给出相同的 S -矩阵, 这使得 S -矩阵必须即是Lorentz-不变又是幺正的.

先引入正则体系的第二个原因更加实际: 存在重要的理论, 在这些理论中, Feynman路径积分

方法的最简版本, 即从拉格朗日量中直接取出传播子和相互作用顶点, 是错的. 一个例子是非线性 σ -模型, 其拉格朗日量密度为 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g_{kl}(\phi)\partial_\mu\phi^k\partial^\mu\phi^l$. 在这类理论中, 使用直接从拉格朗日量密度导出的朴素的Feynman规则, 其产生的 S -矩阵不仅是错的甚至是不么正的, 并且也依赖于我们定义标量场的方式.⁷本章中, 我们将从正则形式体系导出路径积分形式体系, 并且以这种方式我们将看到, 什么样的额外顶点需要被补充进Feynman路径积分方法的最简版本中.

9.1 普遍的路径积分公式

我们从一个普遍的量子力学系统出发, 其有厄密算符“坐标” Q_a 以及共轭“动量” P_b , 满足正则对易关系*:

$$[Q_a, P_b] = i\delta_{ab}, \quad (9.1.1)$$

$$[Q_a, Q_b] = [P_a, P_b] = 0. \quad (9.1.2)$$

(在本节以及接下来的三节, 我们将集中于玻色算符, 其满足对易关系而不是反对易关系. 我们的结果将在9.5节被推广以纳入费米算符.) 在一个场论中, 指标 a 由位置 x 和一个离散的Lorentz以及种类指标 m 构成, 我们按照惯例写成

$$Q_{\mathbf{x},m} \equiv Q_m(\mathbf{x}), \quad (9.1.3)$$

$$P_{\mathbf{x},m} \equiv P_m(\mathbf{x}). \quad (9.1.4)$$

另外, 方程(9.1.1)中的克罗内克 δ -符号被解释成

$$\delta_{\mathbf{x},m;\mathbf{y},n} \equiv \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{mn}. \quad (9.1.5)$$

然而, 目前使用方程(9.1.1)和(9.1.2)的较紧凑记法将是方便的. 这些是“Schrödinger-绘景”算符, 取在固定时刻(例如, $t = 0$). Heisenberg绘景中的时间相关算符将在稍后考察.

既然 Q_a 全部对易, 我们可以一个本征值为 q_a 的同时本征态:

$$Q_a |q\rangle = q_a |q\rangle. \quad (9.1.6)$$

(我们在这里使用小写的 q 和 p 以标记本征值而不像第7章中那样用来标记相互作用绘景中的算符, 但由于我们在本章不使用相互作用绘景, 因而不会产生混淆.) 本征矢可以被取成是正交的,

$$\langle q'|q\rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) \equiv \delta(q' - q), \quad (9.1.7)$$

使得完备关系变成

$$1 = \int \prod_a dq_a |q\rangle \langle q|. \quad (9.1.8)$$

类似地, 我们可以找到 P_a 的一组完备正交基:

$$P_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad (9.1.9)$$

$$\langle p'|p\rangle = \prod_a \delta(p'_a - p_a) \equiv \delta(p' - p), \quad (9.1.10)$$

$$1 = \int \prod_a dp_a |p\rangle \langle p|. \quad (9.1.11)$$

*我们在这里隐含假定了任何第一类约束通过选择规范被消除了, 而剩下的任何第二类约束通过将约束自由度写成非约束 Q_a 和 P_a 的形式被“解出”了, 就像7.6节中做的那样. 路径积分方法对约束系统的直接应用被Faddeev所描述.⁸

像往常一样, 从方程(9.1.1)得出这两组完备的本征态有标量积**

$$\langle q|p\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iq_a p_a) . \quad (9.1.12)$$

在Heisenberg绘景中, Q 算符和 P 算符被赋予了时间相关性

$$Q_a(t) \equiv \exp(iHt)Q_a \exp(-iHt) , \quad (9.1.13)$$

$$P_a(t) \equiv \exp(iHt)P_a \exp(-iHt) , \quad (9.1.14)$$

其中 H 是总的哈密顿量. 它们有本征态 $|q; t\rangle$ 和 $|p; t\rangle$

$$Q_a|q; t\rangle = q_a|q; t\rangle , \quad (9.1.15)$$

$$P_a|p; t\rangle = p_a|p; t\rangle , \quad (9.1.16)$$

给定为

$$|q; t\rangle = \exp(iHt)|q\rangle , \quad (9.1.17)$$

$$|p; t\rangle = \exp(iHt)|p\rangle . \quad (9.1.18)$$

(注意到 $|q; t\rangle$ 是 $Q_a(t)$ 本征值为 q_a 的本征态, 而不是令态 $|q\rangle$ 演化时间 t 后的结果. 这是为什么它的时间相关性由因子 $\exp(iHt)$ 给出而非 $\exp(-iHt)$ 的原因.) 这些态显然满足完备性和正交性条件

$$\langle q'; t|q; t\rangle = \delta(q' - q) , \quad (9.1.19)$$

$$\langle p'; t|p; t\rangle = \delta(p' - p) , \quad (9.1.20)$$

$$\int \prod_a dq_a |q; t\rangle \langle q; t| = 1 \quad (9.1.21)$$

$$\int \prod_a dp_a |p; t\rangle \langle p; t| = 1 \quad (9.1.22)$$

以及另外的

$$\langle q; t|p; t\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iq_a p_a) . \quad (9.1.23)$$

如果, 通过在时刻 t 处的测量, 我们发现我们的系统处在确定的态 $|q; t\rangle$, 那么在时刻 t' 的测量以给出态 $|q'; t'\rangle$ 的几率振幅是标量积 $\langle q'; t'|q; t\rangle$. 我们核心的动力学问题就是计算这个标量积.

当 t' 和 t 无限接近时, 即 $t' = \tau + d\tau$ 而 $t = \tau$, 这是简单的. 利用方程(9.1.17), 我们有

$$\langle q'; \tau + d\tau|q; \tau\rangle = \langle q'; \tau| \exp(-iH d\tau) |q; \tau\rangle . \quad (9.1.24)$$

哈密顿量作为一个函数 $H(Q, P)$ 给出, 但既然(9.1.13)和(9.1.14)是相似变换, 并且 H 与它自身对易, 它可以等价的写成 $Q(t)$ 和 $P(t)$ 的同一函数

$$H \equiv H(Q, P) = e^{iHt} H(Q, P) e^{-iHt} = H(Q(t), P(t)) . \quad (9.1.25)$$

**这个证明遵循与点粒子的量子力学相同的路线. 从方程(9.1.1), 我们看到 P_b 作为 $-i\partial/\partial q_b$ 作用在 q -基中的波函数上. 那么方程(9.1.12)的右边被视为 P 的一个本征态在该基下的波函数. 因子 $\prod 1/\sqrt{2\pi}$ 被归一化要求, 方程(9.1.10), 所确定.

通过使用对易关系(9.1.1)和(9.1.2)以交换 Q 和 P 的次序,这一函数可以被写成几种不同的形式,不同的形式中有着不同的常系数. 采取这样一种标准形式将是方便的,即所有的 Q 处在所有 P 的左边. 例如,给定哈密顿量中的一项形式为 $P_a Q_b P_c$,我们将其重写为 $P_a Q_b P_c = Q_b P_a P_c - i\delta_{ab} P_c$. 在这个约定下,方程(9.1.24)中哈密顿量的 $Q_a(t)$ 可以被它们的本征值 q'_a 替换[†]. 为了处理 $P(t)$,我们使用方程(9.1.23)在 P -本征态下展开 $|p; \tau\rangle$,发现

$$\begin{aligned} \langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle &= \int \prod_a dp_a \langle q'; \tau | \exp \left(-iH(Q(\tau), P(\tau)) d\tau \right) | q; \tau \rangle \\ &\quad \times \langle p; \tau | q; \tau \rangle \\ &= \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \exp \left[-iH(q', p) d\tau + i \sum_a (q'_a - q_a) p_a \right], \end{aligned} \quad (9.1.26)$$

其中每个 p_a 从 $-\infty$ 被积到 $+\infty$.

现在让我们回到更加普遍的有限时间间隔的情况. 为了计算 $t < t'$ 的 $\langle q'; t' | q; t \rangle$,我们将 t 到 t' 的时间间隔分解成 $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, t'$, 其中

$$\tau_{k+1} - \tau_k = d\tau = (t' - t)/(N + 1) \quad (9.1.27)$$

并对处在每个时刻 τ_k 的态 $|q; \tau_k\rangle$ 的完全集求和:

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \int dq_1 \cdots dq_N \langle q'; t' | q_N; \tau_N \rangle \langle q_N; \tau_N | q_{N-1}; \tau_{N-1} \rangle \cdots \langle q_1; \tau_1 | q; t \rangle \quad (9.1.28)$$

插入方程(9.1.26), 这变成

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle &= \int \left[\prod_{k=1}^N \prod_a dq_{k,a} \right] \left[\prod_{k=0}^N \prod_a dp_{k,a}/2\pi \right] \\ &\quad \times \exp \left[i \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) d\tau \right\} \right], \end{aligned} \quad (9.1.29)$$

其中

$$q_0 \equiv q, \quad q_{N+1} \equiv q'. \quad (9.1.30)$$

我们的结果, 方程(9.1.29), 可以变成更加优美的形式. 定义光滑插值函数, $q(\tau)$ 和 $p(\tau)$, 使得

$$q_a(\tau_k) \equiv q_{k,a}, \quad p_a(\tau_k) \equiv p_{k,a}. \quad (9.1.31)$$

在极限 $d\tau \rightarrow 0$ (即, $N \rightarrow \infty$)下, 方程9.1.29中的指数变量就变成了对 τ 的积分

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) d\tau \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau_k) p_a(\tau_k) - H(q(\tau_k), p(\tau_k)) \right\} d\tau + O(d\tau^2) \\ &\rightarrow \int_t^{t'} \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (9.1.32)$$

[†]这是唯一可能的, 因为对于无限小的 $d\tau$, $\exp(-iH d\tau)$ 对 H 是线性的.

进一步, 我们可以定义对函数 $q(\tau), p(\tau)$ 的积分为

$$\int \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \cdots \equiv \lim_{d\tau \rightarrow 0} \int \prod_{k,a} dq_{k,a} \prod_{k,b} \frac{dp_{k,b}}{2\pi} \cdots \quad (9.1.33)$$

那么方程(9.1.29)变成了一个约束路径积分

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle &= \int_{\substack{q_a(t)=q_a \\ q_a(t')=q'_a}} \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \\ &\times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.1.34)$$

这称为路径积分, 这是因为我们对所有从 $\tau = t$ 时的 q 到 $\tau = t'$ 时的 q' 的路径 $q(\tau)$ 进行积分, 并对所有的 $p(\tau)$ 积分. 以这种方式写矩阵元的巨大优点是, 正如在9.3节所要展示的, 当路径积分以 H 中的耦合常数做幂级数展开时是很容易计算的.

路径积分形式体系不仅允许我们计算类似 $\langle q'; t' | q; t \rangle$ 的跃迁几率振幅, 还允许我们计算一般算符 $\mathcal{O}(P(t), Q(t))$ 的编时乘积在态 $\langle q'; t' |$ 和 $|q; t \rangle$ 之间的矩阵元. 将这些算符定义为(不像 H)所有的 P 处在左边而所有的 Q 处在右边. 那么通过将任意这样的算符 $\mathcal{O}(P(\tau), Q(\tau))$ 插入方程(9.1.26), 我们有

$$\begin{aligned} \langle q'; \tau + d\tau | \mathcal{O}(P(t), Q(t)) | q; \tau \rangle &= \int \prod_a dp_a \\ &\times \langle q'; \tau | \exp \left(-iH(Q(\tau), P(\tau)) d\tau \right) | p; \tau \rangle \langle p; \tau | \mathcal{O}(P(t), Q(t)) | q; \tau \rangle \\ &= \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \exp \left[-iH(q', p) d\tau + i \sum_a (q'_a - q_a) p_a \right] \mathcal{O}(p, q). \end{aligned} \quad (9.1.35)$$

为了计算 $t_A > t_B > \cdots$ 的算符乘积 $\mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \mathcal{O}_B(P(t_B), Q(t_B))$ 的矩阵元, 我们可以在方程(9.1.28)中的渐近态之间插入 \mathcal{O} -算符, 并使用方程(9.1.35). 例如, 如果时间 t_A 落在 τ_k 和 τ_{k+1} 之间, 那么在 $\langle q_{k+1}; \tau_{k+1} |$ 和 $|q_k; \tau_k \rangle$ 之间插入 $\mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A))$, 注意, 在方程(9.1.28)中对态的每个连续求和是随后的, 所以由于我们的假定 $t_A > t_B > \cdots$, 这是唯一可能的. 跟随与之前相同的步骤, 我们现在发现普遍的路径积分公式

$$\begin{aligned} &\langle q', t' | \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \mathcal{O}_B(P(t_B), Q(t_B)) \cdots | q, t \rangle \\ &= \int_{\substack{q_a(t)=q_a \\ q_a(t')=q'_a}} \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \mathcal{O}_B(P(t_B), Q(t_B)) \cdots \\ &\times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.1.36)$$

这个结果只有在时间被排序之后才是适用的, 即

$$t' > t_A > t_B > \cdots t. \quad (9.1.37)$$

然而, 方程(9.1.36)的右边没有什么指明了时间变量的次序. 因此, 如果呈现给我们的是类似方程(9.1.36)右边的路径积分, 其中 t_A, t_B 以任意次序排列(它们都处在 t 和 t' 之间, 其中 $t < t'$), 那么这个路径积分将等价于类似方程(9.1.36)左边的矩阵元, 但是其中的算符(从左到右)以时间减少的次序排列. 即, 对于以任意次序排列的 t_A, t_B, \dots , 我们有

$$\begin{aligned} & \langle q', t' | T \left\{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)), \mathcal{O}_B(P(t_B), Q(t_B)), \dots \right\} | q, t \rangle \\ &= \int \prod_{\substack{q_a(t)=q_a \\ q_a(t')=q'_a}} dq_a(\tau) \prod_{\tau, a} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \mathcal{O}_B(P(t_B), Q(t_B)) \dots \\ & \quad \times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right], \end{aligned} \quad (9.1.38)$$

其中 T 代表通常的编时乘积.

或许该强调一下, 方程(9.1.38)中的c-数函数 $q_a(\tau), p_a(\tau)$ 仅是积分变量, 并且特别地, 它们没有被约束以服从经典哈密顿动力学的运动方程

$$\dot{q}_a(\tau) - \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial p_a(\tau)} = 0, \quad (9.1.39)$$

$$\dot{p}_a(\tau) + \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial q_a(\tau)} = 0. \quad (9.1.40)$$

(由于这个原因, 方程(9.1.38)中的哈密顿量 $H(q(\tau), p(\tau))$ 对于 τ 不是常数.) 然而, 在一种极限意义下, 路径积分确实反应这些运动方程. 假定方程(9.1.38)中的函数之一, 例如 $\mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A))$, 恰巧是方程(9.1.39)或方程(9.1.40)的左边. 我们注意到(对于 $t < t_A < t'$)

$$\begin{aligned} \left(\dot{q}_a(t_A) - \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial p_a(t_A)} \right) \exp(iI[q, p]) &= -i \frac{\delta}{\delta p_a(t_A)} \exp(iI[q, p]), \\ \left(\dot{p}_a(t_A) + \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial q_a(t_A)} \right) \exp(iI[q, p]) &= i \frac{\delta}{\delta q_a(t_A)} \exp(iI[q, p]), \end{aligned}$$

其中 iI 是方程(9.1.38)中指数的变量:

$$I[q, p] \equiv \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\}.$$

只要 t_A 不接触 t 或 t' , 对 $q_a(t_A)$ 和 $p_a(t_A)$ 的积分是非约束的, 因而在这些积分收敛的合理假定下, 这种变分导数的积分必须为零. 因此如果 $\mathcal{O}_A(p, q)$ 被取成是运动方程(9.1.39)或(9.1.40)的左边, 那么路径积分(9.1.38)必须为零.

仅当积分变量 $q_a(t_A), p_a(t_A)$ 独立于出现在方程(9.1.38)中任何其它函数 $\mathcal{O}_B, \mathcal{O}_C, \dots$ 等中的任何变量 $q_a(t_B), p_a(t_B), \dots$, 且仅当我们禁止 t_A 接近 t_B, t_C, \dots , 以及 t 或 t' 时, 这个简单规则才是适用的. 当 t_A 接近, 例如 t_B , 这个路径积分将会包含一个正比于 $\delta(t_A - t_B)$ 或它导数的非零项. 这些 δ -函数与, 算符形式体系中, 编时乘积定义中暗含的阶跃函数的时间导数是相同的.

在计算路径积分(9.1.34)和(9.1.38)中, 我们仅需要知道经典哈密顿量, c-数函数 $H(q, p)$. 如果我们通过路径积分定义一个理论, 这个问题将会自然而然的产生, 那么多可能的量子力学哈密顿量 $H(Q, P)$ (相差在 Q 和 P 的次序)中的哪一个控制对应这些路径积分的量子理论. 我们的推导

已经给出了一个答案：量子哈密顿量将被取成所有的 Q 在左边，而所有的 P 在右边。但是给这个描述以太多的含义将是一个错误。存在大量解释出现在类似(9.1.34)或(9.1.38)的路径积分中的测度 $\prod dq_a(\tau) \prod dp_b(\tau)$ 的方式。我们的描述，即把所有的 Q 放在所有 P 的左边，仅当测度是根据方程(9.1.31)—(9.1.33)解释时才是合适的。其它测度将导出算符次序的其它描述。这不是一个急迫的问题，因为哈密顿量中算符次序的不同描述仅对应于常数的不同选择，这些常数是作为哈密顿量中各项的系数而出现的，并且我们公式化这些理论时，这些常数总要留作任意参量。

很难将方程(9.1.38)中的普遍路径积分用作数值计算或者严格定理的源头。为此，用路径积分计算欧几里得空间中的振幅更好一些，其中 t 被一个虚量 $-ix_4$ 所替换，并且方程(9.1.38)中指数的变量是一个负的实量。以这种方式，取代了锯齿状的路径，这些路径产生了从一个路径到另一路径积分的激素振荡，所有的锯齿路径被指数式地抑制了。尽管我们将不会在这里研究它，量子场论可以以欧几里得时空中的Feynman振幅的形式为开端规划出来。^{8a} 在一些貌似可信的假定下，闵可夫斯基时空的Feynman振幅有可能从它们的欧几里得配对部分重新构建出来。^{8b} 但是如果我们仅打算用路径积分计算微扰论中的Feynman振幅，我们也可以坚持路径积分的闵可夫斯基空间公式化。

9.2 过渡到S-矩阵

正如之前所提及的，通过让指标 a 取遍空间中的点 \mathbf{x} 以及自旋和种类指标 m ，并分别将 $Q_a(t)$ 和 $P_a(t)$ 替换成 $Q_m(\mathbf{x}, t)$ 和 $P_m(\mathbf{x}, t)$ ，我们可以轻松地将9.1节普遍的量子力学结果转变成适合量子场论的记法。这样，方程(9.1.38)变成*

$$\begin{aligned} & \langle q', t' | T \{ \mathcal{O}_A [P(t_A), Q(t_A)], \mathcal{O}_B [P(t_B), Q(t_B)], \dots] | q, t \rangle \\ &= \int_{\substack{q_m(\mathbf{x}, t) = q_m(\mathbf{x}) \\ q'_m(\mathbf{x}, t') = q'_m(\mathbf{x})}} \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \frac{dp_m(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \\ & \times \mathcal{O}_A [p(t_A), q(t_A)] \mathcal{O}_B [p(t_B), q(t_B)] \dots \\ & \times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H [q(\tau), p(\tau)] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

然而在场论中，方程(9.2.1)不完全是我们想要的。实验者不测量量子场 Q 的本征态 $\langle q', t' |$ 和 $|q, t \rangle$ 之间的跃迁几率振幅，而是 S -矩阵元，即处在 $t \rightarrow -\infty$ 或 $t \rightarrow +\infty$ 时，包含各种类型数目明确的粒子态之间的跃迁几率振幅。这些态被称为“入”态和“出”态， $|\alpha, \text{in}\rangle$ 和 $|\beta, \text{out}\rangle$ ，其中 α 和 β 代表由各种粒子的动量，自旋 z -分量(或螺度)以及种类所表征的粒子集合。为了计算编时乘积(可能是空的)在这类态之间的矩阵元，我们需要给方程(9.2.1)乘上任意固定时刻 t 和 t' 的“波函数” $\langle \beta, \text{out} | q', t' \rangle$ 和 $\langle q, t | \alpha, \text{in} \rangle$ ，方便起见这里的 t 和 t' 分别取为 $-\infty$ 和 $+\infty$ ，然后对这些波函数的“变量” $q_m(\mathbf{x})$ 和 $q'_m(\mathbf{x})$ 积分。但是，取代以如下条件约束对 $q_m(\mathbf{x}, \tau)$ 的路径积分

$$q_m(\mathbf{x}, +\infty) = q'_m(\mathbf{x}), \quad q_m(\mathbf{x}, -\infty) = q_m(\mathbf{x}), \quad (9.2.2)$$

然后对 $q'_m(\mathbf{x})$ 和 $q_m(\mathbf{x})$ 积分，我们也可以做 $q_m(\mathbf{x}, \tau)$ (以及 $p_m(\mathbf{x}, \tau)$)的非约束积分，并令波函数的变

*我们现在把 H 和 \mathcal{O} 所带的括号写成方括号，以提醒我们 $H[q(t), p(t)]$ 和 $\mathcal{O}[p(t), q(t)]$ 是处在固定时刻 t 的 $q_m(\mathbf{x}, t)$ 和 $p_m(\mathbf{x}, t)$ 的泛函。

量等于方程(9.2.2)给出的值:

$$\begin{aligned}
& \langle \beta, \text{out} | T \{ \mathcal{O}_A [P(t_A), Q(t_A)], \mathcal{O}_B [P(t_B), Q(t_B)], \dots \} | \alpha, \text{in} \rangle \\
&= \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} (dp_m(\mathbf{x}, \tau) / 2\pi) \\
&\quad \times \mathcal{O}_A [p(t_A), q(t_A)] \mathcal{O}_B [p(t_B), q(t_B)] \cdots \\
&\quad \times \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H [q(\tau), p(\tau)] \right\} \right] \\
&\quad \times \langle \beta, \text{out} | q(+\infty); +\infty \rangle \langle q(-\infty); -\infty | \alpha, \text{in} \rangle .
\end{aligned} \tag{9.2.3}$$

附带地, 这个结果立刻导出**方程(6.4.3), 我们重复使用的一个定理将不在质量壳上的Feynman图之和与Heisenberg绘景算符在精确能量本征态之间的矩阵元关联起来.

现在必须要考察如何计算作为最后一对因子出现在方程(9.2.3)中的波函数. 我们现在考察最简单且最重要的情况, 真空. (我们在6.4节看到, S -矩阵元可以轻松地从编时乘积的真空期望值中计算出来.) 我们像往常一样假定, 对于 $t \rightarrow \pm\infty$, 计算矩阵元时可以认为没有相互作用. “入”真空和“出”真空因而可以通过以下条件定义

$$\begin{aligned}
a_{\text{in}}(\mathbf{p}, \sigma, n) | \text{VAC, in} \rangle &= 0, \\
a_{\text{out}}(\mathbf{p}, \sigma, n) | \text{VAC, out} \rangle &= 0,
\end{aligned} \tag{9.2.4}$$

其中 a_{in} 和 a_{out} 分别是在 $t \rightarrow \infty$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时, 算符 $Q_m(\mathbf{x}, t)$ 的平面波展开中, 出现在 $\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iEt)$ 的系数中的算符. 例如, 对于中性无自旋粒子的实标量场, 我们实际上有

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p (2E)^{-1/2} \left[a_{\text{out}}^{\text{in}}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + \text{H.c.} \right], \tag{9.2.5}$$

$$\begin{aligned}
& \Pi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) \\
& \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} -i(2\pi)^{-3/2} \int d^3p (E/2)^{1/2} \left[a_{\text{out}}^{\text{in}}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} - \text{H.c.} \right]
\end{aligned} \tag{9.2.6}$$

** 只需要注意, 对于哈密顿量 $H[P(t), Q(t)] + \sum_A \int d^3x \epsilon_A(\mathbf{x}, t) \mathcal{O}_A(\mathbf{x}, t)$, S -矩阵由方程(9.2.3)给定为

$$\begin{aligned}
\langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle_\epsilon &= \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} (dp_m(\mathbf{x}, \tau) / 2\pi) \\
&\quad \times \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H [q(\tau), p(\tau)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_A \int d^3x \epsilon_A(\mathbf{x}, \tau) \mathcal{O}_A(\mathbf{x}, \tau) \right\} \right] \\
&\quad \times \langle \beta, \text{out} | q(+\infty); +\infty \rangle \langle q(-\infty); -\infty | \alpha, \text{in} \rangle .
\end{aligned}$$

方程(6.4.3)的右边是该表达式对 ϵ_a, ϵ_b 等, 在 $\epsilon = 0$ 处的导数, 其产生了方程(9.2.3)的右边, 再次使用方程(9.2.3)就立刻给出了方程(6.4.3)的右边.

其中 $p^0 \equiv E \equiv \sqrt{p^2 + m^2}$, 并且我们在这里使用了标量场传统的 Φ 和 Π 而非 Q 和 P , 并扔掉了不必要的指标 m, σ, n . 逆Fourier变换并取产生的表达式的线性组合, 我们有

$$a_{\text{out}}^{\text{in}} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \frac{e^{iEt}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \times \left[\sqrt{\frac{E}{2}} \Phi(\mathbf{x}, t) + i\sqrt{\frac{1}{2E}} \Pi(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (9.2.7)$$

正如9.1节中所提及的, “动量” $\Pi(\mathbf{x}, t)$ 作为一个变分导数 $-i\delta/\delta\phi(\mathbf{x}, t)$ 作用在 ϕ -基下的波函数, 所以在这个基下, 条件(9.2.4)变成

$$0 = \int d^3x e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} + E(\mathbf{p})\phi(\mathbf{x}) \right] \langle \phi(t \rightarrow \mp\infty); \mp\infty | \text{VAC}, \text{in} \rangle. \quad (9.2.8)$$

这个类常微分方程有一个著名的高斯解, 所以我们在这里尝试一下高斯的拟设:

$$\langle \phi(t \rightarrow \mp\infty); \mp\infty | \text{VAC}, \text{in} \rangle = \mathcal{N} \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \right). \quad (9.2.9)$$

其中核 \mathcal{E} 以及常数 \mathcal{N} 留待决定. 将其带入方程(9.2.8), 我们看到, 如果对所有的 ϕ

$$0 = \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[\int d^3y \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) - E(\mathbf{p})\phi(\mathbf{x}) \right] \quad (9.2.10)$$

或者, 换种形式, 如果

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{p})\phi(\mathbf{x}), \quad (9.2.11)$$

那么真空波函数的泛函微分方程被满足. 通过逆Fourier变换, 这个解是很容易找到的

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2\pi)^{-3} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} E(\mathbf{p}). \quad (9.2.12)$$

(回忆 $E(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$). 这实际上是核 \mathcal{E} 最有用的表示, 顺带地, 我们会注意到, 对于 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, \mathcal{E} 也可以写成负阶Hankel函数的形式

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{m}{2\pi^2 r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} K_{-1}(mr) \right), \quad (9.2.13)$$

其中 $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. 方程(9.2.9)中的常数 \mathcal{N} 可以从真空态的归一化条件中形式地获得, 但我们不会用到这个结果.

根据方程(9.2.9), 在标量场理论中计算真空期望值时, 方程(9.2.3)中后两个因子的乘积是

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC}, \text{out} | \phi(\infty); +\infty \rangle \langle \phi(-\infty); -\infty | \text{VAC}, \text{in} \rangle \\ &= |\mathcal{N}|^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[\phi(\mathbf{x}, +\infty)\phi(\mathbf{y}, +\infty) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \phi(\mathbf{x}, -\infty)\phi(\mathbf{y}, -\infty) \right] \right) \\ &= |\mathcal{N}|^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \epsilon \int d^3x d^3y \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \tau)\phi(\mathbf{y}, \tau) e^{-\epsilon|\tau|} \right), \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

其中 ϵ 是正的无限小. 为了获得最终表达式, 我们使用了任意适度光滑函数 $f(\tau)$ 的如下性质,

$$f(+\infty) + f(-\infty) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{-\epsilon|\tau|}. \quad (9.2.15)$$

现在将方程(9.2.14)代入(9.2.3)给出

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC, out} | T \left\{ \mathcal{O}_A [\Pi(t_A), \Phi(t_A)], \mathcal{O}_B [\Pi(t_B), \Phi(t_B)], \dots \right\} | \text{VAC, in} \rangle \\ &= |\mathcal{N}|^2 \int \prod_{\tau, \mathbf{x}} d\phi(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}} (d\pi(\mathbf{x}, \tau)/2\pi) \mathcal{O}_A [\pi(t_A), \phi(t_A)] \\ & \quad \times \mathcal{O}_B [\pi(t_B), \phi(t_B)] \cdots \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \pi(\mathbf{x}, \tau) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - H[\phi(\tau), \pi(\tau)] + \frac{1}{2} i\epsilon \int d^3x d^3y \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-\epsilon|\tau|} \phi(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{y}, \tau) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

我们将在9.4节看到, 方程(9.2.16)中指数变量的最后一项的全部效应是, 给动量空间中量场传播子的分母中提供 $-i\epsilon$, $[p^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1}$. 我们将不会普遍自旋的相应细节, 而是简单地陈述, 一般而言

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC, out} | T \left\{ \mathcal{O}_A [P_A(t_A), Q_A(t_A)], \mathcal{O}_B [P(t_B), Q(t_B)], \dots \right\} | \text{VAC, in} \rangle \\ &= |\mathcal{N}|^2 \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \frac{dp_m(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \right] \mathcal{O}_A [p(t_A), q(t_A)] \\ & \quad \times \mathcal{O}_B [p(t_B), q(t_B)] \cdots \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - H[\phi(\tau), \pi(\tau)] + i\epsilon \text{ terms} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.2.17)$$

其中“ $i\epsilon$ 项”的效应仅是在所有传播子的分母中加上正确的 $-i\epsilon$.

现在很适合提一下方程(9.2.17)中的场强无关因子, 例如常数 $|\mathcal{N}|^2$, 是不重要的. 这是因为这样的因子也给矩阵元 $\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle$ 提供贡献. 在计算编时乘积(或 S -矩阵)的真空期望值的连接部分时, 通过除以 $\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle$, 我们消除了非连真空涨落子图的贡献, 并且, 真空期望值中的任何常数因子在这个比值中被抵消了.

通过在方程(9.2.3)中插入合适的“波泛函”, 我们可以继续并计算多粒子态之间的矩阵元. 通过应用诸如(9.2.7)的湮灭算符的伴算符与真空态上, 我们可以计算它们; 正如谐振子, 那些波泛函结果是场乘以真空高斯中的Hermite多项式. 我们在这里不需要将其完全解出来, 因为, 正如6.4节所证明的, 为了能够计算 S -矩阵元, 真空期望值(9.2.17)是我们所需要的全部.

9.3 路径积分公式的拉格朗日版本

方程(9.1.38)或(9.2.17)中指数上的积分看起来像与哈密顿量 H 相联系的拉格朗日量 L . 这一特征有些误导, 这是因为这里的“动量” $p_a(t)$ 或 $p_n(\mathbf{x}, t)$ 是独立变量, 还没有与 $q_a(t)$ 或 $q_n(\mathbf{x}, t)$ 或它们的导数相关联. 然而, 存在很大且很重要的一类理论, 在这类理论中, 对“动量”的积分可以通过将其替换成正则形式体系所命令的值而完成, 在这个情况下, 路径积分中指数上的积分确实是拉格朗日量.

这些理论是哈密顿量是“动量”的二次型的理论——在场论的语言中

$$H[Q, P] = \frac{1}{2} \sum_{nm} \int d^3x d^3y A_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}[Q] P_n(\mathbf{x}) P_m(\mathbf{y}) + \sum_n \int d^3x B_{\mathbf{x}n}[Q] P_n(\mathbf{x}) + C[Q] \quad (9.3.1)$$

其中“矩阵” $A_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}$ 是一个实的, 对称且非奇异的矩阵. 那么方程(9.2.17)中指数的变量是 p 的二次型:

$$\begin{aligned} & \int d\tau \left\{ \int d^3x \sum_n p_n(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{nm} \int d^3x d^3y d\tau d\tau' \mathcal{A}_{\tau\mathbf{x}n, \tau'\mathbf{y}m}[q] p_n(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{y}, \tau') \\ & \quad - \sum_n \int d^3x \int d\tau \mathcal{B}_{\tau\mathbf{x}n}[q] p_n(\mathbf{x}, \tau) - \mathcal{C}[q], \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

其中

$$\mathcal{A}_{\tau\mathbf{x}n, \tau'\mathbf{y}m}[q] \equiv A_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}[q(\tau)] \delta(\tau - \tau'), \quad (9.3.3)$$

$$\mathcal{B}_{\tau\mathbf{x}n}[q] \equiv B_{\mathbf{x}n}[q(\tau)] - \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau), \quad (9.3.4)$$

$$\mathcal{C}[q] \equiv \int d\tau C[q(\tau)]. \quad (9.3.5)$$

现在, 类似(9.3.2)的二次型表达式, 它的指数的积分一般会正比于在指数变量的稳相点所计算的指数值. 对于有限个实变量 ξ_s , 这个公式变成

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_s d\xi_s \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \sum_{sr} \mathcal{A}_{sr} \xi_s \xi_r - i \sum_s \mathcal{B}_s \xi_s - i\mathcal{C} \right\} \\ &= (\text{Det} [i\mathcal{A}/2\pi])^{-1/2} \exp \left\{ -i\frac{1}{2} \sum_{sr} \mathcal{A}_{sr} \bar{\xi}_s \bar{\xi}_r - i \sum_s \mathcal{B}_s \bar{\xi}_s - i\mathcal{C} \right\}, \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

其中 $\bar{\xi}$ 是稳相点

$$\bar{\xi}_s = - \sum_r (\mathcal{A}^{-1})_{sr} \mathcal{B}_r. \quad (9.3.7)$$

(该公式的证明参看本章的附录.) 因此, 只要方程(9.2.17)中的 $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B$ 等独立于 p , 对于这样的哈密顿量, 通过将变量 p 的值设定在指数变量中二次型表达式的稳相点, 我们可以计算出对 p 的路径积分. 但是这个二次型的变分导数是

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) p_n(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] + i\epsilon \text{ terms} \right\} \\ &= \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) - \frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} H[q(\tau), p(\tau)]. \end{aligned}$$

($i\epsilon$ 项仅依赖于 q .) 因此使其为零的稳相“点” $\bar{p}_n(\mathbf{x}, t)$ 由正则公式给出

$$\dot{q}(\mathbf{x}, \tau) = \left[\frac{\delta H[q(\tau), p(\tau)]}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} \right]_{p=\bar{p}}. \quad (9.3.8)$$

若令 $p_n(\mathbf{x}, t)$ 等于这个值, 方程(9.2.17)中的指数变量是普通拉格朗日量

$$L[q(\tau), \dot{q}(\tau)] \equiv \int d^3x \left(\sum_n \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) \bar{p}_n(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), \bar{p}(\tau)] \right) \quad (9.3.9)$$

并且, 我们可以将方程(9.2.17)写为

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC, out} | T \{ \mathcal{O}_A [Q(t_A)], \mathcal{O}_B [Q(t_B)], \dots \} | \text{VAC, in} \rangle \\ &= |\mathcal{N}|^2 \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, n} dq_n(\mathbf{x}, \tau) \left(\text{Det} [2i\pi \mathcal{A}[q]] \right)^{-1/2} \\ & \quad \times \mathcal{O}_A [q(t_A)] \mathcal{O}_B [q(t_B)] \cdots \\ & \quad \times \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ L[q(\tau), \dot{q}(\tau)] + i\epsilon \text{ terms} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

(我们合并了对 p_n 的积分中的因子 $1/2\pi$ 与来自方程(9.3.6)行列式中的因子 $1/2\pi$.) 这正是所需的路径积分公式的拉格朗日形式.

在推导方程(9.3.10)时, 有必要假定算符 $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B, \dots$ 独立于正则“动量”. 这并不像看上去那样是个约束. 例如, 对于标量场论, 正则共轭于 Φ 的是 $\Pi = \dot{\Phi}$, 若算符的编时乘积中有一个算符是 $\dot{\Phi}(t)$, 通过将算符分别换为 $\Phi(t+d\tau)$ 和 $\Phi(t)$, 然后取矩阵元的差值, 再除以 $d\tau$, 最后令 $d\tau \rightarrow 0$, 这样是可能计算出这个矩阵元的. 等价地, 只要 t 不等于方程(9.3.10)中任何其它算符的时间变量, 我们就能对方程(9.3.10)做 t 的微分.

方程(9.3.10)中剩下的一个困难问题是 $\mathcal{A}[q]$ 的行列式. 如果 $\mathcal{A}[q]$ 是场独立的, 那么就不存在问题; 我们已经注意到总的常数对真空期望值的连接部分没有贡献. 其中我们除掉了正比于同一常数因子的真空-真空振幅. 以一组实标量场 Φ_n 的情况为例, 若有与其它各场的非导数耦合和/或与外流 J_n 的导数耦合, 则正是这种情况. 这里的拉格朗日量密度是

$$\mathcal{L} = - \sum_n \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda \Phi_n \partial^\lambda \Phi_n + J_n^\lambda \partial_\lambda \Phi_n \right] - V(\Phi).$$

7.5节的结果从一个到几个导数耦合标量的显然扩张表明了这个拉格朗日量暗示了哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \sum_n \left[\frac{1}{2} \Pi_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_n)^2 \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{J}_n \cdot \nabla \Phi_n + J_n^0 \Pi_n + \frac{1}{2} (J_n^0)^2 \right] + \int d^3x V(\Phi). \end{aligned}$$

(Φ_n 被取成实变量, 但通过将复标量分成实部和虚部也可将其纳入进来.) 一般而言, 存在一个对 Π_n 是线性的非平庸项, 但二次项的系数是个常数, 正是单位“矩阵”:

$$\mathcal{A}_{x_n, x'_n} = \delta^4(x - x') \delta_{nn'}.$$

方程(9.3.10)中的因子 $\left(\text{Det} [2i\pi \mathcal{A}[q]] \right)^{-1/2}$ 在这里是个场无关常数, 因而是没有效应的.

然而, 事情不总是那么简单的. 作为第二个例子, 让我们考察所谓的非线性 σ -模型, 其拉格朗日量密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{nm} \partial_\lambda \Phi_n \partial^\lambda \Phi_m \left[\delta_{nm} + U_{nm}(\Phi) \right] - V(\Phi).$$

一个直接的计算给出哈密顿量

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi_n \left(1 + U(\Phi) \right)_{nm}^{-1} \Pi_m + \frac{1}{2} \nabla \Phi_n \cdot \nabla \Phi_m \left(1 + U(\Phi) \right)_{nm} + V(\Phi) \right].$$

这里的 \mathcal{A} 是场相关量

$$\mathcal{A}_{nx,my} = \left[1 + U(\Phi(x)) \right]_{nm}^{-1} \delta^4(x-y).$$

在这类情况下, 利用关系 $\text{Det } \mathcal{A} = \exp \text{Tr} \ln \mathcal{A}$, 这个行列式可以重新表述为对有效拉格朗日量的贡献. 通过把连续的时空位置替换成围绕在时空体积 Ω 非常小的独立区域周围的格点, 我们可以把 $\mathcal{A}_{nx,my}$ 中的 δ -函数重新解释成 $\delta^4(x-y) = \Omega^{-1} \delta_{x,y}$, 使得

$$(\ln \mathcal{A})_{nx,my} = \delta_{x,y} \left[-\ln(1 + U(\Phi(x))) - 1 \cdot \ln \Omega \right]_{nm}$$

其中矩阵的对数现在由它的幂级数展开式定义

$$\ln(1 + U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \dots$$

为了计算这个迹, 我们注意到 $\sum_x \dots = \Omega^{-1} \int d^4x \dots$. 那么这里的行列式因子是

$$\text{Det } \mathcal{A} \propto \exp \left[-\Omega^{-1} \int d^4x \text{tr} \ln \left[1 + U(\Phi(x)) \right] \right],$$

其中“tr”被理解为普通矩阵意义下的迹. 比例常数(源于 $-\ln \Omega$ 项)是场无关的, 因而现在对其不感兴趣. 我们可以认为这个行列式提供了对有效拉格朗日量密度的一个修正

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2} i \Omega^{-1} \text{tr} \ln \left[1 + U(\Phi(x)) \right].$$

因子 Ω^{-1} 可以写成紫外发散积分

$$\Omega^{-1} = \delta^4(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \cdot 1.$$

我们不在这里展示它, 但是对于这个理论, 通过将等时对易项考虑进标量场时间导数的传播子内,⁷ $\Delta \mathcal{L}$ 所贡献的Feynman图中的额外项也可以在正则形式体系下被导出. 忽视这个修正将导致 S -矩阵对标量场定义方式的伪依赖性, 这也与拉格朗日量在标量场变换下的任何对称性不相容.

即便路径积分公式(9.3.10)中的因子 $(\text{Det } \mathcal{A})^{-1/2}$ 是场无关的, 这个公式中的拉格朗日量也可能不是我们所出发的拉格朗日量. 作为一个例子, 我们来考察一组实矢量场的理论, 其拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = - \sum_n \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{n\lambda} - \partial_\lambda A_{n\mu}) (\partial^\mu A_n^\lambda - \partial^\lambda A_n^\mu) + \frac{1}{2} m_n^2 A_{n\lambda} A_n^\lambda + J_n^\lambda A_{n\lambda} \right],$$

其中流 J_n^μ 要么是外部产生的c-数要么依赖其它场(在这种情况下, 描述其它那些场的项要加到拉格朗日量上). 通过7.5节结果的一个简单扩张, 我们看到哈密顿量是

$$H = \int d^3x \sum_n \left[\frac{1}{2} \Pi_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}_n)^2 + \frac{1}{2} m_n^2 \mathbf{A}_n^2 + \frac{1}{2m_n^2} (\nabla \cdot \Pi_n)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{A}_n - \frac{1}{m_n^2} J_n^0 \nabla \cdot \Pi_n + \frac{1}{2m_n^2} (J_n^0)^2 \right]$$

又一次地, 要理解成必须加上包含出现在 J_n^μ 中的任何场的其它项. 这里的二次项系数要比我们第一个例子的二次项系数复杂些:

$$\mathcal{A}_{nix,mjy} = \delta_{nm} \left[\delta_{ij} \delta^4(x-y) - \frac{1}{2m_n^2} \nabla_i \nabla_j \delta^4(x-y) \right],$$

但是它是场无关的, 使得因子 $(\text{Det } \mathcal{A})^{-1/2}$ 没有效应. 另一方面, 拉格朗日量(9.3.9)在这里不是我们所出发的拉格朗日量; 它完全以 \mathbf{A} 及其时空导数的形式表示, 而对任何时间分量 A^0 没有依赖性. 由于这个原因, 方程(9.3.10)的Lorentz不变性是很不明显的.

为了补救这点, 我们可以再引入辅助场. 假定我们给哈密顿量加上这项

$$\Delta H = -\frac{1}{2} \sum_n m_n^2 \int d^3x \left[A_n^0 - m_n^{-2} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n + m_n^{-2} J_n^0 \right]^2$$

并对 A_n^0 以及 \mathbf{A}_n 和 $\mathbf{\Pi}_n$ 积分. 由于 ΔH 是 A^0 的二次型 (A^0 的二阶项系数是场无关的), 它的稳相值为零, 这只能引入一个总的场无关因子. 然而, 假定我们在积掉 A_n^0 之前积掉 $\mathbf{\Pi}_n$. 路径积分(9.2.17)中的哈密顿量在这里被替换成

$$H + \Delta H = \int d^3x \sum_n \left[\frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}_n)^2 + \frac{1}{2} m_n^2 \mathbf{A}_n^2 - \frac{1}{2} m_n^2 (A_n^0)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{A}_n - J_n^0 A_n^0 + A_n^0 \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n \right].$$

这依然是 $\mathbf{\Pi}_n$ 的二次型, 其中二次型系数是场无关的(并且较简单), 所以对 $\mathbf{\Pi}_n$ 的积分可以通过将 $\mathbf{\Pi}_n$ 替换成它在泛函 $\sum_n \int d^3x \mathbf{\Pi}_n \cdot \dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$ 的稳相点值而完成:

$$\mathbf{\Pi}_n = \dot{\mathbf{A}}_n + \nabla A_n^0.$$

随着 $\mathbf{\Pi}_n$ 以这种方式被消除, $\sum_n \int d^3x \mathbf{\Pi}_n \cdot \dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$ 正是我们所出发的Lorentz-不变拉格朗日量.

为了兼顾到引入类似 A_n^0 的辅助场的可能需要, 从现在起, 在以场 ψ_ℓ 的形式消除正则共轭后, 其中 ψ_ℓ 包含正则场 q_n 和辅助场 c_r , 我们写出路径积分公式

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC, out} | T \left\{ \mathcal{O}_A [\Psi_A(t_A)], \mathcal{O}_B [\Psi_B(t_B)], \dots \right\} | \text{VAC, in} \rangle \\ & \propto \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, n} d\psi_n(\mathbf{x}, \tau) \mathcal{O}_A [\psi(t_A)] \mathcal{O}_B [\psi(t_B)] \dots \\ & \times \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ L[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)] + i\epsilon \text{ terms} \right\} \right], \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

现在, 它被理解成 L 包含源于可能的场相关因子 $(\text{Det } \mathcal{A})^{-1/2}$ 的任何项.

9.4 Feynman规则的路径积分推导

我们现在可以用路径积分形式体系来推导一大类理论中的Feynman规则. 在这里, 我们将集中于场算符(及其伴算符)编时乘积的真空期望值,

$$M_{\ell_A \ell_B \dots}(x_A x_B \dots) = \frac{\langle \text{VAC, out} | T \{ \Psi_{\ell_A}(x_A), \Psi_{\ell_B}(x_B) \dots \} | \text{VAC, in} \rangle}{\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle} \quad (9.4.1)$$

通过剥夺末态传播子所联系的每一场, 将它们替换成相对应自由场中乘以产生算符或湮灭算符的系数函数, 并对这些系数函数上的指标求和, 我们可以从中获得S-矩阵元(见6.4节).

对于较简单的哈密顿量是 Π 的二次型的理论, 方程(9.3.11)给出

$$M_{\ell_A \ell_B \dots}(x_A x_B \dots) = \frac{\int \left[\prod_{x, \ell} d\psi_\ell(x) \right] \psi_{\ell_A}(x_A) \psi_{\ell_B}(x_B) \dots e^{iI[\psi]}}{\int \prod_{x, \ell} d\psi_\ell(x) e^{iI[\psi]}}, \quad (9.4.2)$$

其中 $I[\psi]$ 是作用量

$$I[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ L[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)] + i\epsilon \text{ terms} \right\} \quad (9.4.3)$$

而 L 现在包含方程(9.3.10)中场相关行列式可以产生的任何项.

我们现在假定, 拉格朗日量是拉格朗日量密度的积分, 拉格朗日量密度由一个二次型 \mathcal{L}_0 , 其不含相互作用, 加上一个拉格朗日相互作用密度 \mathcal{L}_1 构成:

$$L[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)] = \int d^3x \left[\mathcal{L}_0(\psi(\vec{x}, \tau), \partial_\mu(\vec{x}, \tau)) + \mathcal{L}_1(\psi(\vec{x}, \tau), \partial_\mu(\vec{x}, \tau)) \right]. \quad (9.4.4)$$

即, 作用量(9.4.3)是

$$I[\psi] = I_0[\psi] + I_1[\psi], \quad (9.4.5)$$

$$I_0[\psi] = \int d^4x \mathcal{L}_0(\psi(\vec{x}, \tau), \partial_\mu(\vec{x}, \tau)) + i\epsilon \text{ terms}, \quad (9.4.6)$$

$$I_1[\psi] = \int d^4x \mathcal{L}_1(\psi(\vec{x}, \tau), \partial_\mu(\vec{x}, \tau)). \quad (9.4.7)$$

既然 \mathcal{L}_0 是场的二次型, 我们总可以将 I_0 写成普遍的二次型形式

$$I_0[\psi] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \sum_{\ell, \ell'} \mathcal{D}_{\ell x, \ell' x'} \psi_\ell(x) \psi_{\ell'}(x'). \quad (9.4.8)$$

例如, 对于一个质量为 m 的实标量场, 非微扰拉格朗日量是

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (9.4.9)$$

而 I_0 中的 $i\epsilon$ 项由方程(9.2.16)给定为

$$\frac{1}{2} i\epsilon \int dt \int d^3x d^3x' \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', t) \quad (9.4.10)$$

所以这里

$$\mathcal{D}_{x, x'} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \delta^4(x - x') + m^2 \delta^4(x - x') - i\epsilon \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (9.4.11)$$

(由于 $i\epsilon$ 项中的 $e^{-\epsilon|\tau|}$ 因子所产生的是高阶 ϵ 修正, 我们现在扔掉它.) 为了处理相互作用, 我们将以 I_1 的幂级数展开指数,

$$\exp(iI[\psi]) = \exp(iI_0[\psi]) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} (I_1[\psi])^N \quad (9.4.12)$$

然后将 I_1 展成场的幂级数. 我们在方程(9.4.2)的分子和分母中所遇到的普遍积分形式如下

$$\mathcal{J}_{\ell_1 \ell_2 \dots}(x_1 x_2 \dots) \equiv \int \left(\prod_{\ell, x} d\psi_\ell(x) \right) e^{iI_0[\psi]} \psi_{\ell_1}(x_1) \psi_{\ell_2}(x_2) \dots, \quad (9.4.13)$$

其中场因子 $\psi_{\ell_1}(x_1)$, $\psi_{\ell_2}(x_2)$ 等, 源于 $I_1[\psi]$ 和/或原始出现在方程(9.4.2)的分子中的场因子 $\psi_{\ell_A}(x_A)$ 等. 有了形式为(9.4.8)的 $I_0[\psi]$, 积分(9.4.13)与本章附录所计算的积分为同一形式, 只不过离散指标 s 被替换成指标对 ℓ, x . 因而我们可以使用方程(9.A.12)和(9.A.15), 其在这里给出

$$\mathcal{J}_{\ell_1 \ell_2 \dots}(x_1 x_2 \dots) = \left[\text{Det} \left(\frac{i\mathcal{D}}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \sum_{\text{pairings of fields}} \prod_{\text{pairs}} \left[-i\mathcal{D}^{-1} \right]_{\text{paired fields}}. \quad (9.4.14)$$

这恰好等同于以协变形式计算方程(9.4.2)分子的坐标空间Feynman规则: 我们展开相互作用 I_1 , 然后对所有 I_1 中的场与其自身以及与 $\psi_{\ell_A}(x_A)$ 等场的配对方式求和, 其中每个配对的贡献由 $I_1[\psi]$ 中场系数乘积和“传播子” $-i\Delta$ 乘积的时空积分给出, 其中

$$\Delta_{\ell_1 \ell_2}(x_1, x_2) = (\mathcal{D}^{-1})_{\ell_1 x_1, \ell_2 x_2}. \quad (9.4.15)$$

(方程(9.4.14)中的因子 $[\text{Det}(i\mathcal{D}/2\pi)]^{-1/2}$ 实际上代表了不与任何其它线相连, 单圈个数不限的图的贡献, 但是无论怎样, 这个因子在比值(9.4.2)中抵消.)

接下来计算传播子(9.4.15). 我们将方程(9.4.15)解释成一个积分方程

$$\sum_{\ell_2} \int d^4 x_2 \mathcal{D}_{\ell_1 x_1, \ell_2 x_2} \Delta_{\ell_2 \ell_3}(x_2, x_3) = \delta^4(x_1 - x_3) \delta_{\ell_1 \ell_3}. \quad (9.4.16)$$

在没有外场时, 平移不变性使得 \mathcal{D} 必须仅是 $x_1 - x_2$ 的函数, 其可以写成一个Fourier积分

$$\mathcal{D}_{\ell_1 x_1, \ell_2 x_2} \equiv (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x_1 - x_2)} \mathcal{D}_{\ell_1 \ell_2}(p). \quad (9.4.17)$$

那么方程(9.4.16)的解是

$$\Delta_{\ell_1 \ell_2}(x_1, x_2) = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x_1 - x_2)} \mathcal{D}_{\ell_1 \ell_2}^{-1}(p), \quad (9.4.18)$$

其中 \mathcal{D}^{-1} 是矩阵 \mathcal{D} 的普通逆. 正如我们将看到的, $i\epsilon$ 项拥有使得该逆对所有实值的 p 定义良好的性质. 因此我们将计算传播子的问题退化成一个有限矩阵的逆.

首先考察一个有质量标量场, 对于该标量场, 核 \mathcal{D} 取形式(9.4.11). 我们可以将其写成一个Fourier积分

$$\mathcal{D}_{x,y} = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} \left(p^2 + m^2 - i\epsilon E(\mathbf{p}) \right),$$

所以传播子是

$$\Delta(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} \left(p^2 + m^2 - i\epsilon E(\mathbf{p}) \right)^{-1}.$$

我们认出这与算符方法所获得的标量传播子是精确相同的. (由于 ϵ 和 $\epsilon E(\mathbf{p})$ 都是正的无限小量, 它们的差异是无关紧要的.)

第二个例子, 考察一有质量的实矢量场. 非微扰拉格朗日量是

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu .$$

我们可以再次将 $I_0[\psi]$ 写成(9.4.8)的形式, 其中核

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\rho\sigma, \sigma y} &= \left[\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\sigma \partial y^\rho} + m^2 \eta_{\rho\sigma} \right] \delta^4(x-y) + i\epsilon \text{ terms} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} \left[\eta_{\rho\sigma} p^2 - p_\rho p_\sigma + m^2 \eta_{\rho\sigma} + i\epsilon \text{ terms} \right] . \end{aligned}$$

我们并不费心在这里证明它, 但是“ $+i\epsilon$ 项”在这里采取简单形式 $-i\epsilon E(\mathbf{p})\eta_{\rho\sigma}$. 那么矢量场传播子通过简单地对积分中的 4×4 矩阵取逆得到

$$\Delta_{\rho\sigma}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int \frac{d^4 p e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon E(\mathbf{p})} \left[\eta_{\rho\sigma} + \frac{p_\rho p_\sigma}{m^2} \right] .$$

(分子中成正比于 ϵ 的项被扔掉了. 在定义被积函数是如何在质量壳 $p^2 = -m^2$ 附近是如何被处理时, 它们在分母中是不重要的.) 这与用算符方法导出的传播子是相同的, 除了成正比于 $\delta(x^0 - y^0)$ 的非协变项现在被禁止了. 这些非协变项精确是抵消相互作用哈密顿量中的非协变项所需要的, 但是想Feynman规则中的顶点贡献是通过观察协变拉格朗日量直接获得的, 这样的抵消不再需要了.

有导数耦合的理论是同样简单的. 场导数 $\partial_\mu \psi_\ell(x)$ 与任何其它场 $\psi_m(y)$ (或许它本身, 一个场导数)的配对产生的因子是

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu \psi_\ell(x) \psi_m(y) \rangle &= \frac{\int \left[\prod_{x, \ell} d\psi_\ell(x) \right] \partial_\mu \psi_\ell(x) \psi_m(y) e^{iI[\psi]}}{\int \left[\prod_{x, \ell} d\psi_\ell(x) \right] e^{iI[\psi]}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \psi_\ell(x) \psi_m(y) \rangle . \end{aligned} \quad (9.4.19)$$

这样的传播子没有非协变部分. 例如, 对于一个实标量场, $\partial_\mu \phi$ 与 $\partial_\nu \phi$ 的配对给出动量空间传播子 $k_\mu k_\nu / (k^2 + m^2 - i\epsilon)$. 另外, 正如我们在上一节看到的, 在有与其它场的导数耦合的标量场理论中, 顶点可以直接从拉格朗日量中读出, 并且分别是协变的.

9.5 费米子的路径积分

我们现在转向将路径积分体系扩展至既包含费米子又包含玻色子的理论. 以一个纯形式的方法处理将是简单的, 通过类比玻色的情况, 加上这给出“正确”Feynman规则的正当性. 然而, 我们在这里将直接从量子力学原理导出费米的路径积分形式体系, 就像我们对玻色子做的那样.⁹

像之前一样, 我们将从普遍的量子力学系统出发, 其有“坐标” Q_a 和正则共轭“动量” P_a , 但现在满足反对易而非对易关系:

$$\{Q_a, P_b\} = i \delta_{ab} , \quad (9.5.1)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = \{P_a, P_b\} = 0 . \quad (9.5.2)$$

(它们是Schrödinger-绘景算符, 或者, 换句话说, 是时间 $t = 0$ 时的Heisenberg-绘景算符.) 稍后我们将会把离散指标 a 替换成空间指标 \mathbf{x} 和一个场指标 m .

我们首先希望构建 Q 和 P 所作用的态的一个完备基. 注意到对于任何给定的 a , 我们有

$$Q_a^2 = P_a^2 = 0. \quad (9.5.3)$$

由此得出, 总存在“右矢”态 $|0\rangle$, 它被所有的 Q_a 湮灭:

$$Q_a|0\rangle = 0, \quad (9.5.4)$$

以及“左矢”态 $\langle 0|$, 被所有的 P_a (从右边)湮灭:

$$\langle 0|P_a = 0. \quad (9.5.5)$$

例如, 我们可以取

$$|0\rangle \propto \left(\prod_a Q_a \right) |f\rangle, \quad \langle 0| \propto \langle g| \left(\prod_a P_a \right),$$

其中 $|f\rangle$ 和 $\langle g|$ 是任何使这些表达式不为零的右矢和左矢. (除非算符 $\prod_a Q_a$ 和 $\prod_a P_a$ 为零, 否则它们对于所有的 $|f\rangle$ 和 $\langle g|$ 不可能为零, 而我们假定了不是这样的情况.) 这些态通过方程(9.5.3)满足方程(9.5.4)和(9.5.5). 它们一般而言不唯一, 这是因为可能存在其它的玻色自由度以区分各种可能的 $|0\rangle$ 和 $\langle 0|$, 但简单起见, 我们在这里将限制在这样的情况, 唯一的自由度是那些被费米算符 Q_a 和 P_a 所描述的自由度, 并假定满足方程(9.5.4)和(9.5.5)的态除了相差一个常数因子外是唯一的, 我们选择这个因子, 使得

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (9.5.6)$$

(注意, 如果我们定义了 $\langle 0|$ 为 Q_a 本征值为零的左本征态, 就不能附加这个归一化约定, 这是因为在这一情况下, $\langle 0|\{Q_a, P_a\}|0\rangle$ 将为零, 这与方程(9.5.1)将暗示 $\langle 0|0\rangle = 0$.)

正如我们在7.5节中所看到的, 在Dirac理论中, Q_a 不是厄密的, 但反而有伴 $-iP_a$, 在这一情况下, $\langle 0|$ 可以简单地视为 $|0\rangle$ 的伴. 然而, 存在费米算符(例如卷II中引入的“鬼”场), 对于这样的算符, P_a 与 Q_a 的伴是不相关的. 在下文中, 我们不需要假定有关 Q_a 或 P_a 的伴, 亦或 $|0\rangle$ 和 $\langle 0|$ 之间关系的任何事情.

这个系统的态的完备基由 $|0\rangle$ 以及任意个不同的 P 作用在 $|0\rangle$ 上的态(关于指标 a, b, \dots 反对称)

$$|a, b, \dots\rangle \equiv P_a P_b \dots |0\rangle \quad (9.5.7)$$

提供. 即, P 与 Q 的任意算符函数作用在这些态上的结果可以写成同一组态的线性组合. 特别地, 如果指标 a 不等于 $|b, c, \dots\rangle$ 中出现的任何一个指标, 那么

$$Q_a|b, c, \dots\rangle = 0, \quad (9.5.8)$$

$$P_a|b, c, \dots\rangle = |a, b, c, \dots\rangle. \quad (9.5.9)$$

另一方面, 如果 a 等于序列 b, c, \dots 中的一个指标, 我们总可以重写这个态(或许要改变它的符号), 使得 a 是这些指标的第一个, 在这一情况下, 我们有

$$Q_a|a, b, c, \dots\rangle = i|b, c, \dots\rangle, \quad (9.5.10)$$

$$P_a|a, b, c, \dots\rangle = 0. \quad (9.5.11)$$

类似地, 我们可以定义一组完备对偶基, 由 $\langle 0|$ 以及态(关于指标也是反对称的)

$$\langle a, b, \dots | \equiv \langle 0 | \dots (-iQ_b)(-iQ_a) \quad (9.5.12)$$

组成. 利用方程(9.5.4)—(9.5.6)以及反对易关系(9.5.1), 我们看到这些态的标量积取值

$$\begin{aligned} \langle c, d, \dots | a, b, \dots \rangle &= \langle 0 | \dots (-iQ_d)(-iQ_c) P_a P_b \dots | 0 \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{如果 } \{c, d, \dots\} \neq \{a, b, \dots\} \\ 1 & \text{如果 } c = a, d = b, \text{ 等等} \end{cases} \end{aligned} \quad (9.5.13)$$

其中 $\{\dots\}$ 在这里指代括号内不考虑顺序的指标集合.

在推导Feynman规则时, 我们希望能够将类似(9.5.7)这样的对中间态求和重写成对 Q_a 或 P_a 的本征态的积分. 然而, 对于这些算符是不可能通常意义下的(除零以外)本征值. 假定我们尝试找到一个态 $|q\rangle$, 其(对于所有的 a)满足

$$Q_a |q\rangle = q_a |q\rangle. \quad (9.5.14)$$

从方程(9.5.2), 我们看到

$$q_a q_b + q_b q_a = 0 \quad (9.5.15)$$

这对于普通数是不可能的. 然而, 没有什么阻止我们引入“变量”(称为Grassmann(格拉斯曼)变量) q_a 的代数, 只要考察的是物理Hilbert空间, 其像c-数一样作用, 但其仍然满足反对易关系(9.5.15). 我们进一步要求

$$\{q_a, q'_b\} = \{q_a, Q_b\} = \{q_a, P_b\} = 0, \quad (9.5.16)$$

其中 q 和 q' 代表这些变量的任意两个“值”. 我们现在构建满足方程(9.5.14)的本征态

$$|q\rangle = \exp\left(-i \sum_a P_a q_a\right) |0\rangle \quad (9.5.17)$$

其中指数像往常一样通过它的幂级数展开定义. (为了证明方程(9.5.14), 利用所有 $P_a q_a$ 彼此对易且平方为零的性质, 使得像方程(9.5.14)所要求的那样

$$\begin{aligned} [Q_a - q_a] |q\rangle &= [Q_a - q_a] \exp(-i P_a q_a) \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) |0\rangle \\ &= [Q_a - q_a] [1 - i P_a q_a] \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) |0\rangle \\ &= [-i \{Q_a, P_a\} q_a - q_a] \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) |0\rangle = 0. \end{aligned}$$

) 我们也可以定义左本征态 $\langle q|$ (不是 $|q\rangle$ 的伴)为

$$\langle q| \equiv \langle 0| \left(\prod_a Q_a \right) \exp\left(-i \sum_a q_a P_a\right) = \langle 0| \left(\prod_a Q_a \right) \exp\left(+i \sum_a P_a q_a\right), \quad (9.5.18)$$

其中 \prod_a 是处在我们取作标准顺序下的乘积. 通过与方程(9.5.14)相同的讨论, 我们看到

$$\langle q|Q_a = \langle q|q_a. \quad (9.5.19)$$

这些本征态有标量积

$$\begin{aligned} \langle q'|q\rangle &= \langle 0| \left(\prod_a Q_a \right) \exp \left(i \sum_b P_b (q'_b - q_b) \right) |0\rangle \\ &= \langle 0| \left(\prod_a Q_a \right) \left(\prod_b (1 + iP_b (q'_b - q_b)) \right) |0\rangle \end{aligned}$$

将每一 Q_a (从最右端开始)移至右边产生因子 $i^2(q'_a - q_a)$, 我们可以将这个因子移至右边并移出标量积, 所以

$$\langle q'|q\rangle = \prod_a (q_a - q'_a). \quad (9.5.20)$$

我们将看到方程(9.5.20)在对 q 的积分中扮演了 δ -函数的角色.

以同样的方式, 我们可以构建 P_a 的右本征态和左本征态:

$$P_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad (9.5.21)$$

$$\langle p| P_a = \langle p| p_a, \quad (9.5.22)$$

其中 p_a 是类似于 q_a 的反对易 c -数(为了方便一般取为与 q_a 以及所有的费米算符反对易, 并且彼此之间也反对易), 并且

$$|p\rangle = \exp \left(-i \sum_a Q_a p_a \right) \left(\prod_b P_b \right) |0\rangle \quad (9.5.23)$$

$$\langle p| = \langle 0| \exp \left(-i \sum_a p_a Q_a \right) \quad (9.5.24)$$

其有标量积(现在是通过将 P 移至左边导出的)

$$\langle p'|p\rangle = \prod_a (p'_a - p_a). \quad (9.5.25)$$

这两类本征态彼此之间的标量积是

$$\begin{aligned} \langle q|p\rangle &= \langle q| \exp \left(-i \sum_a Q_a p_a \right) \left(\prod_a P_a \right) |0\rangle \\ &= \left(\prod_a \exp(-iq_a p_a) \right) \langle q| \left(\prod_a P_a \right) |0\rangle \\ &= \left(\prod_a \exp(-iq_a p_a) \right) \langle 0| \left(\prod_a Q_a \right) \left(\prod_a P_a \right) |0\rangle \end{aligned}$$

因而

$$\langle q|p\rangle = \chi_N \exp \left(-i \sum_a q_a p_a \right) = \chi_N \exp \left(i \sum_a p_a q_a \right), \quad (9.5.26)$$

其中 χ_N 是仅依赖于 Q_a 算符个数 N 的相位:

$$\chi_N \equiv \langle 0 | \left(\prod_a Q_a \right) \left(\prod_a P_a \right) | 0 \rangle = i^N (-1)^{N(N-1)/2} .$$

我们也发现了更为简单的

$$\langle p | q \rangle = \prod_a \exp(-ip_a q_a) . \quad (9.5.27)$$

很容易看到态 $|q\rangle$ 在某种意义上是完备基.($|p\rangle$ 也是如此.) 从定义(9.5.17), 我们看到在这个普遍基下, 态 $|a, b, \dots\rangle$ 恰好是(相差一个相位) $|q\rangle$ 展成 q 的乘积之和中乘积 $q_a q_b \dots$ 的系数. 因此, 我们可以将任意态 $|f\rangle$ 写成形式

$$|f\rangle = f_0 |q\rangle_0 + \sum_a f_a |q\rangle_a + \sum_{a \neq b} f_{ab} |q\rangle_{ab} + \dots ,$$

其中 f 是数值系数, 而 $|q\rangle$ 上的下标 a, b, \dots 代表 $|q\rangle$ 中 $q_a q_b \dots$ 的系数.

在对态的求和中, 引入一类对费米变量的积分将是非常方便的, 这称为Berezin(别列津)积分,¹⁰ 其被设计成将这种反对易 c -数乘积的系数挑选出来. 对于任何一组这样的变量 ξ_n (要么 p 要么 q 要么两者都是), 最普遍的函数 $f(\xi)$ (要么是一个 c -数要么是类似 $|q\rangle$ 的态矢)可以写成形式

$$f(\xi) = \left(\prod_n \xi_n \right) c + \text{terms with fewer } \xi \text{ factors} \quad (9.5.28)$$

而对 ξ 的积分简单地定义为

$$\int \left(\prod_n \tilde{d}\xi_n \right) f(\xi) \equiv c \quad (9.5.29)$$

其中方程(9.5.29)中的波浪号代表我们使用了方便的约定, 即微分所写的次序与方程(9.5.28)中积分变量乘积的次序相反. 既然这个乘积在任意两个 ξ 的交换下是反对称的, 积分在任意两个 $d\xi$ 的交换下也是反对称的, 所以这些“微分”实际上是反对易的

$$d\xi_n d\xi_m + d\xi_m d\xi_n = 0 . \quad (9.5.30)$$

另外, 系数 c 可能自身依赖于与我们所要积分的 ξ 反对易的非积分 c -数变量, 在这一情况下, 在积分之前, 通过将所有的 ξ 移至 c 的左边以标准化 c 的定义是重要的, 这也是我们在方程(9.5.28)中所做的.

例如, 一对反对易 c -数 ξ_1 与 ξ_2 的最普遍函数采取形式

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2 c_{12} + \xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + d$$

采取之上形式的原因是 ξ_1 和 ξ_2 的平方以及所有高次幂为零. 这个函数有积分

$$\begin{aligned} \int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2 c_{12} + c_1 , & \int d\xi_2 f(\xi_1, \xi_2) &= -\xi_1 c_{12} + c_2 , \\ \int d\xi_2 d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) &= c_{12} . \end{aligned}$$

注意到多重积分与重复积分是相同的:

$$\int d\xi_2 d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) = \int d\xi_2 \left[\int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) \right],$$

这个结果可以轻松地扩展至对任意个费米变量的积分. (为了获取这一结果而没有额外的符号因子, 我们取方程(9.5.29)中微分乘积的次序为方程(9.5.28)中变量乘积的逆序.) 诚然, 我们可以先定义对单个反对易c-数 ξ_1 的积分, 然后以往常的方式通过迭代定义多重积分. 反对易c-数的最普遍函数对任何一个反对易c-数都是线性的:

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots) = b(\xi_2 \dots) + \xi_1 c(\xi_2 \dots)$$

(因为 $\xi_1^2 = 0$), 并且它对 ξ_1 的积分定义为

$$\int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2, \dots) = c(\xi_2, \dots).$$

重复这一过程给出方程(9.5.28)与(9.5.29)所定义的同—多重积分.

这个积分定义分享了一些对普通实变量(从 $-\infty$ 到 $+\infty$)的多重积分的性质, 但存在重要的差异.

显然, Berezin积分是线性的, 也就是说

$$\int \left(\prod_n \tilde{d}\xi_n \right) [f(\xi) + g(\xi)] = \int \left(\prod_n \tilde{d}\xi_n \right) f(\xi) + \int \left(\prod_n \tilde{d}\xi_n \right) g(\xi) \quad (9.5.31)$$

以及

$$\int \left(\prod_n \tilde{d}\xi_n \right) [f(\xi) a(\xi')] = \left[\int \left(\prod_n \tilde{d}\xi_n \right) f(\xi) \right] a(\xi'), \quad (9.5.32)$$

其中 $a(\xi')$ 是我们所没有积分的反对易c-数 ξ'_m 的任意函数(包含一个常数). 然而, 相对于左乘的线性不是非常明显. 如果我们对 ν 个变量积分, 那么由于假定 ξ'_m 与所有的 ξ_n 反对易, 我们有

$$a((-)^\nu \xi') \left(\prod_n \xi_n \right) = \left(\prod_n \xi_n \right) a(\xi')$$

以及随之的

$$\int \left(\prod_n d\xi_n \right) [a((-)^\nu \xi') f(\xi)] = a(\xi') \int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi). \quad (9.5.33)$$

因而取微分 $d\xi_n$ 与所有的反对易变量(包括 ξ_n)反对易是非常方便的(尽管不是严格必须的):

$$(d\xi_n) \xi'_m + \xi'_m (d\xi_n) = 0 \quad (9.5.34)$$

在这一情况下, 方程(9.5.33)变成更简单的

$$\int a(\xi') \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi) = a(\xi') \int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi). \quad (9.5.35)$$

与普通积分的另一个类似点是, 对于任意一个独立于 ξ 的反对易c-数 ξ' ,

$$\int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi + \xi') = \int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi) \quad (9.5.36)$$

这是因为将 ξ 偏移一个常数仅影响 f 中个数小于 ξ -变量总数的项.

另一方面, 考察一个变量变换

$$\xi_n \rightarrow \xi'_n = \sum_m \mathcal{S}_{nm} \xi_m, \quad (9.5.37)$$

其中 \mathcal{S} 是一个任意的普通数的非奇异矩阵. 新变量的积是

$$\prod_n \xi'_n = \sum_{m_1 m_2 \dots} \left(\prod_n \mathcal{S}_{nm_n} \xi_{m_n} \right).$$

但 $\prod_n \xi_{m_n}$ 在这里恰与乘积(处在原始顺序中) $\prod_n \xi_n$ 是相同的, 除了一个符号 $\epsilon[m]$, 其根据置换 $n \rightarrow m_n$ 是原始顺序的偶置换或奇置换而分别是+1或-1:

$$\prod_n \xi'_n = \left[\sum_{m_1 m_2 \dots} \left(\prod_n \mathcal{S}_{nm_n} \right) \epsilon[m] \right] \prod_n \xi_n = (\text{Det } \mathcal{S}) \prod_n \xi_n.$$

无论我们将 ξ_n 取成什么顺序, 只要我们将 ξ'_n 取成相同顺序, 这就是适用的. 由此得出任意函数 $f(\xi)$ 中 $\prod_n \xi'_n$ 中的系数恰是 $(\text{Det } \mathcal{S})^{-1}$ 乘以 $\prod_n \xi_n$ 的系数, 我们将这一陈述写成

$$\int \left(\prod_n \tilde{d}\xi'_n \right) f = (\text{Det } \mathcal{S})^{-1} \int \left(\prod_n \tilde{d}\xi_n \right) f. \quad (9.5.38)$$

除了 $(\text{Det } \mathcal{S})$ 以幂次-1而非+1出现, 这正是改变积分变量的通常规则. 稍后, 我们将使用方程(9.5.38)以及线性性质(9.5.31), (9.5.32)和(9.5.35)以计算在推导有费米子理论的Feynman规则中所遇到的积分.

我们现在可以利用这个积分定义将完备性条件写成对本征值积分的公式. 正如已经提及的, 任何态 $|f\rangle$ 可以用一系列的态 $|0\rangle, |a\rangle, |a, b\rangle$ 等表示, 并且这些态是(相差一个相位) Q -本征态 $|q\rangle$ 中乘积 $1, q_a, q_a q_b$ 等的系数. 根据这里的积分定义, 通过对 $|q\rangle$ 与所有 a 不等于 b, c, d, \dots 的 q_a 的乘积进行积分, 我们可以挑出态 $|q\rangle$ 中任意乘积 $q_b q_c q_d \dots$ 的系数. 因此, 通过将函数 $f(q)$ 选为这种 q 乘积的恰当和, 我们可以将任意态 $|f\rangle$ 写成一个积分:

$$|f\rangle = \int \left(\prod_a \tilde{d}q_a \right) |q\rangle f(q) = \int |q\rangle \left(\prod_a \tilde{d}q_a \right) f(q). \quad (9.5.39)$$

(我们可以将 $|q\rangle$ 移至微分的左边而不产生任何符号变化, 这是因为方程(9.5.17)中用来定义 $|q\rangle$ 的指数仅包含偶数个费米量.) 为了找到给定态矢 $|f\rangle$ 的函数 $f(q)$, 取方程(9.5.39)与某些左矢 $\langle q'|$ (其中 q' 是任意固定的 Q -本征值)的标量积. 根据方程(9.5.35)以及(9.5.20), 这是

$$\langle q'|f\rangle = \int \left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) \left(\prod_b \tilde{d}q_b \right) f(q).$$

将每一因子 $(q_a - q'_a)$ 绕过每个微分 dq_b 移至右边产生符号因子 $(-)^{N^2} = (-)^N$, 其中 N 现在是变量 q_a 的总数, 所以

$$\langle q'|f\rangle = (-)^N \int \left(\prod_b \tilde{d}q_b \right) \left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q).$$

我们可以将 $f(q)$ 重写为 $f(q' + (q - q'))$ 并展成 $q - q'$ 的幂级数. 所有高于最低阶的项在与乘积 $\prod(q_a - q'_a)$ 相乘时为零, 所以

$$\left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q) = \left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q'), \quad (9.5.40)$$

其部分验证了我们关于方程(9.5.20)在对 q 的积分中扮演了 δ -函数角色的论述. 利用方程(9.5.32), 我们现在有

$$\langle q' | f \rangle = (-)^N \left[\int \left(\prod_b \tilde{d}q_b \right) \left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q') \right].$$

积分中正比于 $\prod q_a$ 的项有系数 $f(q')$, 所以根据我们的积分定义 $\langle q' | f \rangle = (-)^N f(q')$. 将其代回方程(9.5.39)给出我们的完备性关系

$$|f\rangle = (-)^N \int |q\rangle \left(\prod_b \tilde{d}q_b \right) \langle q | f \rangle,$$

或者作为一个算符方程

$$1 = \int |q\rangle \left(\prod_a \tilde{d}q_a \right) \langle q|. \quad (9.5.41)$$

以精确相同的方式

$$1 = \int |p\rangle \left(\prod_a \tilde{d}p_a \right) \langle p|. \quad (9.5.42)$$

我们现在能够计算跃迁矩阵元了. 像往常一样, 我们定义时间相关算符

$$Q_a(t) \equiv \exp(iHt) Q_a \exp(-iHt) \quad (9.5.43)$$

$$P_a(t) \equiv \exp(iHt) P_a \exp(-iHt) \quad (9.5.44)$$

以及它们的右本征态和左本征态

$$|q; t\rangle \equiv \exp(iHt)|q\rangle, \quad |p; t\rangle \equiv \exp(iHt)|p\rangle, \quad (9.5.45)$$

$$\langle q; t| \equiv \langle q| \exp(-iHt), \quad \langle p; t| \equiv \langle p| \exp(-iHt). \quad (9.5.46)$$

那么定义在彼此非常接近的時刻的 q -本征态之间的标量积是

$$\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle = \langle q' | \exp(-iH d\tau) | q \rangle.$$

现在将方程(9.5.42)插入到算符 $\exp(-iH d\tau)$ 的左边. 在这里将哈密顿算符 $H(P, Q)$ 定义成所有的 P 处在所有 Q 的左边是方便的, 这使得(对于无限小的 $d\tau$)

$$\langle p | \exp(-iH(P, Q) d\tau) | q \rangle = \langle p | q \rangle \exp(-iH(p, q) d\tau).$$

(我们可以将 c -数 $H(p, q)$ 移至矩阵元的任意一边而不引起任何符号改变, 这是因为哈密度量中的每一项被假定包含偶数个费米算符.) 这给出

$$\begin{aligned} \langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle &= \int \langle q' | p \rangle \left(\prod_a \tilde{d}p_a \right) \langle p | \exp(-iH d\tau) | q \rangle \\ &= \int \langle q' | p \rangle \left(\prod_a \tilde{d}p_a \right) \langle p | q \rangle \exp(-iH(p, q) d\tau). \end{aligned}$$

利用方程(9.5.26)和(9.5.27), 并注意到乘积 $p_a q_a$ 和 $p_a q'_a$ 与所有的反对易 c -数对易, 我们发现

$$\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle = \int \left(\prod_a \tilde{d}p_a \right) \exp \left[i \sum_a p_a (q'_a - q_a) - iH(p, q) d\tau \right]. \quad (9.5.47)$$

剩余的推导跟随与9.1节相同的路线. 计算算符乘积(其中 $t' > t_A > t_B > \dots > t$)的矩阵元 $\langle q'; t' | O_A(P(t_A), Q(t_A)) O_B(P(t_B), Q(t_B)) \dots | q; t \rangle$, 将从 t 到 t' 的时间间隔分成大量的非常接近的时刻; 在每一时刻处插入完备关系(9.5.41); 利用方程(9.5.47)计算相应的矩阵元(在合适的地方插入 $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B$ 等); 将所有微分移至左边(这不引入符号改变, 因为在每一时刻我们有相同数目的 dp 和 dq); 然后引入函数 $q_a(t)$ 和 $p_a(t)$, 其插入在每个时刻处 q_a 和 p_a 值之间. 之后我们发现

$$\begin{aligned} & \langle q'; t' | T \left\{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)), \mathcal{O}_B(P(t_B), Q(t_B)), \dots \right\} | q; t \rangle \\ &= (-i)^N \chi_N \int_{q_a(t)=q_a, q_a(t')=q'_a} \left(\prod_{a\tau} \tilde{d}q_a(\tau) dp_a(\tau) \right) \\ & \times \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \mathcal{O}_B(p(t_B), q(t_B)) \dots \\ & \times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a p_a(\tau) \dot{q}_a(\tau) - H(p(\tau), q(\tau)) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.5.48)$$

如果时间处在原始假定的顺序 $t_A > t_B > \dots$, 那么符号 T 在这里代表普通乘积. 然而, 右边关于 $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B, \dots$ 是全对称的(除了在反对易 c -数被积分的地方有一负号), 所以这个公式对于一般时间(t 和 t' 之间)成立, 假定 T 被解释成编时乘积, 如果算符的编时排序包含奇数次费米算符的置换, 则带有一个总的负号.

直到现在, 我们还保持着总的相位因子 $(-i)^N \chi_N$ 的痕迹. 但实际上这些相位仅对真空-真空跃迁振幅有贡献, 因而对我们而言是不重要的.

过渡到量子场论跟随9.2节中针对玻色场所描述的同一路线. 编时乘积算符的真空期望值由类似方程(9.2.17)的公式给出:

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC, out} | T \left\{ \mathcal{O}_A [P(t_A), Q(t_A)], \mathcal{O}_B [P(t_B), Q(t_B)], \dots \right\} | \text{VAC, in} \rangle \\ & \propto \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \mathcal{O}_A [p(t_A), q(t_A)] \\ & \times \mathcal{O}_B [p(t_B), q(t_B)] \dots \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - H[q(\tau), p(\tau)] + i\epsilon \text{ terms} \right\} \right] \end{aligned} \quad (9.5.49)$$

其中比例常数对于所有的算符 $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B$ 等都是相同的, 而“ $i\epsilon$ 项”又一次源于真空的波函数. 像往常一样, 我们将每个像 a 这样的离散指标替换成空间位置 \mathbf{x} 和场指标 m . 我们同样扔掉了微分乘积上的波浪号, 这是因为它只影响路径积分中的常数相位.

费米情况和玻色情况的主要差异是在这里我们并不希望在 q 之前积掉 p . 诚然, 在电弱作用的标准模型中(以及其它理论, 诸如之前的 β -衰变的Fermi理论), 正则共轭 p_m 是与 \dot{q}_m 无关的辅助场, 并且拉格朗日量对 \dot{q}_m 是线性的, 使得方程(9.5.49)中的 $\int d^3x \sum_m p_m \dot{q}_m - H$, 正如它所代表的, 是

拉格朗日量 L . 对于携带了非零量子数(像量子电动力学中的电场)的费米场, 该哈密顿量中的每一项一般携带等量的 p (正比于 q^\dagger)和 q . 特别地, 哈密顿量中的自由粒子项 H_0 关于 p 和 q 是双线性的, 使得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) - H_0[q(\tau), p(\tau)] + i\epsilon \text{ terms} \right\} \\ &= - \sum_{nm} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx,ny} p_m(x) q_n(y) \end{aligned} \quad (9.5.50)$$

其中 \mathcal{D} 为某个数值“矩阵”. 相互作用哈密顿量 $V \equiv H - H_0$ 是等量的费米型的 q 与 p 之积(系数可能依赖于玻色场)的和, 所以当我们把方程(9.5.49)展成 V 的幂级数时, 我们遇到了如下形式的费米积分的和

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_{n_1 m_1 n_2 m_2 \cdots n_N m_N}(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_N, y_N) \equiv \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ & \times \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] q_{m_1}(x_1) p_{n_1}(y_1) q_{m_2}(x_2) p_{n_2}(y_2) \cdots q_{m_N}(x_N) p_{n_N}(y_N) \\ & \times \exp \left(-i \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx,ny} p_m(x) q_n(y) \right), \end{aligned} \quad (9.5.51)$$

对于Feynman图中每一组可能的顶点, 就有这样的一项, 其中每个顶点所贡献的系数由 i 乘以相互作用中相对应项的场乘积的系数给出.

为了计算这类积分, 首先考察所有这些积分的一个生成函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f, g) & \equiv \int \left[\prod_{\mathbf{x}, \tau, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ & \times \exp \left(-i \sum_{nm} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx,ny} p_m(x) q_n(y) \right. \\ & \left. - i \sum_m \int d^4x p_m(x) f_m(y) - i \sum_n \int d^4y g_n(y) q_n(y) \right), \end{aligned} \quad (9.5.52)$$

其中 $f_m(x)$ 和 $g_n(y)$ 是任意的反对易c-数函数. 我们偏移到新积分变量

$$\begin{aligned} p'_m(x) &= p_m(x) + \sum_n \int d^4y g_n(y) (\mathcal{D}^{-1})_{ny, mx}, \\ q'_n(y) &= q_n(y) - \sum_m \int d^4x (\mathcal{D}^{-1})_{ny, mx} f_m(x). \end{aligned}$$

利用平移不变性条件(9.5.36), 那么我们发现

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f, g) &= \exp \left(i \sum_{nm} \int d^4x d^4y (\mathcal{D}^{-1})_{ny, mx} g_n(y) f_m(x) \right) \\ & \times \int \left[\prod_{\mathbf{x}, \tau, m} dq'_m(\mathbf{x}, \tau) dp'_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ & \times \exp \left(-i \sum_{nm} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx,ny} p'_m(x) q'_n(y) \right). \end{aligned} \quad (9.5.53)$$

积分是一常数(即, 独立于函数 f 和 g), 利用方程(9.5.38)可以证明其正比于 $\text{Det } \mathcal{D}$. 对于我们更重要一些的是第一个因子. 将这个因子展成 gf 的幂级数, 并与方程(9.5.52)的直接展开比较, 我们看到

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_{n_1 m_1 n_2 m_2 \cdots n_N m_N}(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_N, y_N) \\ & \propto \sum_{\text{pairings}} \delta_{\text{pairing}} \prod_{\text{pairs}} \left(-i \mathcal{D}^{-1} \right)_{\text{paired } mx, ny} \end{aligned} \quad (9.5.54)$$

其中比例常数与 x, y, m 或 n 无关且独立于这些变量的数目. 这个求和是对所有配对 p 和 q 的不同方式求和, 当不同的配对方式仅相差的是配对的次序时, 这种配对方式不计算在内. 换句话说, 我们对 p 和 q 之一的 $N!$ 个置换求和. 当置换为偶时, 符号因子 δ_{pairing} 为+1, 如果为奇则是-1.

这个符号因子与配对求和恰是我们在之前推广Feynman规则时所遇到的, 其中对配对的求和对应于对连接Feynman图中顶点的方式求和, 而因子 $(\mathcal{D}^{-1})_{mx, ny}$ 扮演了将 $q_m(x)$ 与 $p_n(y)$ 配对的传播子角色. 在自旋 $\frac{1}{2}$ 的Dirac体系中, 自由粒子作用量是

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}(\mathbf{x}, \tau) - H_0[q(\tau), p(\tau)] \right\} \\ & = - \int d^4x \bar{\psi}(x) [\gamma^\mu \partial_\mu + m] \psi(x), \end{aligned} \quad (9.5.55)$$

其中, 以通常的记法, 这里的正则变量是

$$q_m(x) = \psi_m(x), \quad p_m(x) = -[\bar{\psi}(x)\gamma^0]_m = i\psi_m^\dagger(x) \quad (9.5.56)$$

其中 m 是4-值Dirac指标. 与方程(9.5.50)比较, 我们在这里发现

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mx, ny} & = \left[\gamma^0 \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m - i\epsilon \right) \right]_{mn} \delta^4(x - y) \\ & = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\gamma^0 [i\gamma^\mu k_\mu + m - i\epsilon] \right)_{mn} e^{ik \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (9.5.57)$$

(尽管我们没有在这里细致地解出它, $i\epsilon$ 项以与9.2节中标量场相同的方式产生.) 那么传播子是

$$(\mathcal{D}^{-1})_{mx, ny} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left([i\gamma^\mu k_\mu + m - i\epsilon]^{-1} [-\gamma^0] \right)_{mn} e^{ik \cdot (x-y)},$$

正是我们在算符体系中所发现的. 产生额外因子 $-\gamma^0$ 是因为该传播子是 $T\{\psi_m(x), -[\bar{\psi}(y)\gamma^0]_n\}$ 的真空期望值, 而非 $T\{\psi_m(x), \bar{\psi}_n(y)\}$.

一个用路径积分比用算符方法更易解决的问题的例子是, 计算一个仅与外场相互作用的Dirac场的真空-真空振幅对场的依赖性. 取拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma]\psi, \quad (9.5.58)$$

其中 $\Gamma(x)$ 是表示费米子与外场相互作用的 x -相关矩阵. 根据方程(9.5.49), 有外场存在的真空持续振幅是

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC}, \text{out} | \text{VAC}, \text{in} \rangle_\Gamma & \propto \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ & \times \exp \left\{ -i \int d^4x p^T \gamma^0 [\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma - i\epsilon] q \right\} \end{aligned} \quad (9.5.59)$$

其中比例常数与 $\Gamma(x)$ 无关. 我们将其写为

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_{\Gamma} &\propto \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ &\times \exp \left\{ -i \sum_{mn} \int d^4x d^4y p_m(x) q_n(y) \mathcal{K}[\Gamma]_{mx, ny} \right\}, \end{aligned} \quad (9.5.60)$$

其中

$$\mathcal{K}[\Gamma]_{mx, ny} = \left(\gamma^0 \left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m + \Gamma(x) - i\epsilon \right] \right)_{mn} \delta^4(x - y). \quad (9.5.61)$$

为了计算它, 我们将积分变量 $q_n(x)$ 改为

$$q'_m(x) \equiv \sum_n \int d^4y \mathcal{K}[\Gamma]_{mx, ny} q_n(y). \quad (9.5.62)$$

现在, 剩下的积分是 Γ -无关的, 所以真空持续振幅的整个依赖性被包含进, 根据方程(9.5.38), 变量改变所产生的行列式:

$$\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_{\Gamma} \propto \text{Det } \mathcal{K}[\Gamma]. \quad (9.5.63)$$

为了再现微扰论的结果, 我们写下

$$\mathcal{K}[\Gamma] \equiv \mathcal{D} + \mathcal{G}[\Gamma], \quad (9.5.64)$$

$$\mathcal{G}[\Gamma]_{mx, ny} = \left(\gamma^0 \Gamma(x) \right)_{mn} \delta^4(x - y), \quad (9.5.65)$$

并展成 $\mathcal{G}[\Gamma]$ 的幂级数. 那么方程(9.5.63)给出

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_{\Gamma} &\propto \text{Det} \left(\mathcal{D} [1 + \mathcal{D}^{-1} \mathcal{G}[\Gamma]] \right) \\ &= [\text{Det } \mathcal{D}] \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr}(\mathcal{D}^{-1} \mathcal{G}[\Gamma])^n \right). \end{aligned} \quad (9.5.66)$$

这正是我们从Feynman规则中所期待的: 该理论中来自内线和顶点的贡献是 $-i\mathcal{D}^{-1}$ 与 $-i\mathcal{G}[\Gamma]$; n 个因子 $-\mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma]$ 乘积的迹因而对应于有 n 个顶点与 n 条内线相连的圈; $1/n$ 是与这样的圈附带的通常的组合学因子(见6.1节); 符号因子是 $(-1)^{n+1}$ 而不是 $(-1)^n$ 是因为费米圈会附带一个额外的负号; 对 n 的求和作为指数变量出现是因为真空持续振幅受到了有任意个非连圈的图的贡献. 从Feynman规则导出 Γ -无关因子 $\text{Det } \mathcal{D}$ 并不那么容易; 它代表了任意个不携带顶点的费米圈的贡献.

更重要的是, 类似方程(9.5.63)的公式允许我们通过使用拓扑定理导出类似 $\mathcal{G}[\Gamma]$ 的核的本征值的相关信息进而导出非微扰结果. 这将在卷II进行进一步探索.

9.6 量子电动力学的路径积分公式

量子场论的路径积分方法在其应用到无质量自旋1粒子的规范理论时, 诸如量子电动力学, 确实显示出了它的特性. 上一章中量子电动力学的Feynman规则推导包含了相当多的敷衍, 例如在光子传播子 $\Delta^{\mu\nu}(q)$ 中正比于 q^μ 或 q^ν 的项可以被扔掉的讨论中, 以及纯的类时项将恰好抵消哈密顿

量中的Coulomb项,使得有效光子传播子可以被取为 $\eta^{\mu\nu}/q^2$. 用第8章的方法给出这一结果的真实证明将使我们陷入到对Feynman图的复杂分析中. 但是正如我们所要看到的,路径积分方法给出了所需的光子传播子形式,却甚至没有考察Feynman图细节的必要.

在第8章,我们发现在Coulomb规范下,光子与带电粒子的相互作用哈密顿量形式为

$$H[\mathbf{A}, \mathbf{\Pi}_\perp, \dots] = H_M + \int d^3x \left[\frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \right] + V_{\text{Coul}}. \quad (9.6.1)$$

这里的 \mathbf{A} 是矢势,服从Coulomb规范条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (9.6.2)$$

而 $\mathbf{\Pi}_\perp$ 是它的正则共轭的无散部分,满足相同约束

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_\perp = 0. \quad (9.6.3)$$

另外, H_M 是物质哈密顿量而 V_{Coul} 是Coulomb能

$$V_{\text{Coul}}(t) = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J^0(\mathbf{x}, t) J^0(\mathbf{y}, t) / 4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (9.6.4)$$

正想对于任何其它的哈密顿系统,我们可以以路径积分计算编时乘积的真空期望值*

$$\begin{aligned} \langle T \{ \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots \} \rangle_{\text{VAC}} &= \int \left[\prod_{x,i} da_i(x) \prod_{x,i} d\pi_i(x) \prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x) \right] \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots \\ &\times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{a}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{J} + \mathcal{L}_M \right] - i \int dt V_{\text{Coul}} \right\} \\ &\times \left[\prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)) \right] \left[\prod_x \delta(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}(x)) \right], \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

其中 $\psi_\ell(x)$ 是一般物质场. 在以物质拉格朗日密度的形式写方程(9.6.5)中,我们假定了 H_M 是定域的并且要么对物质 π 是线性的(就像旋量电动力学中那样)要么是场无系数的二次型(就像标量电动力学中那样). 我们已经在方程(9.6.5)中插入了 δ -函数**以确保约束(9.6.2)和(9.6.3).

方程(9.6.5)中的指数变量显然是 $\boldsymbol{\pi}$ 的独立分量(例如 π_1 和 π_2)的二次型,其中在 $\boldsymbol{\pi}$ 的二阶项中有场无系数. 因此,根据方程(9.A.9),通过令 $\boldsymbol{\pi}$ 等于指数变量的稳相点就能完成对 $\boldsymbol{\pi}$ 的积分(会相差

*注意到 $\boldsymbol{\pi}(x)$ 是量子算符 $\mathbf{\Pi}_\perp$ 的插值c-数场,其彼此以及对易关系以及其与 \mathbf{A} 的对易关系与 $\mathbf{\Pi}$ 的那些对易关系相同,但其不像 $\mathbf{\Pi}$ 一样与所有正则物质变量对易.

**这不是严格精确的. 如果我们取正则变量为,例如 a_1, a_2 和 π_1, π_2 ,而 a_3 和 π_3 被视为由方程(9.6.2)和(9.6.3)给定的这些变量的泛函,那么我们应该插入 δ -函数

$$\prod_x \delta \left(a_3(x) + \partial_3^{-1} \left(\partial_1 a_1(x) + \partial_2 a_2(x) \right) \right) \delta \left(\pi_3(x) + \partial_3^{-1} \left(\partial_1 \pi_1(x) + \partial_2 \pi_2(x) \right) \right).$$

然而,这与方程(9.6.5)中的 δ -函数仅差一个因子 $\text{Det } \partial_3^2$,这个因子尽管是无限大的,但却是场无关的,因而在类似方程(9.4.1)的比值中抵消了.

一个常数因子), 即令 $\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{a}}$:

$$\begin{aligned} \langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\text{VAC}} &= \int \left[\prod_{x,i} da_i(x) \prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x) \right] \\ &\times \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} + \mathcal{L}_M \right] \right. \\ &\quad \left. - i \int dt V_{\text{Coul}} + i\epsilon \text{ terms} \right\} \left[\prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)) \right]. \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

为了显示出这个结果的显著协变性, 我们使用一个技巧. 引入新的积分变量 $a^0(x)$, 并将作用量中的Coulomb项 $-\int dt V_{\text{Coul}}$ 换成

$$\int d^4x \left[-a^0(x)j^0(x) + \frac{1}{2}(\nabla a^0(x))^2 \right]. \quad (9.6.7)$$

既然(9.6.7)是 a^0 的二次型, 通过令 $a^0(x)$ 等于(9.6.7)的稳相点, 即

$$-j^0(x) - \nabla^2 a^0(x) = 0$$

的解, 或者换种形式

$$a^0(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \frac{j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (9.6.8)$$

我们就能完成对 a^0 的积分(差一个常数因子). 在方程(9.6.7)使用这个恰好给出Coulomb作用量 $-\int dt V_{\text{Coul}}$. 因此我们可以将方程(9.6.6)中的指数变量重写为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} + \mathcal{L}_M - a^0 j^0 + \frac{1}{2}(\nabla a^0)^2 \\ &= -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + a_\mu j^\mu + \mathcal{L}_M + \text{全导数} \end{aligned}$$

其中 $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$, 并对 a^0 , \mathbf{a} 以及物质场积分. 即, 路径积分(9.6.6)现在是

$$\begin{aligned} \langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\text{VAC}} &\propto \int \left[\prod_{x,\mu} da_\mu(x) \right] \left[\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x) \right] \\ &\times \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots \exp \left(i I[a, \psi] \right) \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)), \end{aligned} \quad (9.6.9)$$

其中 I 是原始作用量

$$I[a, \psi] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + a_\mu j^\mu + \mathcal{L}_M \right] + i\epsilon \text{ terms}. \quad (9.6.10)$$

现在, 所有的量是显式Lorentz-不变且规范不变的, 除了最后确保Coulomb规范条件的 δ -函数乘积.[†] 为了更进一步, 我们将使用一个技巧的简化版,^{4,5} 这个技巧将在卷II中被用来处理更加困难的非阿贝尔规范理论的情况. 简单期间, 我们在这里所要处理的情况是算符 $\mathcal{O}_A[A, \Psi]$, $\mathcal{O}_B[A, \Psi], \cdots$ 以及作用量 $I[a, \psi]$ 和测度 $[\prod da] [\prod d\psi]$ 是规范不变的.

[†]注意到现在 $a^0(x)$ 不等于值(9.6.8), 而是一个独立的积分变量. 我们先不对 $a^0(x)$ 积分, 这将导回方程(9.6.6), 而是和 $\mathbf{a}(x)$ 一起处理.

首先, 将方程(9.6.9)中的所有场积分变量 $a_\mu(x)$ 和 $\psi(x)$ 替换成新变量

$$a_{\mu\Lambda}(x) \equiv a_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \quad (9.6.11)$$

$$\psi_{\ell\Lambda}(x) \equiv \exp(i q_\ell\Lambda(x))\psi_\ell(x) \quad (9.6.12)$$

其中 $\Lambda(x)$ 为任意的有限量. 这一步是数学上平庸的, 就像把积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 读成 $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$, 并且没有要求使用理论所公设的规范不变性. 接下来, 使用规范不变性将作用量, 测度以及 \mathcal{O} -函数中的 $a_{\mu\Lambda}(x)$ 和 $\psi_{\ell\Lambda}(x)$ 分别替换成原始场 $a_\mu(x)$ 和 $\psi_\ell(x)$. 那么方程(9.6.9)变成

$$\begin{aligned} & \langle T\{\mathcal{O}_A[A, \Psi], \mathcal{O}_B[A, \Psi], \dots\} \rangle_{\text{VAC}} \\ & \propto \int \left[\prod_{x,\mu} da_\mu(x) \right] \left[\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x) \right] \mathcal{O}_A[a, \psi] \mathcal{O}_B[a, \psi] \dots \\ & \quad \times \exp(iI[a, \psi]) \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2\Lambda(x)). \end{aligned} \quad (9.6.13)$$

现在, 函数 $\Lambda(x)$ 被随机地选择, 所以尽管出现了, 方程(9.6.13)的右边不能依赖这一函数. 我们将探索这一性质进而把路径积分变成更加方便的形式. 给方程(9.6.13)乘以泛函

$$B[\Lambda, a] = \exp\left(-\frac{1}{2}i\alpha \int d^4x (\partial_0 a^0 - \nabla^2\Lambda)^2\right) \quad (9.6.14)$$

(其中 α 是一任意常数), 并对 $\Lambda(x)$ 积分. 通过偏移积分变量 $\Lambda(x)$, 并注意到(9.6.13)实际的 Λ -无关性, 我们看到这实际就是给方程(9.6.13)乘上场无关常数

$$\int \left[\prod_x d\Lambda(x) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}i\alpha \int d^4x (\nabla^2\Lambda)^2\right). \quad (9.6.15)$$

这一因子在真空期望值的连接部分被抵消了, 因而没有物理效应. 但是方程(9.6.13)仅在我们积掉 $a^\mu(x)$ 和 $\psi(x)$ 之后才是 Λ -无关的. 我们也可以在积掉 $a^\mu(x)$ 和 $\psi(x)$ 之前对 $\Lambda(x)$ 积分, 在这一情况下, 方程(9.6.13)中的因子 $\prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2\Lambda)$ 被替换成

$$\begin{aligned} & \int \left[\prod_x d\Lambda(x) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}i\alpha \int d^4x (\partial_0 a^0 - \nabla^2\Lambda)^2\right) \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2\Lambda) \\ & \quad \propto \exp\left(-\frac{1}{2}i\alpha \int d^4x (\partial_\mu a^\mu)^2\right), \end{aligned} \quad (9.6.16)$$

其中“ \propto ”又一次意味着比例常数是场无关因子. 扔掉常数因子, 方程(9.6.9)现在变成

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\dots\} \rangle_{\text{VAC}} \propto \int \left[\prod_{x,\mu} da_\mu(x) \right] \left[\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x) \right] \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\dots \exp(iI_{\text{eff}}[a, \psi]), \quad (9.6.17)$$

其中

$$I_{\text{eff}}[a, \psi] = I[a, \psi] - \frac{1}{2}\alpha \int (\partial_\mu a^\mu)^2 d^4x. \quad (9.6.18)$$

其现在是显式Lorentz-不变的.

我们将(9.6.18)中的新项视为对作用量非微扰部分的贡献, 它的光子部分现在变成

$$\begin{aligned} I_0[a] &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu)(\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu) - \frac{1}{2}\alpha(\partial_\mu a^\mu)^2 + i\epsilon \text{ terms} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y a^\mu(x) a^\nu(y) D_{\mu\nu,xy}, \end{aligned} \quad (9.6.19)$$

其中

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu,xy} &= \left[\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\rho} - (1-\alpha) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right] \delta^4(x-y) + i\epsilon \text{ terms} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[\eta_{\mu\nu} q^2 - (1-\alpha) q_\mu q_\nu - i\epsilon \eta_{\mu\nu} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (9.6.20)$$

那么通过取方程(9.6.20)的被积函数中 4×4 矩阵的逆就能立即发现光子传播子

$$\Delta_{\mu\nu,xy} = (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - i\epsilon)^2} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.21)$$

我们可以按照看起来最方便的形式来自由地选择 α . 两个通常的选择是 $\alpha = 1$, 其产生了Feynman规范中的传播子:

$$\Delta_{\mu\nu,xy}^{\text{Feynman}} = (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \right] e^{iq \cdot (x-y)} \quad (9.6.22)$$

或者 $\alpha = \infty$, 在这一情况下, 因子(9.6.14)像 δ -函数一样作用, 而我们获得了Landau规范中的传播子(通常也叫作Lorentz规范):

$$\Delta_{\mu\nu,xy}^{\text{Landau}} = (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} - \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - i\epsilon)^2} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.23)$$

通过使用这类显式Lorentz-不变的相互作用和传播子, 实际计算会变得方便得多.

9.7 各种统计*

我们现在可以着手处理第4章所提出的问题: 当我们交换全同粒子是, 态矢的改变都有哪些可能?

为此, 我们将考察散射过程中初态或末态的预备. 假定通过某种缓慢变化的外场, 并保持过程中粒子相距甚远以保证使用非相对论量子力学的合理性, 这两个态之一中的一组不可分辨粒子从一个动量为 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ 等的标准模型被变成动量为 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 等的特定的构形. (我们不在这里明显的写成自旋指标; 它们应该被理解成伴随着动量指标.) 为了计算这个过程的振幅, 我们可以使用路径积分方法,** 把9.1节中的 q 和 p 取为粒子位置与动量, 而不是场以及它们的正则共轭. 无论粒子是玻色子还是费米子亦或是别的什么东西, 它们总是满足正则对易关系而不是反对易关系, 所以目前我们

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略.

**在这里我将沿用Laidlaw(莱德劳)和C. Dewitt,¹¹的讨论, 所不同的是它们将路径积分方法应用于整个散射过程, 而不仅是初态或末态的预备. 在一个相对论性理论中, 粒子被创造或湮灭的可能使得必须将路径积分方法应用于场而不是粒子轨道. 对于我们而言, 这不是问题, 因为我们将这样的计算限制在了充分早或充分晚的时期, 这一时期离散射过程还很遥远.

还没有把自己置身于任何特定的统计. 路径积分公式(9.1.34)将一振幅 $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D$ 作为对路径的积分给出, 其中一个粒子的动量从 \mathbf{k}_1 连续变化到 \mathbf{p}_1 , 另一全同粒子的动量从 \mathbf{k}_2 连续变化到 \mathbf{p}_2 , 以此类推. 下标“D”表明我们所计算的振幅是针对可分辨(distinguishable)粒子的. 特别地, 这一振幅在 \mathbf{p} 和 \mathbf{k} 的同时置换下是对称的, 但是在 \mathbf{p} 或 \mathbf{k} 的分别置换下没有特定的对称性. 但是如果粒子真是不可分辨的, 那么存在其它拓扑不同的路径, 但最终却产生了同一末态构形. 对于维度 $d \geq 3$ 的空间, 唯一这样的路径[†]是那些 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$ 变成 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$ 的某些非平庸置换 \mathcal{P} 的路径. 因此真正的振幅应该写成

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle = \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D, \quad (9.7.1)$$

求和取遍了态中 N 个不可分辨粒子的所有 $N!$ 个置换, 而 $C_{\mathcal{P}}$ 是一组复常数. 这些振幅必须满足适用于不可分辨粒子的组成规则:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle &= \frac{1}{N!} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle \\ &\times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (9.7.2)$$

利用方程(9.7.1), 这是要求

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D &= \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \\ &\times \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}'2}, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle_D \langle \mathbf{q}_{\mathcal{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D \end{aligned}$$

对右边第一个振幅中的初态和末态作用一个置换 \mathcal{P}'' , 变成

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D &= \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \\ &\times \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}''\mathcal{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}''\mathcal{P}'2}, \dots | \mathbf{q}_{\mathcal{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''2}, \dots \rangle_D \langle \mathbf{q}_{\mathcal{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D \end{aligned}$$

但是振幅 $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D$ 满足可分辨粒子的组成规则

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D &= \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle_D \\ &\times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D, \end{aligned} \quad (9.7.3)$$

所以物理振幅的组成规则可以写成

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D &= \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \\ &\times \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}''\mathcal{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}''\mathcal{P}'2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D, \end{aligned}$$

当且仅当

$$C_{\mathcal{P}'\mathcal{P}''} = C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''}, \quad (9.7.4)$$

[†]这被形式地表述为如下的陈述: $d \geq 3$ 的空间中, 构形空间的第一同伦群是置换群.¹² N 个不可分辨粒子的“构形空间”意味着 N 个 d -矢的空间, 排除了彼此重合(或者处在一个任意的极限距离内)的 d -矢, 并将仅相差一个矢量置换的构形等价起来.

这才是被满足的. 即, 系数 $C_{\mathcal{P}}$ 必须构成置换群的一个一维表示. 但是置换群仅有两个这样的表示: 一个是恒等表示, 对于所有的置换 $C_{\mathcal{P}} = 1$, 而另一个是交替表示, 根据 \mathcal{P} 是一个偶置换还是奇置换, $C_{\mathcal{P}} = +1$ 或 $C_{\mathcal{P}} = -1$. 这两种可能性分别对应于玻色统计和费米统计.[‡]

这一讨论的漂亮之处在于它使得为什么二维空间是个例外变得清楚. 在这一情况下, 存在丰富得多的拓扑不等价路径种类.[¶] 例如, 一个粒子绕另一粒子转确定圈数的路径不能变形成没有绕圈的路径. 结果是, 在二维空间, 可能有任意子,¹⁵ 任意子有着比费米统计或玻色统计^{8a}更加广泛的置换性质.

附录 高斯多重积分

我们首先希望计算 ξ 的一般二次函数的指数对有限个实变量 ξ_r 的多重积分

$$\mathcal{I} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_r d\xi_r \exp \left\{ -Q(\xi) \right\}, \quad (9.A.1)$$

$$Q(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s + \sum_r L_r \xi_r + M, \quad (9.A.2)$$

其中 K_{rs} , L_r 和 M 是任意常数, 除了矩阵 K 被要求是对称且非奇异的. 为此, 我们从 K_{rs} , L_r 和 M 都是实的且 K_{rs} 是正定的这一情况开始考察. 之后普遍情况下的结果可以通过解析延拓获得.

任何实对称矩阵可以被一个正交矩阵对角化. 因此存在一个矩阵 \mathcal{S} , 其有逆 $\mathcal{S}^T = \mathcal{S}^{-1}$, 使得

$$\left(\mathcal{S}^T K \mathcal{S} \right)_{rs} = \delta_{rs} \kappa_r. \quad (9.A.3)$$

因为假定 K 是正定且非奇异的, 所以本征值 κ_r 是正定的. 我们可以使用矩阵 \mathcal{S} 进行一个变量变换:

$$\xi_r = \sum_s \mathcal{S}_{rs} \xi'_s. \quad (9.A.4)$$

这一变换的雅可比行列式 $|\text{Det } \mathcal{S}|$ 是1, 所以多重积分(9.A.1)现在由一普通积分的乘积给定:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= e^{-M} \prod_r \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'_r \exp \left\{ -\frac{\kappa_r}{2} \xi'^2 - (\mathcal{S}^T L)_r \xi'_r \right\} \\ &= e^{-M} \prod_r \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_r}} \left\{ \frac{1}{2\kappa_r} (\mathcal{S}^T L)_r^2 \right\}. \end{aligned} \quad (9.A.5)$$

但是方程(9.A.3)的行列式与逆给出

$$\text{Det } K = \prod_r \kappa_r, \quad K_{rs}^{-1} = \sum_{\ell} \mathcal{S}_{r\ell} \mathcal{S}_{s\ell} \kappa_{\ell}^{-1},$$

所以方程(9.A.5)可以写成

$$\mathcal{I} = \left(\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} - M \right\}. \quad (9.A.6)$$

[‡]在文献中有大量关于玻色或费米之外其它可能的统计的讨论, 通常在标签仲统计下. 已经证明了 $d \geq 3$ 的空间中的仲统计理论等价于所有的例子是普通的费米子或玻色子但谢丹额外量子数的理论, 这使得波函数在动量和自旋的置换下有着通常的性质.

[¶]这被表示成如下表述, 二维空间中, 构形空间的第一同伦群不是置换群, 而是一个更大的群, 其被称为辫群.¹⁴

方程(9.A.1)定义了 K_{rs} , L_r 和 M 的一个函数, 它在 K_{rs} 实且正定以及积分收敛的平面周围的有限区域对 K_{rs} 是解析的, 并且对于这样的 K_{rs} , 其对 L_r 和 M 在任何地方都是解析的. 既然对于实的 K_{rs} , L_r 和 M 且正定的 K_{rs} , (9.A.6)等于(9.A.1), 方程(9.A.6)提供了方程(9.A.1)到整个复平面的解析延拓, 其中有一个平方根所要求的截断. 平方根的符号由这一解析延拓固定. 在场论中, 除了由“ $i\epsilon$ ”项所引起的小实部, K_{rs} 实际上是虚的.

以函数(9.A.2)的稳相点表示方程(9.A.6)是有用的:

$$\bar{\xi}_r = -\sum_s K_{rs}^{-1} L_s, \quad (9.A.7)$$

$$\partial Q(\xi)/\partial \xi_r = 0 \quad \text{在 } \xi = \bar{\xi}, \quad (9.A.8)$$

那么

$$\mathcal{J} = \left(\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right)^{-1/2} \exp \left\{ -Q(\bar{\xi}) \right\}. \quad (9.A.9)$$

这是要记住的结果: 通过令积分变量等于指数变量是稳定的那个点, 高斯积分可以被计算至差一个行列式因子.

接下来, 我们希望用这一结果计算积分

$$I_{r_1 \cdots r_{2N}} \equiv \int \left(\prod_r d\xi_r \right) \xi_{r_1} \xi_{r_2} \cdots \xi_{r_{2N}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\}. \quad (9.A.10)$$

(这类被积函数中有奇数个 ξ -因子的积分显然为零.) 从方程(9.A.1)中 $\exp(-\sum_r L_r \xi_r)$ 的级数展开中, 我们有求和规则

$$\begin{aligned} & \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} \frac{1}{(2N)!} I_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \cdots L_{r_{2N}} \\ &= \int \left(\prod_r d\xi_r \right) \exp \left\{ -\sum_r L_r \xi_r - \frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\} \\ &= \left[\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right\} \\ &= \left[\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N! 2^N} \left(\sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right)^N. \end{aligned} \quad (9.A.11)$$

比较两边 $L_{r_1} L_{r_2} \cdots L_{r_{2N}}$ 的系数, 我们看到 $I_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}}$ 必须正比于 K^{-1} 的元素的乘积之和, 对称性要求采取形式

$$I_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} = c_N \sum_{\substack{\text{pairings} \\ \text{of } r_1 \cdots r_{2N}}} \prod_{\text{pairs}} (K^{-1})_{\text{paired indices}}. \quad (9.A.12)$$

这里的求和是对所有配对指标 $r_1 \cdots r_{2N}$ 的方式求和, 如果两个配对方式仅相差配对的次序或是这配对中指标的次序, 那么这两个配对方式被认为是相同的. 为了计算常数因子 c_N , 我们注意到方程(9.A.12)中, 对配对的求和中项的数目等于指标置换的个数 $(2N)!$, 除以置换每对指标的个数 $N!$ 以及指标对内置换的个数 2^N

$$\nu_N = \frac{(2N)!}{N! 2^N}. \quad (9.A.13)$$

因此方程(9.A.12)给出

$$\sum_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \cdots L_{r_{2N}} I_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} = \nu_N c_N \left(\sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right)^N \quad (9.A.14)$$

将其与方程(9.A.11)比较说明了因子 $(2N)!$ 和 $(N!2^N)$ 被 ν_N 抵消, 给我们留下

$$c_N = \left[\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \quad (9.A.15)$$

例如,

$$I_{r_1 r_2} = I_0(K^{-1})_{r_1 r_2}, \quad (9.A.16)$$

$$I_{r_1 r_2 r_3 r_4} = I_0 \left[(K^{-1})_{r_1 r_2} (K^{-1})_{r_3 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_3} (K^{-1})_{r_2 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_4} (K^{-1})_{r_2 r_3} \right], \quad (9.A.17)$$

以此类推, 其中 I_0 是没有指标的积分

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv \int \left(\prod_r d\xi_r \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\} \\ &= \left[\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (9.A.18)$$

参考文献

- [1] R. P. Feynman, *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics* (Princeton University, 1942; University Microfilms Publications No. 2948, Ann Arbor). 另见R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965). 一个普遍的参考, 参看J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics-A Functional Integral Point of View*, 2nd edn (Springer-Verlag, New York, 1987).
- [2] P. A. M. Dirac, *Phys. Zeits. Sowjetunion* **3**, 62 (1933).
- [3] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.*, **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769 (1949); **80**, 440 (1950).
- [4] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *phys. Lett.* **B25**, 29 (1927). 另见R. P. Feynman, *Acta Phys. Pol.* **24**, 697 (1963); S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **175**, 1580, 1604 (1968).
- [5] B. De Witt, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 742 (1964).
- [6] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B35**, 167 (1971).
- [7] I. S. Gerstein, R. Jackiw, B. W. Lee, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D3**, 2486 (1971).
- [8] L. D. Faddeev, *Teor. Mat. Fizika*, **1**, 3, (1969); 翻译在 *Theor. Math. Phys.* **1**, 1 (1970).

-
- [8a] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **44**, 956 (1958).
- [8b] K. Osterwalder and R. Schrader, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1423 (1972); *Commun. Math. Phys.* **31**, 83 (1973); *Commun. Math. Phys.* **42**, 281 (1975). Osterwalder-Schrader公理要求光滑, 欧几里得协变, “反射阳性,” 置换对称性, 以及集团分解.
- [9] 与J. Polchinski的讨论极大地启发了本节.
- [10] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).
- [11] M. G. G. Laidlaw and C. M. De Witt, *Phys. Rev. D* **3**, 1375 (1970).
- [12] J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo Cimento* **37 B**, 1 (1977).
- [13] Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, *Phys. Rev.* **170**, 1279 (1968); *Ann. Phys.* **57**, 337 (1969); K. Drühl, R. Haag, and J. E. Roberts, *Commun. Math. Phys.* **18**, 204 (1970).
- [14] 辫群由E. Artin引入. 参看*The Collected Papers of E. Artin*, S. Lang and J. E. Tate编辑(Addison-Wesley, Reading, MA, 1965).
- [15] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982); K. Fredenhagen, M. R. Gaberdiel, and S. M. Rüger, Cambridge preprint DAMTP-94-90 (1994). 另见J. M. Leinaas and J. Myrheim, Ref. 12.

第 10 章 非微扰方法

我们现在开始研究对物理过程的高阶贡献, 这对应于包含一个圈或多个圈的Feynman图. 在这个工作中, 有一个可用于推导出适用于微扰论所有阶(并且在某些情况下超出微扰论)的结果的方法将是有益的. 为此, 在本章我们将在Heisenberg绘景中探索场方程以及相互作用场的对易关系. Heisenberg绘景与微扰论Feynman图之间的必要桥梁由6.4节中证明的定理提供: 有额外顶点插入的过程 $\alpha \rightarrow \beta$, 若插入的顶点对应算符 $o_a(x)$, $o_b(y)$, 等, 那么该过程的所有Feynman图之和由相对应的Heisenberg-绘景算符编时乘积的矩阵元给出

$$\left(\Psi_{\beta}^{-}, T \left\{ -iO_a(x), -iO_b(y) \cdots \right\} \Psi_{\alpha}^{+} \right).$$

作为一个特殊情况, 即算符 $O_a(x)$, $O_b(y)$ 等是基本粒子场, 这一矩阵元等于入线处在态 α 所对应的质量壳上, 出线处在态 β 所对应的质量壳上而不在质量壳上的线(包括传播子)对应算符 $O_a(x)$, $O_b(y)$ 等的所有Feynman图之和. 在探索了以这种方式能获得的一些非微扰结果之后, 我们就有了充足的准备以着手辐射修正的微扰计算.

10.1 对称性

之上所引用定理的一个显然但重要的应用是将对称性原理的应用从S-矩阵元, 其中所有的外线有在质量壳上4-动量, 扩展至Feynman图的部分, 这些部分中一些或者所有外线都不在质量壳上.

例如, 考察时空平移对称性. 这一对称性导致了厄密4-矢算符 P^{μ} 的存在, 其有性质, 对于任何场算符以及它们的正则共轭的定域函数 $O(x)$,

$$\left[P_{\mu}, O(x) \right] = i \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} O(x). \quad (10.1.1)$$

(见方程(7.3.28)与(7.3.29).) 另外, 态 α 和态 β 通常被选为4-矢的本征态:

$$P^{\mu} \Psi_{\alpha}^{+} = p_{\alpha}^{\mu} \Psi_{\alpha}^{+}, \quad P_{\mu} \Psi_{\beta}^{-} = p_{\beta}^{\mu} \Psi_{\beta}^{-}. \quad (10.1.2)$$

由此得出, 对于任何一组场和/或场导数的定域函数 $O_a(x)$, $O_b(x)$ 等

$$\begin{aligned} & (p_{\beta\mu} - p_{\alpha\mu}) \left(\Psi_{\beta}^{-}, T \left\{ O_a(x_1), O_b(x_2) \cdots \right\} \Psi_{\alpha}^{+} \right) \\ &= \left(\Psi_{\beta}^{-}, \left[P_{\mu}, T \left\{ O_a(x_1), O_b(x_2) \cdots \right\} \right] \Psi_{\alpha}^{+} \right) \\ &= i \left(\frac{\partial}{\partial x_1^{\mu}} + \frac{\partial}{\partial x_2^{\mu}} + \cdots \right) \left(\Psi_{\beta}^{-}, T \left\{ O_a(x_1), O_b(x_2) \cdots \right\} \Psi_{\alpha}^{+} \right). \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

其有解

$$\begin{aligned} & \left(\Psi_{\beta}^{-}, T \left\{ O_a(x_1), O_b(x_2), \dots \right\} \Psi_{\alpha}^{+} \right) \\ &= \exp \left(i(p_{\alpha} - p_{\beta}) \cdot x \right) F_{ab\dots}(x_1 - x_2, \dots), \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

其中 x 是任意一种时空坐标的平均

$$x^{\mu} = c_1 x_1^{\mu} + c_2 x_2^{\mu} + \dots, \quad c_1 + c_2 + \dots = 1 \quad (10.1.5)$$

而 F 仅依赖于 x 之间的差值。(特别地, 真空期望值仅能依赖于坐标差值。)通过对 x^{μ} 与坐标差值分别积分我们可以对方程(10.1.4)Fourier变换, 结果是

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 d^4 x_2 \dots \left(\Psi_{\beta}^{-}, T \left\{ O_a(x_1), O_b(x_2), \dots \right\} \Psi_{\alpha}^{+} \right) \\ & \times \exp(-ik_1 \cdot x_1 - ik_2 \cdot x_2 - \dots) \propto \delta^4(p_{\alpha} - p_{\beta} - k_1 - k_2 - \dots). \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

我们在6.4节看到, 编时乘积的矩阵元是通过对所有图的和施加通常的坐标空间Feynman规则获得的, 其中进入粒子对应 α 中的粒子, 离开粒子对应 β 中的粒子, 而外线简单地终结于处在 x_1, x_2, \dots 处的顶点. Fourier变换(10.1.6)通过对Feynman图的同一和施加动量空间Feynman规则获得, 其中不在质量壳上的外线携带4-动量 k_1, k_2, \dots 进入图. 那么方程(10.1.6)正是Feynman图的和保持4-动量守恒的陈述这一结果在微扰论中显然的, 这是因为4-动量在每个顶点守恒, 所以不必依赖微扰论而看到同样的结果是不惊奇的.

随着进一步的努力, 可以使用Heisenberg-绘景场以及“入”态和“出”态的Lorentz变换性质证明, 有一组给定的在质量壳上的线和不在质量壳上的线的所有图之和满足与最低阶项相同的Lorentz变换条件.

类似的讨论适用于内部量子数的守恒, 例如电荷. 正如7.3节所证明的, 消灭一个电荷 q_a (或产生一个电荷 q_a)的场或其它算符 $O_a(x)$ 将满足

$$[Q, O_a(x)] = -q_a O_a(x)$$

在Heisenberg-绘景和相互作用绘景中类似. 另外, 如果自由粒子态 α 和 β 有电荷 q_{α} 和 q_{β} , 那么相对应的“入”态和“出”态也是如此. 那么我们有

$$\begin{aligned} & (q_{\beta} - q_{\alpha}) \left(\Psi_{\beta}^{-}, T \left\{ O_a(x), O_b(y), \dots \right\} \Psi_{\alpha}^{+} \right) \\ &= \left(\Psi_{\beta}^{-}, \left[Q, T \left\{ O_a(x), O_b(y), \dots \right\} \right] \Psi_{\alpha}^{+} \right) \\ &= -(q_a + q_b + \dots) \left(\Psi_{\beta}^{-}, T \left\{ O_a(x), O_b(y), \dots \right\} \Psi_{\alpha}^{+} \right) \end{aligned}$$

因此除非电荷守恒

$$q_{\beta} = q_{\alpha} - q_a - q_b - \dots, \quad (10.1.7)$$

否则振幅 $\left(\Psi_{\beta}^{-}, T \left\{ O_a(x), O_b(y), \dots \right\} \Psi_{\alpha}^{+} \right)$ 为零.

一个不太平庸的例子由荷共轭不变性的对称性提供, 正如我们在第5章所看到的, 存在交换电子算符和正电子算符的算符 C

$$\begin{aligned} C a(\mathbf{p}, \sigma, e^{-}) C^{-1} &= \xi^* a(\mathbf{p}, \sigma, e^{+}), \\ C a(\mathbf{p}, \sigma, e^{+}) C^{-1} &= \xi a(\mathbf{p}, \sigma, e^{-}), \end{aligned}$$



图 10.1 光子被电磁场散射的最低阶图. 这里直线代表虚电子; 波浪线代表实光子和虚光子; 而双线代表重粒子, 像原子核, 其在这里充当电磁场的源. 正如荷共轭不变性所要求的, 这两个图的贡献抵消.

其中 ξ 是相位因子. 对于自由电子场 $\psi(x)$, 这给出

$$C\psi(x)C^{-1} = -\xi^* \beta C\psi(x)^* ,$$

其中 βC 是 4×4 矩阵, 其(对于我们所使用的Dirac矩阵表示, 其中 γ_5 对角)采取形式

$$\beta C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

应用于旋量电动力学中的自由粒子电流, 这给出

$$C(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)C^{-1} = -\bar{\psi}C\gamma^{\mu T}C\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi .$$

如果 C 在电动力学中要是守恒的, 那么它必须也被定义成与自由光子场反对易

$$C(a^\mu)C^{-1} = -a^\mu .$$

在类似电动力学的理论中, 对与这样的理论, C 与相互作用以及 H_0 对易, 它也与Heisenberg-绘景与相互作用绘景之间的相似变换 $\Omega(t)$ 对易, 因而它与相互作用场的电流反对易

$$C(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)C^{-1} = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (10.1.8)$$

以及与Heisenberg-绘景中的电磁场反对易

$$C(A^\mu)C^{-1} = -A^\mu . \quad (10.1.9)$$

那么由此得出, 任何奇数个电磁流和/或场的编时乘积, 它的真空期望值为零. 因此所有有奇数个光子外线(在或者不在光子质量壳上)且没有其它外线的Feynman图之和为零.

这一结果称为Furry(弗里)定理.¹ 它可以被微扰论式地证明, 通过注意由电子圈 ℓ 构成的图, 每个电子圈连接 n_ℓ 个光子线, 其所有的内光子线数目 I 与外光子线数目 E 通过类似于方程(6.3.11)的关系关联:

$$2I + E = \sum_{\ell} n_{\ell} .$$

因此如果 E 为奇, 那么至少一个圈必须要连接奇数个光子线. 对于任何这样的圈存在一个抵消, 沿着圈的电子箭头方向相反的两个图会抵消. 因此相比平移或 Lorentz 不变性, Furry 定理不是平庸的对称性原理的结果; 它对于单个图不是正确的, 但对于某种图的和是正确的. 图 10.1 例证了 Furry 定理的应用在历史上是最重要的, 它用以证明光子在外电磁场上的散射不受到外场中第一阶(或任何奇数阶)的贡献.

10.2 定极学

本章所描述的非微扰方法的最重要应用之一就是, 将 Feynman 振幅的极点结构阐释为外线所携带动量的函数. 通常一个物理过程的 S -矩阵能够很好地近似成一个单极点的贡献. 另外, 对该极点结构的理解将在之后对粒子传播子的辐射修正处理中帮助我们.

考察动量空间振幅

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \cdots e^{-iq_n \cdot x_n} \left\langle T \left\{ A_1(x_1) \cdots A_n(x_n) \right\} \right\rangle_0 \\ \equiv G(q_1 \cdots q_n). \quad (10.2.1)$$

这些 A 是任意 Lorentz 型的 Heisenberg-绘景算符, 而 $\langle \cdots \rangle_0$ 代表真空 $\Psi_0^+ = \Psi_0^- \equiv \Psi_0$ 中的期望值. 正如 6.4 节中所讨论的, 如果 A_1, \cdots, A_n 是出现在拉格朗日量中的普通场, 那么 (10.2.1) 就是, 针对所有外线对应场 A_1, \cdots, A_n 并携带非质量壳 4-动量 $q_1 \cdots q_n$ 进入图的 Feynman 图, 用普通 Feynman 规则所计算的项的和. 然而, 我们将不限制在此种情况; A_i 可以是场或场导数的任意定域函数.

我们感兴趣的是 G 在几个外线子集所携带的总 4-动量的特定不变平方值处的极点. 明确些, 我们视 G 为 q^2 的函数, 其中

$$q \equiv q_1 + \cdots + q_r = -q_{r+1} - \cdots - q_n \quad (10.2.2)$$

其中 $1 \leq r \leq n-1$. 我们将证明 G 在 $q^2 = -m^2$ 处有极点, 其中 m 是任意单粒子态的质量, 其与态 $A_1^\dagger \cdots A_r^\dagger \Psi_0$ 和态 $A_{r+1} \cdots A_n \Psi_0$ 的矩阵元不为零, 并且在该极点的留数给定为

$$G \rightarrow \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} (2\pi)^7 \delta^4(q_1 + \cdots + q_n) \\ \times \sum_{\sigma} M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \cdots q_r) M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) \quad (10.2.3)$$

其中 M 被定义成*

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_r e^{-iq_1 \cdot x_1} \cdots e^{-iq_r \cdot x_r} \left(\Psi_0, T \left\{ A_1(x_1) \cdots A_r(x_r) \right\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma} \right) \\ = (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \cdots + q_r - p) M_{0|\mathbf{p},\sigma}(q_2 \cdots q_r), \quad (10.2.4)$$

$$\int d^4x_{r+1} \cdots d^4x_n e^{-iq_{r+1} \cdot x_{r+1}} \cdots e^{-iq_n \cdot x_n} \\ \times \left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T \left\{ A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n) \right\} \Psi_0 \right) \\ = (2\pi)^4 \delta^4(q_{r+1} + \cdots + q_n + p) M_{\mathbf{p},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) \quad (10.2.5)$$

(其中 $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$), 而求和是对质量为 m 的粒子的所有自旋(或其它)态求和.

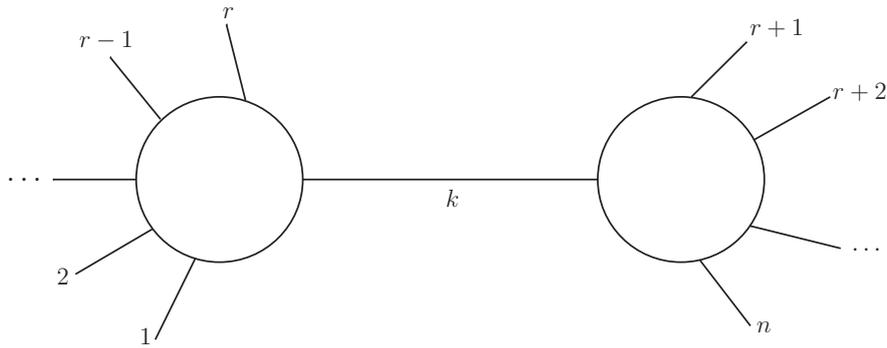


图 10.2 极点结构为(10.2.6)的Feynman图. 这里携带动量 k 的项代表基本粒子, 它的场出现在拉格朗日量中.

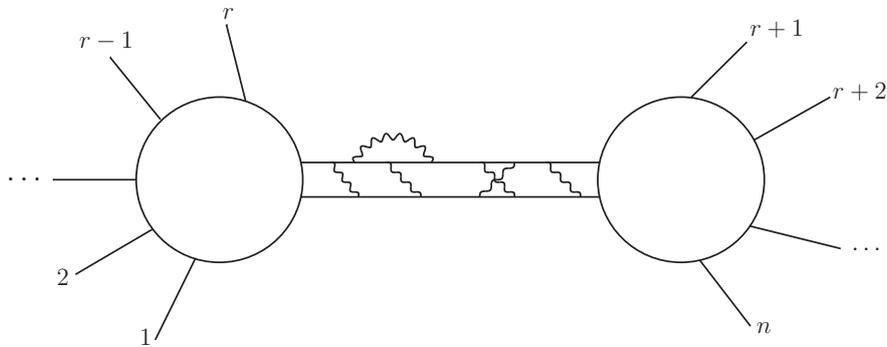


图 10.3 一类Feynman图中的一个, 这类Feynman图之和有极点结构(10.2.6), 这里的极点是源于复合粒子, 即两个基本粒子的束缚态. 直线表示基本粒子, 其通过交换波浪线所代表的粒子进行相互作用.

在进行证明之前, 如果我们将(10.2.3)写成稍微冗长的形式

$$\begin{aligned}
 G(q_1 \cdots q_n) &\rightarrow \sum_{\sigma} \int d^4 k \\
 &\times \left[(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \cdots + q_r - k) (2\pi)^{3/2} \left(2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \right)^{1/2} M_{0|\mathbf{k},\sigma}(q_2 \cdots q_r) \right] \\
 &\times \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \\
 &\times \left[(2\pi)^4 \delta^4(k + q_{r+1} + \cdots + q_n) (2\pi)^{3/2} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \right)^{1/2} M_{\mathbf{p},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) \right], \tag{10.2.6}
 \end{aligned}$$

这将对阐明它的意义有帮助. 质量为 m 的粒子内线连接前 r 个外线和后 $n-r$ 个外线的Feynman图所预期的正是这种形式.** 然而, 质量为 m 的粒子不必须对应该理论拉格朗日量中的场. 即使这

*回忆, 在没有随时间变化的外场时, 在“入”单粒子态和“出”单粒子态之间没有区别, 使得 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma^+} = \Psi_{\mathbf{p},\sigma^-} = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}$.

**参看图10.2. 因子 $(2\pi)^{3/2} [2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}]^{1/2}$ 恰好用于移除 $M_{0|\mathbf{k},\sigma}$ 和 $M_{\mathbf{k},\sigma|0}$ 中质量为 m 的外线所附带的运动学因子. 另外, 对这两个矩阵元中系数函数因子乘积的 σ 求和产生了图10.2中内线所附带的传播子的分子.

个粒子是作为拉格朗日量中的场出现的所谓基本粒子的束缚态, 方程(10.2.3)和(10.2.6)也是适用的. 在这一情况下, 极点不是从类似于图10.2的单个Feynman图中产生, 而是从图的无限求和中产生, 图10.3中所展示的就是其中一个. 这是首次本章的方法带领我们超出了作为微扰论每一阶性质所导出的结果.

现在开始证明. 在方程(10.2.1)的时间 $x_1^0 \cdots x_n^0$ 的 $n!$ 种可能排序中, 对于前 r 个 x_i^0 均大于后 $n-r$ 个 x_i^0 , 共有 $n!/r!(n-r)!$ 种可能的排序方式. 将方程(10.2.1)中这部分积分的贡献孤立出来, 我们有

$$\begin{aligned} G(q_1 \cdots q_n) &= \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \cdots e^{-iq_n \cdot x_n} \\ &\times \theta\left(\min[x_1^0 \cdots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \cdots x_n^0]\right) \\ &\times \left(\Psi_0, T\left\{A_1(x_1) \cdots A_r(x_r)\right\} T\left\{A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n)\right\} \Psi_0\right) \\ &+ \text{OT}, \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

其中“OT”代表源于不同时间排序的其它项(other term). 通过在编时乘积之间插入中间态完全集我们可以计算这里的矩阵元. 在这些中间态中, 有些有可能是种类明确质量为 m 的单粒子态 $\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}$. 进一步孤立出这些单粒子中间态的贡献, 我们有

$$\begin{aligned} G(q_1 \cdots q_n) &= \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \cdots e^{-iq_n \cdot x_n} \\ &\theta\left(\min[x_1^0 \cdots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \cdots x_n^0]\right) \sum_{\sigma} \int d^3 p \\ &\left(\Psi_0, T\left\{A_1(x_1) \cdots A_r(x_r)\right\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}\right) \left(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}, T\left\{A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n)\right\} \Psi_0\right) \\ &+ \text{OT}, \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

其中“OT”现在所代表的其它项, 不仅源于其它时间排序, 还源于其它的中间态. 偏移积分变量将是方便的, 使得

$$\begin{aligned} x_i &= x_1 + y_i, & i &= 2, 3, \cdots, r, \\ x_i &= x_{r+1} + y_i, & i &= r+2, \cdots, n, \end{aligned}$$

并利用上一节的结果写出

$$\begin{aligned} &\left(\Psi_0, T\left\{A_1(x_1) \cdots A_r(x_r)\right\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}\right) \\ &= e^{ip \cdot x_1} \left(\Psi_0, T\left\{A_1(0) A_2(y_2) \cdots A_r(y_r)\right\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}\right), \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

$$\begin{aligned} &\left(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}, T\left\{A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n)\right\} \Psi_0\right) \\ &= e^{-ip \cdot x_{r+1}} \left(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}, T\left\{A_{r+1}(0) \cdots A_n(y_n)\right\} \Psi_0\right). \end{aligned} \quad (10.2.10)$$

另外, θ -函数的变量变成

$$\begin{aligned} &\min[x_1^0 \cdots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \cdots x_n^0] \\ &= x_1^0 - x_{r+1}^0 + \min[0, y_2^0 \cdots y_r^0] - \max[0, y_{r+1}^0 \cdots y_n^0]. \end{aligned}$$

我们又代入阶跃函数的Fourier表示(6.2.15)

$$\theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\epsilon}.$$

对 x_1 和 x_{r+1} 的积分恰好产生 δ -函数

$$\begin{aligned} G(q_1 \cdots q_n) &= \int d^4 y_2 \cdots d^4 y_r d^4 y_{r+2} \cdots d^4 y_n \\ &\times e^{-iq_2 \cdot y_2} \cdots e^{-iq_r \cdot y_r} e^{-iq_{r+2} \cdot y_{r+2}} \cdots e^{-iq_n \cdot y_n} \\ &\times -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\epsilon} \exp\left(-i\omega \left[\min[0, y_2^0 \cdots y_r^0] - \max[0, y_{r+1}^0 \cdots y_n^0] \right]\right) \\ &\times \sum_{\sigma} \int d^3 p \left(\Psi_0, T \left\{ A_1(0) \cdots A_r(y_r) \right\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) \\ &\quad \times \left(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}, T \left\{ A_{r+1}(0) \cdots A_n(y_n) \right\} \Psi_0 \right) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \cdots - \mathbf{q}_r) \delta(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \omega - q_1^0 - \cdots - q_r^0) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{q}_{r+1} + \cdots + \mathbf{q}_n + \mathbf{p}) \delta(q_{r+1}^0 + \cdots + q_n^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \omega) \\ &+ \text{OT}. \end{aligned} \tag{10.2.11}$$

我们在这里仅对那些由于分母 $\omega + i\epsilon$ 为零所产生的极点感兴趣, 所以对于我们现在的目的, 我们可以令因子 $\exp(-i\omega[\min - \max])$ 等于1. 对 \mathbf{p} 和 ω 的积分现在是平庸的, 并产生极点

$$\begin{aligned} G(q_1 \cdots q_n) &\rightarrow i(2\pi)^7 \delta^4(q_1 + \cdots + q_n) \left[q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon \right]^{-1} \\ &\times \sum_{\sigma} M_{0|\mathbf{q}, \sigma}(q_2 \cdots q_r) M_{\mathbf{q}, \sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) + \cdots \end{aligned} \tag{10.2.12}$$

其中现在有

$$q \equiv q_1 + \cdots + q_r = -q_{r+1} - \cdots - q_n,$$

$$\begin{aligned} M_{0|\mathbf{q}, \sigma}(q_2 \cdots q_r) &\equiv \int d^4 y_2 \cdots d^4 y_r e^{-iq_2 \cdot y_2} \cdots e^{-iq_r \cdot y_r} \\ &\times \left(\Psi_0, T \left\{ A_1(0) A_2(y_2) \cdots A_r(y_r) \right\} \Psi_{\mathbf{q}, \sigma} \right), \end{aligned} \tag{10.2.13}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{q}, \sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) &\equiv \int d^4 y_{r+2} \cdots d^4 y_n e^{-iq_{r+2} \cdot y_{r+2}} \cdots e^{-iq_n \cdot y_n} \\ &\times \left(\Psi_{\mathbf{q}, \sigma}, T \left\{ A_{r+1}(0) A_{r+2}(y_{r+2}) \cdots A_n(y_n) \right\} \Psi_0 \right), \end{aligned} \tag{10.2.14}$$

并且, 方程(10.2.12)中最后的“...”代表那些不体现这一特殊极点的项. (源于其它单粒子态的“其它项”产生了 q 中不同位置上的极点, 而那些源于多粒子态的“其它项”产生了 q 中的分支点, 而那些源于其它编时乘积的“其它项”产生了其它变量中的极点与分支切割.) 利用方程(10.2.9)和(10.2.10), 很容易看到这些 M 与方程(10.2.4)和(10.2.5)所定义的 M 是相同的. 另外, 在极点附近, 我们可以写成

$$\frac{1}{q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon} = \frac{-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon}{-(q^0)^2 + (\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon)^2} \rightarrow \frac{-2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}.$$

(我们再次通过正因子 $2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ 重定义了 ϵ , 由于 ϵ 代表任意正的无限小, 这是允许的.) 因此方程(10.2.12)与所需的结果(10.2.3)是相同的.

这一结果在核力理论中有一经典应用. 令 $\Phi_a(x)$ 是任意的实场或者场的组合(例如, 正比于夸克-反夸克双线性对 $\bar{q}\gamma_5\tau_a q$), 其同位旋为 a 的单 π 子态与真空之间的矩阵元不为零, 归一化使得

$$\langle \text{VAC} | \Phi_a(0) | \pi_b, p \rangle = (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} \delta_{ab}. \quad (10.2.15)$$

那么 Φ_a 在4-动量分别为 p, p' 的单核子态之间的矩阵元, 在同位旋不变性与Lorentz不变性(包含空间反演不变性)所要求的 $(p - p')^2 \rightarrow -m_\pi^2$ 处有一极点, 这样矩阵元必须采取形式[†]

$$\langle N', \sigma', \mathbf{p}' | \Phi_a(0) | N, \sigma, \mathbf{p} \rangle \rightarrow i(2\pi)^{-3} G_\pi \times \frac{(\bar{u}' \gamma_5 \tau_a u)}{(p - p')^2 + m_\pi^2}, \quad (10.2.16)$$

其中 u 和 u' 是初态和末态的旋量系数函数, 包括同位旋空间中的核子波函数, 并且 $a = 1, 2, 3$ 的 τ_a 是 2×2 Pauli同位旋矩阵. 常数 G_π 被称为 π 子-核子耦合系数. 这一极点实际不在矩阵元(10.2.6)物理区域, 即 $(p - p')^2 \geq 0$, 但可以通过该矩阵元的解析扩张到达它, 例如, 通过考察非质量壳矩阵元

$$\int d^4x d^4x' e^{-ip \cdot x} e^{ip' \cdot x'} \langle T \{ \Phi_a(0) \bar{N}(x) N'(x') \} \rangle_{\text{VAC}},$$

其中 N 和 N' 是场算符或场算符乘积的合适分量, 并且这些场算符或者场算符乘积在单核子态与真空态之间的矩阵元不为零. 那么本节前面所证明的定理显示了在两个核子的散射中, 其中初态4-动量为 p_1, p_2 且末态4-动量为 p'_1 和 p'_2 , 交换一个 π 介子在 $(p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \rightarrow -m_\pi^2$ 处产生一个极点:

$$\begin{aligned} S_{N'_1 N'_2, N_1 N_2} &\rightarrow -i(2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{G_\pi^2}{(p - p')^2 + m_\pi^2} \\ &\times (2\pi)^{-3} (\bar{u}'_1 \gamma_5 \tau_a u_1) \times (2\pi)^{-3} (\bar{u}'_2 \gamma_5 \tau_a u_2) \end{aligned} \quad (10.2.17)$$

(在这种公式中, 得到右边的相位以及数值因子的最简单方式是利用Feynman图; 我们的定理仅陈述了极点结构与拉格朗日量包含基本 π 介子的场论中会发现的极点结构相同.) 又一次, 这个 π 介子极点实际上不是在质量壳上的核子散射的物理区域中, 而是 $(p_1 - p'_1)^2 \geq 0$, 但它可以通过 S -矩阵元的解析扩张达到, 例如, 通过考察非质量壳矩阵元

$$\begin{aligned} &\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2 e^{-ip_1 \cdot x_1} e^{-ip_2 \cdot x_2} e^{ip'_1 \cdot x'_1} e^{ip'_2 \cdot x'_2} \\ &\times \langle T \{ \bar{N}_1(x_1), \bar{N}_2(x_2), N'_1(x'_1), N'_2(x'_2) \} \rangle_{\text{VAC}}. \end{aligned}$$

尽管这一极点不在核子-核子散射的物理区域中, π 介子质量足够小使得极点相当接近物理区域, 并且在某些环境下可能主导散射振幅, 例如分波展开中的大 ℓ .

在坐标空间解释的话就是, 类似这种处在 $(p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \rightarrow -m_\pi^2$ 的极点暗示了范围为 $1/m_\pi$ 的力. 例如, 在Yukawa原始的核力理论²中, 介子的交换(那么就假定标量而非赝标量)产生

[†]Lorentz不变性与同位旋不变性要求这个矩阵采取形式 $(\bar{u}' \Gamma \tau_a u)$, 其中 Γ 是使双线性积 $(\bar{\psi}' \Gamma \psi)$ 按照赝标量变换的 4×4 矩阵. 像任何 4×4 矩阵一样, Γ 可以表示为正比于Dirac矩阵 $1, \gamma_\mu, [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_5 \gamma_\mu$ 和 γ_5 的项的和. 系数必须分别是赝标量, 赝矢量, 赝张量, 矢量以及标量. 用两个动量 p 和 p' 是不能构建出赝标量或赝矢量的; 仅能构建出一个赝张量, 正比于 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma$; 两个独立的矢量, 正比于 p_μ 或 p'_μ ; 以及一个正比于1的标量, 在每种情况下, 比例因子依赖唯一的独立标量变量 $(p - p')^2$. 通过使用 u 和 u' 的动量空间Dirac方程, 很容易看到 Γ 中的张量以及赝矢量矩阵给出正比于 γ_5 的贡献.

了形式为 $\exp(-m_\pi r)/4\pi r$ 的定域势, 其在一阶Born近似中产生非相对论核子散射的 S -矩阵元, 其正比于Fourier变换:

$$\begin{aligned} & \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x'_1 d^3x'_2 e^{-i\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{p}_1} e^{-i\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{p}_2} e^{i\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} e^{i\mathbf{x}'_2 \cdot \mathbf{p}'_2} \\ & \times \frac{\exp\left(-m_\pi |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\right)}{4\pi |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \delta^3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \delta^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2) \\ & = -(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \frac{1}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + m_\pi^2}. \end{aligned}$$

因子 $1/[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + m_\pi^2]$ 正是(10.2.17)中传播子 $1/[(p_1 - p'_1)^2 + m_\pi^2]$ 的非相对论极限. (在(10.2.17)中, $|\mathbf{p}_1| \ll m_N$ 且 $|\mathbf{p}'_1| \ll m_N$ 的能量传递 $p_1^0 - p'^0_1$ 等于 $[\mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}'^2_1]/2m_N$, 其与动量传递的大小 $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1|$ 相比可以被忽略.) 当Yukawa理论第一次被提出时, 普遍认为这种动量相关性源于在理论中出现了介子场. 直到20世纪50年代才广泛理解了, 在 $(p_1 - p'_1)^2 \rightarrow -m_\pi^2$ 处存在的极点源于 π 介子粒子的存在, 并且这与它是否是一个基本粒子, 即它本身的场是否出现在拉格朗日中无关.

10.3 场重整化和质量重整化

我们现在将使用上一节结果的一个特殊情况以阐明一般过程的内线和外线中辐射修正的处理.

我们在这里所考虑的特殊情况是单个外线的4-动量趋近质量壳. (以上一节的记法, 这对应与取 $r = 1$.) 我们将考察函数

$$\begin{aligned} G_\ell(q_1 q_2 \cdots) &= \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} \cdots \\ & \times \left(\Psi_0, T \left\{ \mathcal{O}_\ell(x_1), A_2(x_2), \cdots \right\} \Psi_0 \right), \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

其中 $\mathcal{O}_\ell(x)$ 是Heisenberg-绘景算符, 其有某类自由场 ψ_ℓ 的Lorentz变换性质, ψ_ℓ 属于齐次Lorentz群 (或是, 对于宇称守恒理论, 包含空间反演的Lorentz群) 的一个有下标 ℓ 标记的不可约表示, 而 A_2, A_3 等是任意的Heisenberg-绘景算符. 假定存在单粒子态 $\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}$, 其与态 $\mathcal{O}_\ell^\dagger \Psi_0$ 以及 $A_2 A_3 \cdots \Psi_0$ 的矩阵元不为零. 那么根据上一节所证明的定理, G_ℓ 在 $q_1^2 = -m^2$ 处有一极点, 并有

$$\begin{aligned} G_\ell(q_1 q_2 \cdots) & \rightarrow \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} (2\pi)^3 \sum_\sigma \left(\Psi_0, \mathcal{O}_\ell(0) \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma} \right) \\ & \times \int d^4x_2 \cdots e^{-iq_2 \cdot x_2} \cdots \left(\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}, T \left\{ A_2(x_2) \cdots \right\} \Psi_0 \right), \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

我们用Lorentz不变性写成

$$\left(\Psi_0, \mathcal{O}_\ell(0) \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma} \right) = (2\pi)^{-3/2} N u_\ell(\mathbf{q}_1, \sigma), \quad (10.3.3)$$

其中 $u_\ell(\mathbf{q}_1, \sigma)$ 是(除因子 $(2\pi)^{-3/2}$ 以外)出现在自由场 ψ_ℓ 中的系数函数*, 有着与 \mathcal{O}_ℓ 相同的Lorentz变换性质, 而 N 是常数. (为了得到带有单个自由常数 N 的方程(10.3.3), 我们必须假定 \mathcal{O}_ℓ 不可约地变

*例如, 对于常见的归一化自由标量场, $u_\ell(\mathbf{q}_1, \sigma) = [2\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}]^{-1/2}$.

换.) 我们又定义了“截断”矩阵元 M_ℓ 为

$$\begin{aligned} & \int d^4x_2 \cdots e^{-iq_2 \cdot x_2} \cdots \left(\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}, T \left\{ A_2(x_2) \cdots \right\} \Psi_0 \right) \\ & \equiv N^{-1} (2\pi)^{-3/2} \sum_{\ell} u_{\ell}^*(\mathbf{q}_1, \sigma) M_{\ell}(q_2 \cdots) . \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

那么, 对于 $q_1^2 \rightarrow -m^2$, 方程(10.3.2)变成

$$G_{\ell} \rightarrow \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma, \ell'} u_{\ell}(\mathbf{q}_1, \sigma) u_{\ell'}^*(\mathbf{q}_1, \sigma) M_{\ell'} . \quad (10.3.5)$$

根据方程(6.2.2)与(6.2.18), (10.3.5)中乘以 M_{ℓ} 的量是自由场的动量空间矩阵传播子 $-i\Delta_{\ell\ell'}(q_1)$ (或者至少是它在 $q^2 \rightarrow -m^2$ 时的极限行为), 其中的自由场有着 \mathcal{O}_{ℓ} 的 Lorentz 变换性质, 所以(10.3.5)允许我们将 M_{ℓ} 等同为外线携带动量 $q_1, q_2 \cdots$ 的 Feynman 图的和, 其中动量对应于算符 $\mathcal{O}_{\ell}, A_2, \cdots$, 但对应 \mathcal{O}_{ℓ} 的末态传播子被去掉了. 那么方程(10.3.4)正是描述如何从 Feynman 图的和中计算发射一个粒子的矩阵元: 去掉粒子传播子, 并与通常的外线因子 $(2\pi)^{-3/2} u_{\ell}^*$ 收缩. 与通常 Feynman 规则的唯一矛盾是因子 N .

之上的定理是 Lehmann(莱曼), Symanzik(塞曼则克)以及 Zimmermann(齐默尔曼)³ 所导出的著名结果, 被称为约化公式, 我们在这里用一种稍微不同的方法证明了它, 这种方法允许我们轻松地将这一结果推广至任意自旋. 这一结果的一个重要性质是它适用于任何种类的算符; \mathcal{O}_{ℓ} 不需要是真实出现在拉格朗日量中的某些场, 并且它所创造的粒子可能是那些场真实存在在拉格朗日量中的粒子的束缚态. 即使 \mathcal{O}_{ℓ} 是拉格朗日量中的某个场 Ψ_{ℓ} , 它也提供了重要的一课: 如果我们打算用通常的 Feynman 规则计算 S -矩阵元, 那么我们应该首先通过因子 $1/N$ 重定义场的归一化, 使得(为符号 Ψ 的多次使用表示歉意):

$$\left(\Psi_0, \Psi_{\ell}(0) \Psi_{\mathbf{q}, \sigma} \right) = (2\pi)^{-3/2} u_{\ell}(\mathbf{q}, \sigma) \quad (10.3.6)$$

像在方程(10.3.6)中那样被归一化的场, 被称为重整化场.

场重整化常数 N 出现在另一地方. 假定方程(10.3.1)中仅存在算符 A_2, A_3, \cdots 中的一个, 并且将其取为与 \mathcal{O}_{ℓ} 同一多重态中一成员的伴. 那么方程(10.3.2)变成

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} \left(\Psi_0, T \left\{ \mathcal{O}_{\ell}(x_1) \mathcal{O}_{\ell'}^{\dagger}(x_2) \right\} \Psi_0 \right) \\ & \xrightarrow{q_1^2 \rightarrow -m^2} \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2} (2\pi)^3}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma} \left(\Psi_0, \mathcal{O}_{\ell}(0) \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma} \right) \\ & \quad \times \int d^4x_2 e^{-iq_2 \cdot x_2} e^{-iq_1 \cdot x_1} \left(\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}, \mathcal{O}_{\ell'}^{\dagger}(0) \Psi_0 \right) \\ & = \frac{-2i|N|^2 \sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma} u_{\ell}(\mathbf{q}_1, \sigma) u_{\ell'}^*(\mathbf{q}_1, \sigma) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2) . \end{aligned}$$

除却因子 $|N|^2$, 这正是传播子(有两条外线的所有图之和)在它极点附近的行为. 根据方程(10.3.6), 这一因子在重整化场 Ψ_{ℓ} 的传播子中消失了. 因此重整化场就是传播子在极点附近的行为与自由场相同的场, 而重整化质量由极点的位置定义.

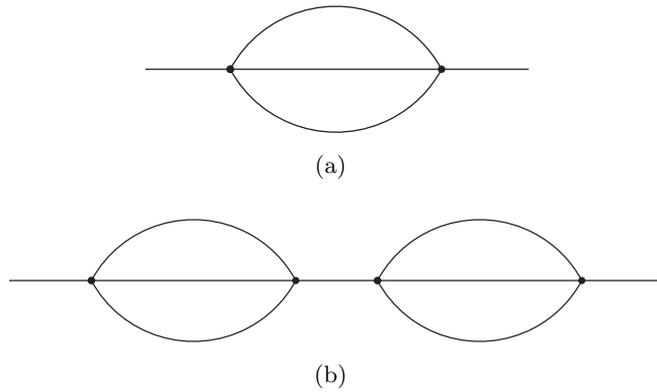


图 10.4 (a)图是单粒子不可约的, 而(b)图不是. 这些图是针对有某类四线性相互作用的理论而画出的, 例如有正比于 ϕ^4 的相互作用的标量场 ϕ 的理论

为了看到这在实际中是如何运作的, 考察自作用的实标量场理论 Φ_B , 这里所增加的下标B是提醒我们现在这是一个“裸(bare)”(即,非重整化)场. 拉格朗日量密度像往常一样取为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi_B\partial^\mu\Phi_B - \frac{1}{2}m_B^2\Phi_B^2 - V_B(\Phi_B). \quad (10.3.7)$$

一般而言, 没有什么原因可以预期场 Φ_B 会满足条件(10.3.6), 也无法预期 q^2 中的极点会处在 $-m_B^2$, 所以我们引入重整化场和重整化质量

$$\Phi \equiv Z^{-1/2}\Phi_B, \quad (10.3.8)$$

$$m^2 \equiv m_B^2 + \delta m^2, \quad (10.3.9)$$

其中选择 Z 使得 Φ 满足方程(10.3.6), 选择 δm^2 使得传播子的极点在 $q^2 = -m^2$ 处. (在这一背景符号 Z 的使用已经成了一种约定, 对于拉格朗日量中的每一场有不同的 Z .) 那么拉格朗日量密度(10.3.7)可以重写成

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (10.3.10)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2, \quad (10.3.11)$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}(Z-1)[\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + m^2\Phi^2] + \frac{1}{2}Z\delta m^2\Phi^2 - V(\Phi), \quad (10.3.12)$$

其中

$$V(\Phi) \equiv V_B(\sqrt{Z}\Phi).$$

在计算对重整化标量场的动量空间全传播子, 一般称为 $\Delta'(q)$, 的修正中, 分别考察单粒子不可约图是方便的: 即那些无法通过切断任何一条内标量线而变成非连图的连接图(排除了由单个标量线构成的图). 图10.4中展示了一个例子. 习惯上, 在省略掉两个外线传播子因子 $-i(2\pi)^{-4}(q^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$ 后, 将所有这种图的和写为 $i(2\pi)^4\Pi^*(q^2)$, 其中星号是提醒我们它们是单粒子不可约图. 那么对全传播子的修正由一个求和给出, 其中求和的每一项是由一个, 两个或多

个单粒子不可约子图所构成的链, 而链是由这些子图通过通常的非修正传播子连接构成的:

$$\begin{aligned} \frac{-i}{(2\pi)^4} \Delta'(q) &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \\ &+ \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \\ &+ \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \\ &\times \left[i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] + \dots \end{aligned} \quad (10.3.13)$$

或者更精简些

$$\begin{aligned} \Delta'(q) &= [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \\ &+ [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

对该几何级数求和, 这给出

$$\Delta'(q) = \left[q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2) - i\epsilon \right]^{-1}. \quad (10.3.15)$$

在 Π^* 的计算中, 我们会遇到由于插入单个顶点所引起的树图, 其对应于方程中(10.3.12)中正比于 $\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$ 和 Φ^2 的项, 加上圈图, 即类似于图10.4a中的图, 所产生的项 Π_{LOOP}^* :

$$\Pi^*(q^2) = -(Z - 1)[q^2 + m^2] + Z \delta m^2 + \Pi_{\text{LOOP}}^*(q^2). \quad (10.3.16)$$

m^2 是粒子真实质量的这个条件是说传播子的极点应该在 $q^2 = -m^2$ 处, 使得

$$\Pi^*(-m^2) = 0. \quad (10.3.17)$$

另外, 传播子在 $q^2 = -m^2$ 处的极点应该有留数1(就像非修正传播子), 这个条件是

$$\left[\frac{d}{dq^2} \Pi^*(q^2) \right]_{q^2=-m^2} = 0. \quad (10.3.18)$$

这些条件允许我们计算 Z 和 δm^2 :

$$Z \delta m^2 = -\Pi_{\text{LOOP}}^*(-m^2), \quad (10.3.19)$$

$$Z = 1 + \left[\frac{d}{dq^2} \Pi_{\text{LOOP}}^*(q^2) \right]_{q^2=-m^2}. \quad (10.3.20)$$

这顺带表明了 $Z \delta m^2$ 与 $Z - 1$ 由一系列包含一个或多个耦合常数因子的项给出, 证明了方程(10.3.12)中前两项的处理是作为相互作用 \mathcal{L}_1 的一部分.

在实际计算中, 最简单的就是说我们必须从圈图项 $\Pi_{\text{LOOP}}^*(q^2)$ 中扣除 q^2 的一阶多项式, 并选择系数使得差满足方程(10.3.17)和(10.3.18). 正如我们将看到的, 这个扣除步骤顺带抵消了 Π_{LOOP}^* 中动量空间积分所产生的无限大. 然而, 随着讨论深入而逐渐清晰的是, 质量和场的重整化与无限大的出现没有直接关系, 并且, 即使在一个所有动量空间积分都收敛的理论中也是必要的.

条件(10.3.17)和(10.3.18)的一个重要结果是, 在质量壳上的外线中, 引入辐射修正是不必要的. 即,

$$\left[\Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \cdots \right]_{q^2 \rightarrow -m^2} = 0. \quad (10.3.21)$$

类似的讨论适用于任意自旋的粒子. 例如, 对于“裸”Dirac场, 拉格朗日量是

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}_B[\not{\partial} + m_B]\Psi_B - V_B(\bar{\Psi}_B\Psi_B). \quad (10.3.22)$$

我们引入重整化场和重整化质量

$$\Psi \equiv Z_2^{-1/2}\Psi_B, \quad (10.3.23)$$

$$m = m_B + \delta m. \quad (10.3.24)$$

(Z_2 上的下标2一般用来标明费米场的重整化常数.) 那么拉格朗日量密度重写成

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (10.3.25)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\Psi}[\not{\partial} + m]\Psi, \quad (10.3.26)$$

$$\mathcal{L}_1 = -(Z_2 - 1)[\bar{\Psi}[\not{\partial} + m]\Psi] + Z_2\delta m\bar{\Psi}\Psi - V_B(Z_2\bar{\Psi}\Psi). \quad (10.3.27)$$

令 $i(2\pi)^4\Sigma^*(\not{k})$ 是所有这样连接图的和: 其中一个费米线携带4-动量 k 进入, 而另一条费米线携带相同的动量离开, 不能通过剪断任何一条内费米线变成非连图, 并且外线传播子因子 $-i(2\pi)^{-4}$ 和 $[i\not{k} + m - i\epsilon]^{-1}$ 被省略了. (Lorentz不变性被用来验证将 Σ^* 写成Lorentz标量矩阵 $\not{k} \equiv k_\mu\gamma^\mu$ 的普通函数的合理性.) 那么全费米子传播子是

$$\begin{aligned} S'(k) &= [i\not{k} + m - i\epsilon]^{-1} + [i\not{k} + m - i\epsilon]^{-1}\Sigma^*(\not{k})[i\not{k} + m - i\epsilon]^{-1} \\ &\quad + [i\not{k} + m - i\epsilon]^{-1}\Sigma^*(\not{k})[i\not{k} + m - i\epsilon]^{-1}\Sigma^*(\not{k})[i\not{k} + m - i\epsilon]^{-1} + \cdots \\ &= [i\not{k} + m - \Sigma^*(\not{k}) - i\epsilon]^{-1}. \end{aligned} \quad (10.3.28)$$

在计算 $\Sigma^*(\not{k})$ 时, 我们考虑树图以及圈贡献, 其中树图来自于方程(10.3.27)中正比于 $\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi$ 和 $\bar{\Psi}\Psi$ 的项:

$$\Sigma^*(\not{k}) = -(Z_2 - 1)[i\not{k} + m] + Z_2\delta m + \Sigma_{\text{LOOP}}^*(\not{k}). \quad (10.3.29)$$

那么全传播子在 $k^2 = -m^2$ 处有一极点以及与非修正传播子留数相同的条件是

$$\Sigma^*(im) = 0, \quad (10.3.30)$$

$$\left. \frac{\partial \Sigma^*(\not{k})}{\partial \not{k}} \right|_{\not{k}=im} = 0, \quad (10.3.31)$$

以及随之的

$$Z_2\delta m = -\Sigma_{\text{LOOP}}^*(im), \quad (10.3.32)$$

$$Z_2 = 1 - i \left. \frac{\partial \Sigma_{\text{LOOP}}^*(im)}{\partial \not{k}} \right|_{\not{k}=im}. \quad (10.3.33)$$

正如标量, $[i\not{k} + m]^{-1}\Sigma^*(\not{k})$ 在极限 $\not{k} \rightarrow im$ 下为零告诉我们, 在外费米线中辐射修正可以被忽略. 光子传播子的相对应结果将在10.5节进行推导.

10.4 重整化荷与Ward等式

使用Heisenberg-绘景算符的对易关系和守恒关系使得我们可以找到拉格朗日量密度中的荷(或者其它类似的物理量)与物理态性质之间的联系. 回忆, 拉格朗日量密度相对整体规范变换 $\Psi_\ell \rightarrow \exp(iq_\ell\alpha)$ (其中 α 为任意的常数相位) 的不变性暗示了流的存在

$$J^\mu = -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\ell)} q_\ell \Psi_\ell, \quad (10.4.1)$$

其满足对于守恒条件

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (10.4.2)$$

这暗示了 J^μ 时间分量的空间积分是与时间独立的:

$$i \frac{d}{dt} Q = [Q, H] = 0, \quad (10.4.3)$$

其中

$$Q \equiv \int d^3x J^0. \quad (10.4.4)$$

(这里可能存在一个非常重要的例外, 即如果由于系统中无质量标量而存在长程力, 积分(10.4.4)可能不存在. 我们在卷II考察破缺对称性时会回到这点.) 另外, 既然它是空间积分, Q 显然是平移不变的

$$[\mathbf{P}, Q] = 0 \quad (10.4.5)$$

并且, 由于 J^μ 是4-矢, Q 相对于齐次Lorentz变换是不变的

$$[J^{\mu\nu}, Q] = 0. \quad (10.4.6)$$

由此得出 Q 作用在真空 Ψ_0 上必须是另一能量为零且动量为零的Lorentz不变态, 因而(假定没有真空简并)必须正比于 Ψ_0 本身. 但比例常数必须为零, 这是因为Lorentz不变性要求 $(\Psi_0, J_\mu \Psi_0)$ 为零, 因此

$$Q\Psi_0 = 0. \quad (10.4.7)$$

另外, Q 作用在任意单粒子态 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}$ 上必须是另一能量相同, 动量相同且Lorentz变换性质相同的态, 因此(假定没有单粒子态简并)必须正比于同一单粒子态

$$Q\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = q_{(n)}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}. \quad (10.4.8)$$

Q 的Lorentz不变性确保了本征值 $q_{(n)}$ 是独立于 \mathbf{p} 和 σ , 而仅依赖于粒子的种类. 这一本征值正是所谓单粒子态的电荷(或是其它任何 J^μ 可为流的量子数). 为了将其与拉格朗日量中的 q_ℓ 参量关联起来, 我们注意到正则对易关系给出

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \Psi_\ell(\mathbf{y}, t)] = -q_\ell \Psi_\ell(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (10.4.9)$$

或者对 \mathbf{x} 积分:

$$[Q, \Psi_\ell(y)] = -q_\ell \Psi_\ell(y). \quad (10.4.10)$$

对于场, 场导数以及它们的伴的任意定域函数 $F(y)$, 其中 $F(y)$ 所包含的场, 场导数以及它们的伴的数目是确定的, 这同样是正确的:

$$\left[Q, F(y) \right] = -q_F F(y), \quad (10.4.11)$$

其中 q_F 是, $F(y)$ 中所有场和场导数的 q_ℓ 之和减去所有场伴以及场伴导数的 q_ℓ 之和. 在单粒子态和真空之间去该方程的矩阵元, 并利用方程(10.4.7)和(10.4.8), 我们有

$$\left(\Psi_0, F(y) \Psi_{\mathbf{q}, \sigma, n} \right) (q_F - q_{(n)}) = 0. \quad (10.4.12)$$

因此我们必须有

$$q_{(n)} = q_F \quad (10.4.13)$$

只要

$$\left(\Psi_0, F(y) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma, n} \right) \neq 0. \quad (10.4.14)$$

正如我们在上一节所看的, 方程(10.4.14)是确保包含 F 的动量空间Green函数含有对应单粒子态 $\Psi_{\mathbf{p}, \sigma, n}$ 的极点的条件. 对于与拉格朗日量中一个场相对应的单粒子态, 我们可以取 $F = \Psi_\ell$, 在这一情况下 $q_F = q_\ell$, 但是我们这里的结果适用于普遍的单粒子态, 与它们的场是否出现在拉格朗日量中无关.

这几乎, 但不相当于, 告诉我们, 虽有全部可能的通过带荷粒子影响光子的发射与吸收的高阶图, 但物理电荷就等于出现在拉格朗日量中的参量 q_ℓ (或是这类参量的和, 类似 q_F .) 这里所必须增加的条件是, 拉格朗日量在变换 $\Psi_\ell \rightarrow \exp(iq_\ell \alpha) \Psi_\ell$ 下不变的要求, 与固定 q_ℓ 的整体量级无关. 物理电荷是那些决定物质场对一给定重整化电磁场 A^μ 如何响应的量. 即, 要求重整化电磁场以线性组合 $[\partial_\mu - iq_\ell A_\mu] \Psi_\ell$ 出现在物质拉格朗日量 \mathcal{L}_M 中固定了 q_ℓ 的量级, 这使得流 J^μ 是

$$J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta A_\mu}. \quad (10.4.15)$$

但是当我们把拉格朗日量写成它的最简形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu})(\partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu) + \mathcal{L}_M(\Psi_\ell, [\partial_\mu - iq_{B\ell} A_{B\mu}] \Psi_\ell), \quad (10.4.16)$$

A^μ 与 q_ℓ 并不是出现在该拉格朗日量中的“裸电磁场” $A_{B\mu}$ 和“裸电荷” $q_{B\ell}$. 重整化电磁场(定义为全传播子的极点在 $p^2 = 0$ 处且留数为1)按惯例以 A_B^μ 的形式写为

$$A^\mu = Z_3^{-1/2} A_B^\mu, \quad (10.4.17)$$

所以为了使电荷 q_ℓ 表征带电粒子对一给定重整化电磁场的响应, 我们应该讲重整化荷定义为

$$q_\ell = \sqrt{Z_3} q_{B\ell}. \quad (10.4.18)$$

我们看到任何粒子的物理电荷 q 正好正比于 q_B , 即与那些出现在拉格朗日量中的粒子相关的参量, 并有一个对于所有粒子都相同的比例常数 $\sqrt{Z_3}$. 这帮助我们理解一个粒子, 例如质子, 它被虚介子以及其它的强相互作用粒子云所围绕, 是如何拥有与相互作用弱得多的正电子相同的电荷的. 由于某些原因唯一需要假定的是拉格朗日中的荷 $q_{B\ell}$ 与电子的荷相同与那些构成质子的粒子(两个 u 夸克和一个 d 夸克)的荷相反; 那么高阶修正的效应仅出现在公共因子 $\sqrt{Z_3}$ 中.



图 10.5 量子电动力学中电子传播子与顶点函数的一阶修正图, 这里直线是电子; 波浪线是光子.

为了使荷重整化仅源于对光子传播子的辐射修正, 那么对带荷粒子的传播子和电磁顶点的各种各样其它辐射修正之间必存在抵消. 通过使用带荷粒子传播子与顶点之间的关系, 即著名的 *Ward* 等式, 我们可以更深层次的理解这些抵消的性质.

例如, 考察电子流 $J^\mu(x)$, 荷为 q 的 Heisenberg-绘景 Dirac 场 $\Psi_n(y)$ 以及它的协变伴 $\bar{\Psi}_m(z)$ 的 Green 函数. 我们定义带荷粒子的电磁顶点函数 Γ^μ 为

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{-ip \cdot x} e^{-ik \cdot y} e^{i\ell \cdot z} \left(\Psi_0, T \left\{ J^\mu(x) \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \right\} \Psi_0 \right) \\ & \equiv -i(2\pi)^4 q S'_{nn'}(k) \Gamma_{n'm'}^\mu(k, \ell) S'_{m'm}(\ell) \delta^4(p + k - \ell), \end{aligned} \quad (10.4.19)$$

其中

$$-i(2\pi)^4 S'_{nm}(k) \delta^4(k - \ell) \equiv \int d^4y d^4z \left(\Psi_0, T \left\{ \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \right\} \Psi_0 \right) e^{-ik \cdot y} e^{i\ell \cdot z} \quad (10.4.20)$$

根据 6.4 节的定理, 方程 (10.4.20) 给出有一个入费米线和一个出费米线的所有 Feynman 图之和. 另外, 方程 (10.4.19) 给出所有这样的图与一外光子线相连后构成的图之和, 所以 Γ^μ 是有一个入 Dirac 线, 一个出 Dirac 线以及一个光子线的“顶点”图之和, 但是剥去了全 Dirac 外线传播子和裸光子外线传播子. 为了使 S' 和 Γ^μ 的归一化完全清晰, 我们提及过, 在无相互作用极限下, 这些函数取值

$$S'(k) \rightarrow [i\gamma_\lambda k^\lambda + m - i\epsilon]^{-1}, \quad \Gamma^\mu(k, \ell) \rightarrow \gamma^\mu.$$

对这些极限值施予修正的一圈图如图 10.5 所示.

通过使用等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T \left\{ J^\mu(x) \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \right\} &= T \left\{ \partial_\mu J^\mu(x) \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \right\} \\ &+ \delta(x^0 - y^0) T \left\{ \left[J^0(x), \Psi_n(y) \right] \bar{\Psi}_m(z) \right\} \\ &+ \delta(x^0 - z^0) T \left\{ \Psi_n(y) \left[J^0(x), \bar{\Psi}_m(z) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.4.21)$$

我们可以导出 Γ^μ 和 S' 之间的关系, 等式中的 δ -函数是源于阶跃函数的时间导数. 守恒条件 (10.4.2) 告诉我们第一项为零, 而第二项和第三项可以通过对易关系 (10.4.9) 计算出来, 对易关系在这里给出

$$\left[J^0(\mathbf{x}, t), \Psi_n(\mathbf{y}, t) \right] = -q \Psi_n(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (10.4.22)$$

以及它的伴

$$\left[J^0(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}_n(\mathbf{y}, t) \right] = q \bar{\Psi}_n(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.4.23)$$

那么方程(10.4.21)变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T \left\{ J^\mu(x) \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \right\} &= -q \delta^4(x-y) T \left\{ \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \right\} \\ &+ q \delta^4(x-z) T \left\{ \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \right\}. \end{aligned} \quad (10.4.24)$$

将其代入Fourier变换(10.4.19)给出

$$(\ell - k)_\mu S'(\ell) \Gamma^\mu(k, \ell) S'(\ell) = i S'(\ell) - i S'(k)$$

或者另一种形式

$$(\ell - k)_\mu \Gamma^\mu(k, \ell) = i S'^{-1}(k) - i S'^{-1}(\ell). \quad (10.4.25)$$

这被称为广义Ward等式, 由Takahashi(高桥)(通过这些方法)首次导出.⁴ 原始的Ward等式, 是之前Ward⁵从微扰论研究中导出的, 可以通过令 ℓ 趋于 k 从方程(10.4.25)中得出. 在这一极限下, 方程(10.4.25)给出

$$\Gamma^\mu(k, k) = -i \frac{\partial}{\partial k_\mu} S'^{-1}(k). \quad (10.4.26)$$

通过方程(10.3.28)

$$S'^{-1}(k) = i \not{k} + m - \Sigma^*(k),$$

费米传播子与自能插入 $\Sigma^*(k)$ 相关联, 所以方程(10.4.26)可以写成

$$\Gamma^\mu(k, k) = \gamma^\mu + i \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Sigma^*(k). \quad (10.4.27)$$

对于一个重整化Dirac场, 方程(10.3.31)和(10.4.27)告诉我们在质量壳上

$$\bar{u}'_k \Gamma^\mu(k, k) u_k = \bar{u}'_k \gamma^\mu u_k, \quad (10.4.28)$$

其中 $[i\gamma_\mu k^\mu + m]u_k = [i\gamma_\mu k^\mu + m]u'_k = 0$. 因此费米场的重整化条件确保了, 当一个在质量壳上的费米子与一个没有动量传递的电磁场相互作用时, 对顶点函数 Γ_μ 的修正抵消了, 这正是我们着手测量费米子电荷时的情况. 如果我们没有使用重整化费米场, 那么对顶点函数的修正将正好抵消由于对外费米线的辐射修正所引起的修正, 这再一次使得电荷不变.

10.5 规范不变性

电荷的守恒可以用来证明如下量的一个重要结果

$$\begin{aligned} M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\cdots}(q, q', \cdots) &\equiv \int d^4x \int d^4x' \cdots e^{-iq \cdot x} e^{-iq' \cdot x'} \cdots \\ &\times \left(\Psi_\beta^-, T \left\{ J^\mu(x), J^{\mu'}(x') \cdots \right\} \Psi_\alpha^+ \right). \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

在类似旋量电动力学的理论中, 电磁相对作用对场 A^μ 是线性的, 上面的量是在任意跃迁 $\alpha \rightarrow \beta$ 中, 发射(和/或吸收)质量壳上光子或非质量壳上光子的矩阵元, 其中光子4-动量为 q, q' 等(和/或 $-q, -q'$ 等),

并省略了外线光子系数函数或外线传播子. 我们的结果是方程(10.5.1)与任何一光子4-动量收缩后为零:

$$\begin{aligned} q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\dots}(q, q', \dots) &= q'_{\mu'} M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\dots}(q, q', \dots) \\ &= \dots = 0. \end{aligned} \quad (10.5.2)$$

既然 M 被定义成相对于光子线对称, 证明这些量中的第一个为零就足够了.

由于这个原因, 注意到, 通过分部积分

$$\begin{aligned} q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\dots}(q, q', \dots) &= -i \int d^4x \int d^4x' \dots \\ &\times e^{-iq\cdot x} e^{-iq'\cdot x'} \dots \left(\Psi_\beta^-, \frac{\partial}{\partial x^\mu} T \left\{ J^\mu(x), J^{\mu'}(x') \dots \right\} \Psi_\alpha^+ \right). \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

电流 $J^\mu(x)$ 是守恒的, 但这并不立即指出方程(10.5.3)为零, 这是因为对于出现在编时乘积定义中的 θ -函数, 我们还要考虑它所含有的 x^0 -相关性. 例如, 对于只有两个流

$$T \left\{ J^\mu(x) J^\nu(y) \right\} = \theta(x^0 - y^0) J^\mu(x) J^\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) J^\nu(y) J^\mu(x)$$

所以, 考虑到 $J^\mu(x)$ 的守恒:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T \left\{ J^\mu(x) J^\nu(y) \right\} &= \delta(x^0 - y^0) J^0(x) J^\nu(y) - \delta(y^0 - x^0) J^\nu(y) J^0(x) \\ &= \delta(x^0 - y^0) \left[J^0(x), J^\nu(y) \right]. \end{aligned} \quad (10.5.4)$$

对于多于两个的流, 对于除 $J^\mu(x)$ 本身以外的每一个流, 我们得到了(在编时乘积内)类似的等时对易子. 为了计算这个对易子, 我们回忆(正如上一节所证明的)对于场算符以及场伴和/或导数的任意乘积 F

$$\left[J^0(\vec{x}, t), F(\vec{y}, t) \right] = -q_F F(\vec{x}, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

其中 q_F 是 F 中场和场导数的 q_ℓ 之和减去场伴以及场伴导数的 q_ℓ 之和. 对于电流, q_J 是零; $J^\nu(y)$ 本身是电中性算符. 它得出

$$\left[J^0(\vec{x}, t), J^\nu(\vec{y}, t) \right] = 0 \quad (10.5.5)$$

因而方程(10.5.4)为零, 使得方程(10.5.3)给出

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\dots}(q, q', \dots) = 0, \quad (10.5.6)$$

这正是所要证明的.

这里存在一个重要的条件. 在推导方程(10.5.5)时, 我们应该将这样的事实考虑在内, 类似于流算符 $J^\nu(y)$, 场在同一时空点 y 的乘积可能仅能通过某些处理这类乘积中的无限大的正规化步骤正确定义. 在很多情况下, 这表现为存在对 $J^0(\vec{x}, t)$ 与正规化流 $J^i(\vec{y}, t)$ 的对易子的非零贡献, 称其为*Schwinger*项.⁶ 其中流包含了来自带荷标量场 Φ 的项, 存在包含 $\Phi^\dagger\Phi$ 的正规化无关*Schwinger*项. 然而, 在多光子振幅中, 所有这些*Schwinger*项被额外相互作用的贡献抵消了, 这种额外的相互作用是电磁场的二次型, 这些*Schwinger*项要么(如果规范不变)来自于正规化步骤, 要么, 对于带荷标量, 直接来自于拉格朗日量中的项. 我们将主要处理带荷旋量场, 并使用一种不导

致Schwinger项的正规化步骤(维度正规化), 所以在下文中, 我们将忽视这一问题而继续使用朴素对易关系(10.5.5).

即使除光子以外还有其它粒子不在质量壳上, 只要假定所有的带荷粒子被取在质量壳上, 即保持在态 Ψ_β^- 和 Ψ_α^+ 中, 同样的讨论给出类似于方程(10.5.2)的结果. 否则, 方程(10.5.2)的左边将得到非零等时对易子的贡献, 就像我们在上一节推导Ward等式中所遇到的那些对易子.

方程(10.5.2)的一个结果是, 如果我们对光子传播子 $\Delta_{\mu\nu}(q)$ 做一改变

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \rightarrow \Delta_{\mu\nu}(q) + \alpha_\mu q_\nu + q_\mu \beta_\nu, \quad (10.5.7)$$

S -矩阵元不受影响, 或者如果我们对光子偏振矢量做一改变

$$e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) \rightarrow e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) + ck_\rho, \quad (10.5.8)$$

其中 $k^0 \equiv |\mathbf{k}|$, 而 α_μ, β_ν 和 c 是完全任意的(不必须是常数, 并且对所有的传播子或偏振矢量不一定是相同的), S -矩阵元也不受影响. 这称为(有些不严格) S -矩阵的规范不变性.

为了证明这一结果唯一需要说明的就是 S -矩阵对光子偏振矢量以及传播子的显式依赖关系

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} \propto & \int d^4q_1 d^4q_2 \cdots \Delta_{\mu_1\nu_1}(q_1) \Delta_{\mu_2\nu_2}(q_2) \cdots \\ & \times e_{\rho_1}^*(\mathbf{k}'_1 \lambda'_1) e_{\rho_2}^*(\mathbf{k}'_2 \lambda'_2) \cdots e_{\sigma_1}(\mathbf{k}_1 \lambda_1) e_{\sigma_2}(\mathbf{k}_2 \lambda_2) \cdots \\ & \times M_{ba}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \nu_1 \nu_2 \cdots \rho_1 \rho_2 \cdots \sigma_1 \sigma_2 \cdots}(-q_1, -q_2, \cdots, q_1, q_2, \cdots, -k'_1, -k'_2, \cdots, k_1, k_2, \cdots) \end{aligned} \quad (10.5.9)$$

其中 $M^{\rho\sigma\cdots}$ 是在没有电磁相互作用的情况下计算的矩阵元(10.5.1).^{*} 从守恒条件(10.5.2)就立即得出了方程(10.5.9)在“规范变换”(10.5.7)和(10.5.8)的不变性. (在9.6节, 我们使用了路径积分公式证明了这一定理的特殊情况, 即规范不变算符的编时乘积的真空期望值是独立于传播子(9.6.21)中的常数 α .) 这个结果不像看起来那么基本, 比如它不适用于单个图, 而仅适用于图的和, 在这些图中, 流顶点被插入到了图中所有可能的位置.

对于光子传播子的计算, 方程(10.5.2)有一特别重要的应用. 全传播子, 一般称为 $\Delta'_{\mu\nu}(q)$, 采取形式

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\rho}(q) M^{\rho\sigma}(q) \Delta_{\sigma\nu}(q), \quad (10.5.10)$$

其中 $M^{\rho\sigma}$ 正比于有两个流且 α 和 β 都是真空态的矩阵元(10.5.1), 而 $\Delta_{\mu\nu}$ 是裸光子传播子, 这里在普遍的Lorentz-不变规范下写为

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \equiv \frac{\eta_{\mu\nu} - \xi(q^2) q_\mu q_\nu / q^2}{q^2 - i\epsilon}. \quad (10.5.11)$$

从方程(10.5.2), 我们在这里有 $q^\mu M_{\mu\nu}(q) = 0$, 使得

$$q^\mu \Delta'_{\mu\nu}(q) = \frac{q_\nu (1 - \xi(q^2))}{q^2 - i\epsilon}. \quad (10.5.12)$$

另一方法, 正如在10.3节中我们对标量场和旋量场所做的那样, 我们可以将全光子传播子表示为有两条光子外线的(不同于 M)单光子不可约图之和 $\Pi^*(q)$ 的形式:

$$\begin{aligned} \Delta'(q) &= \Delta(q) + \Delta(q) \Pi^*(q) \Delta(q) + \Delta(q) \Pi^*(q) \Delta(q) \Pi^*(q) \Delta(q) + \cdots \\ &= [\Delta(q)^{-1} - \Pi^*(q)]^{-1} \end{aligned} \quad (10.5.13)$$

^{*}态 a 和 b 与 α 和 β 是相同的, 但删掉了光子. 注意, M 的变量现在全部取为 λ 4-动量, 这是为什么对于方程(10.5.9)中的 M , 我们要给某些变量插入不同符号的原因.

或者换种形式

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\nu}(q)\Pi^{*\rho\sigma}(q)\Delta'_{\rho\nu}(q). \quad (10.5.14)$$

那么为了满足方程(10.5.12), 我们必须有

$$q_\rho\Pi^{*\rho\sigma}(q) = 0. \quad (10.5.15)$$

这与Lorentz不变性告诉我们, $\Pi^*(q)$ 必须采取形式

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2). \quad (10.5.16)$$

那么方程(10.5.13)得出的全传播子的形式为

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \frac{\eta_{\mu\nu} - \tilde{\xi}(q^2)q_\mu q_\nu / q^2}{[q^2 - i\epsilon][1 - \pi(q^2)]}, \quad (10.5.17)$$

其中

$$\tilde{\xi}(q^2) = \xi(q^2)[1 - \pi(q^2)] + \pi(q^2). \quad (10.5.18)$$

现在, 因为 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ 仅得到了单光子不可约图的贡献. 预期在 $q^2 = 0$ 处不会有任何极点. (在破缺规范对称性的情形下, 有一重要的例外, 我们将在卷II讨论.) 特别地, $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ 中的 $q_\mu q_\nu$ 项中在 $q^2 = 0$ 处没有极点告诉我们方程(10.5.16)中的函数 $\pi(q^2)$ 也没有这样的极点, 因而全传播子(10.5.17)中的极点仍在 $q^2 = 0$ 处, 这表明辐射修正并不赋予光子质量.

对于重整化电磁场, 辐射修正也不应该改变方程(10.5.17)中光子极点留数的规范不变部分, 所以

$$\pi(0) = 0. \quad (10.5.19)$$

这一条件导致了对电磁场重整化常数 Z_3 的决定. 回忆, 当以重整化场(10.4.17)的形式表示时, 电动力学拉格朗日量采取形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \mathcal{L}_M(\Psi_\ell, [\partial_\mu - iq_\ell A_\mu]\Psi_\ell).$$

那么单光子不可约振幅中的函数 $\pi(q^2)$ 是

$$\pi(q^2) = 1 - Z_3 + \pi_{\text{LOOP}}(q^2), \quad (10.5.20)$$

其中 π_{LOOP} 是圈图的贡献. 它得出

$$Z_3 = 1 + \pi_{\text{LOOP}}(0). \quad (10.5.21)$$

实际上, 我们仅计算圈贡献并扣掉一个常数以使 $\pi(0)$ 为零.

附带地, 方程(10.5.18)表明, 对于 $q^2 \neq 0$, 光子传播子中的规范项被辐射修正改变了. 一个例外是Landau规范的情况, 这一规范对于所有的 q^2 有 $\tilde{\xi} = \xi = 1$.

10.6 电磁形状因子与磁矩

假使我们希望计算一个粒子在外电磁场(或是另一粒子的电磁场)上的散射,直到该电磁场的第一阶,但是到我们粒子所有其它相互作用(包含电磁相互作用)的所有阶.为了这个目的,我们需要知道如下所有Feynman图的贡献之和:有一条入粒子线和一条出粒子线,二者均在质量壳上,再加上一条光子线,其可以在也可以不在质量壳上.根据6.4节的定理,该和由电磁流 $J^\mu(x)$ 的单粒子矩阵元给定.我们来看看是什么控制着该矩阵元的一般形式.

根据时空平移不变性,电磁流的单粒子矩阵元采取形式

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(x)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) = \exp(i(p-p')\cdot x)\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right). \quad (10.6.1)$$

那么流守恒条件 $\partial_\mu J^\mu$ 要求

$$(p'-p)_\mu\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) = 0. \quad (10.6.2)$$

另外,令 $\mu=0$ 并对所有 \mathbf{x} 积分给出

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, Q\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^0(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right).$$

利用方程(10.4.8),这给出

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^0(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) = (2\pi)^{-3}q\delta_{\sigma'\sigma}, \quad (10.6.3)$$

其中 q 是粒子荷.

在我们的处理中,我们也有Lorentz不变性对流矩阵元所施加的约束.为了探索这些约束,我们限制在最简单的情况:自旋0和自旋 $\frac{1}{2}$.这里所呈现的分析提供了对其它流也有用的技巧的一个例子,诸如半轻子弱相互作用的流.

自旋0

对于自旋0, Lorentz不变性要求流的单粒子矩阵元采取一般形式

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}'}, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p}}\right) = q(2\pi)^{-3}(2p'^0)^{-1/2}(2p^0)^{-1/2}\mathcal{J}^\mu(p', p), \quad (10.6.4)$$

其中 p^0 和 p'^0 是质量壳能量($p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$),而 $\mathcal{J}^\mu(p', p)$ 两个4-矢 p'^μ 和 p^μ 的4-矢函数.(为了以后的方便,我们从 \mathcal{J} 中抽取了因子,粒子的荷 q .)显然,最普遍的这类4-矢函数采取的形式为 p'^μ 和 p^μ 的线性组合,或者等价地, $p'^\mu + p^\mu$ 和 $p'^\mu - p^\mu$ 的线性组合,其中系数为标量.但标量 p^2 和 p'^2 被固定在值 $p^2 = p'^2 = -m^2$ 处,使得用 p^μ 和 p'^μ 构建的标量变量只能是 $p\cdot p'$ 的函数,或者等价的

$$k^2 \equiv (p-p')^2 = -2m^2 - 2p\cdot p'. \quad (10.6.5)$$

因此函数 $\mathcal{J}^\mu(p', p)$ 必须采取形式

$$\mathcal{J}^\mu(p', p) = (p'+p)^\mu F(k^2) + i(p'-p)^\mu H(k^2). \quad (10.6.6)$$

J^μ 是厄密的这一性质暗示了 $\mathcal{J}^\mu(p', p)^* = \mathcal{J}^\mu(p, p')$,使得 $F(k^2)$ 和 $H(k^2)$ 都是实的.

现在, $(p'-p)\cdot(p'+p)$ 为零,而 $(p'-p)^2 = k^2$ 一般不为零,所以流守恒的条件就是

$$H(k^2) = 0. \quad (10.6.7)$$

另外, 令方程(10.6.4)中 $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ 且 $\mu = 0$, 并与方程(10.6.3)比较, 我们发现

$$F(0) = 1. \quad (10.6.8)$$

函数 $F(k^2)$ 称为该粒子的电磁形状因子.

自旋 $\frac{1}{2}$

对于自旋 $\frac{1}{2}$, Lorentz不变性要求流的单粒子矩阵元采取一般形式

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) = iq (2\pi)^{-3} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) \quad (10.6.9)$$

其中 Γ^μ 是 p^ν, p'^ν 以及 γ^ν 的4-矢 4×4 矩阵函数, 而 u 是通常的Dirac系数函数. 我们抽取了因子 iq 以使 Γ^μ 的归一化与上一节中的归一化相同.

就像对于任意的 4×4 矩阵, 我们可以用16个协变矩阵 $1, \gamma_\rho, [\gamma_\rho, \gamma_\sigma], \gamma_5 \gamma_\rho$ 和 γ_5 展开 Γ^μ . 因此, 最普遍的4-矢 Γ^μ 可以写为如下量的线性组合

$$\begin{aligned} 1: & p^\mu, p'^\mu \\ \gamma_\rho: & \gamma^\mu, p^\mu \not{p}, p'^\mu \not{p}, p^\mu \not{p}', p'^\mu \not{p}' \\ [\gamma_\rho, \gamma_\sigma]: & [\gamma^\mu, \not{p}], [\gamma^\mu, \not{p}'], [\not{p}, \not{p}'] p^\mu, [\not{p}, \not{p}'] p'^\mu \\ \gamma_5 \gamma_\rho: & \gamma_5 \gamma_\rho \epsilon^{\rho\mu\nu\sigma} p_\nu p'_\sigma \\ \gamma_5: & \text{无} \end{aligned}$$

其中每一项的系数是问题中唯一标量变量(10.6.5)的函数. 通过使用 u 和 \bar{u} 所满足的Dirac方程:

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') (i\not{p}' + m) = 0, \quad (i\not{p} + m) u(\mathbf{p}, \sigma) = 0,$$

这可以被大大地简化. 结果是, 除了前三个条目: p^μ, p'^μ 和 γ^μ , 其它所有的都可以扔掉*. 我们得出结论, 在费米子质量壳上, Γ^μ 可以表示成 γ^μ, p^μ 和 p'^μ 的线性组合, 我们将其写为

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[\gamma^\mu F(k^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2m} (p + p')^\mu G(k^2) + \frac{(p - p')^\mu}{2m} H(k^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (10.6.10)$$

$J^\mu(0)$ 的厄密性暗含了

$$\beta \Gamma^{\mu\dagger}(p', p) \beta = -\Gamma^\mu(p, p'), \quad (10.6.11)$$

*对于 $p^\mu \not{p}, p'^\mu \not{p}, p^\mu \not{p}'$ 和 $p'^\mu \not{p}'$, 这是显然的, 它们分别可以被替换成 $imp^\mu, imp'^\mu, imp^\mu$ 和 imp'^μ , 这已经出现在我们的列表中. 另外, 我们可以写出

$$[\gamma^\mu, \not{p}] = 2\gamma^\mu \not{p} - \{\gamma^\mu, \not{p}\} = 2\gamma^\mu \not{p} - 2p^\mu,$$

这可以被替换成 $2im\gamma^\mu - 2p^\mu$, 是已经出现在我们列表中的项的线性组合. 对于 $[\gamma^\mu, \not{p}']$ 同样如此. 另外,

$$[\not{p}, \not{p}'] = -2\not{p}' \not{p} + \{\not{p}, \not{p}'\} = -2\not{p}' \not{p} + 2p \cdot p',$$

这可以被替换成 $2m^2 + 2p \cdot p' = -k^2$. 因此 $[\not{p}, \not{p}'] p^\mu$ 项和 $[\not{p}, \not{p}'] p'^\mu$ 并不给出新结果. 最后, 为了处理最后一项, 我们可以使用关系

$$\gamma_5 \gamma_\rho \epsilon^{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{6} i \left(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma - \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu - \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu \right).$$

与 p_ν 和 p'^σ 收缩, 并将所有的 \not{p} 因子移至右边, 将所有的 \not{p}' 因子移至左边, 这又一次给出 p^μ, p'^μ 和 γ^μ 的线性组合.

这使得 $F(k^2)$, $G(k^2)$ 和 $H(k^2)$ 都必须是 k^2 的实函数.

方程(10.6.10)中的前两项自动满足守恒条件(10.6.2), 这是因为

$$(p' - p)_\mu \gamma^\mu = -i \left[(i\not{p}' + m) - (i\not{p} + m) \right]$$

以及

$$(p' - p) \cdot (p' + p) = p'^2 - p^2 .$$

另一方面, $(p' - p)^2$ 一般不为零, 所以流守恒条件要求第三项为零

$$H(k^2) = 0 . \quad (10.6.12)$$

另外, 在方程(10.6.9)和(10.6.10)中令 $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$, 我们发现

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma'}, J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) = i q (2\pi)^{-3} \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \left[\gamma^\mu F(0) - \frac{i}{m} p^\mu G(0) \right] u(\mathbf{p}, \sigma) .$$

利用等式 $\{\gamma^\mu, i\not{p} + m\} = 2m\gamma^\mu + 2ip^\mu$, 我们又有

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, \sigma) = -\frac{ip^\mu}{m} \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma) .$$

再回忆起

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma) = \delta_{\sigma' \sigma} m / p^0$$

因而

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma'}, J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) = q (2\pi)^{-3} (p^\mu / p^0) \delta_{\sigma' \sigma} \left[F(0) + G(0) \right] . \quad (10.6.13)$$

其与方程(10.6.3)比较给出归一化条件

$$F(0) + G(0) = 1 . \quad (10.6.14)$$

注意, 电磁顶点矩阵 Γ^μ 通常以另两个矩阵形式写成

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[\gamma^\mu F_1(k^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} i [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu F_2(k^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma) , \end{aligned} \quad (10.6.15)$$

这一形式将是有益的. 正如已经提及的, 利用用以定义 $F(k^2)$ 和 $G(k^2)$ 的那些量, 我们可以重写出现在第二项中的矩阵

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \frac{1}{2} i [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu u(\mathbf{p}, \sigma) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[-i\not{p}' \gamma^\mu + \frac{1}{2} i \{ \gamma^\mu, \not{p}' \} - i\gamma^\nu \not{p} + \frac{1}{2} i \{ \gamma^\mu, \not{p} \} \right] u(\mathbf{p}, \sigma) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[i(p'^\mu + p^\mu) + 2m\gamma^\mu \right] u(\mathbf{p}, \sigma) . \end{aligned} \quad (10.6.16)$$

比较方程(10.6.15)与(10.6.10), 我们发现

$$F(k^2) = F_1(k^2) + 2m F_2(k^2) \quad (10.6.17)$$

$$G(k^2) = -2m F_2(k^2) . \quad (10.6.18)$$

归一化条件(10.6.14)现在变成

$$F_1(0) = 1 .$$

为了以粒子的形状因子计算出它的磁矩, 我们在小动量的情况下, 即 $|\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| \ll m$, 考察顶点函数的空间部分. 对于这个目的, 利用方程(10.6.16)将方程(10.6.10)(其中 $H = 0$)重写成第三种形式将是有益的:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) &= \frac{-i}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[(p + p')^\mu \{F(k^2) + G(k^2)\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu F(k^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma) . \end{aligned} \quad (10.6.19)$$

对于零动量, 方程(5.4.19)和(5.4.20)给出Dirac矩阵对易子的矩阵元

$$\bar{u}(0, \sigma') [\gamma^i, \gamma^j] u(0, \sigma) = 4i\epsilon_{ijk} \left(\mathbf{J}_k^{(\frac{1}{2})} \right)_{\sigma'\sigma} , \quad \bar{u}(0, \sigma') [\gamma^i, \gamma^0] u(0, \sigma) = 0 ,$$

其中 $\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ 是自旋 $\frac{1}{2}$ 的角动量矩阵. 因此至小动量的第一阶,

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) \rightarrow \frac{-i}{2m} (\mathbf{p} + \mathbf{p}') \delta_{\sigma'\sigma} + \frac{1}{m} [(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}]_{\sigma'\sigma} F(0) . \quad (10.6.20)$$

因此, 在非常弱的时间无关外矢势 $A(\mathbf{x})$ 中, 相互作用哈密顿量 $H' = -\int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot A(\mathbf{x})$ 在小动量的单粒子态之间的矩阵元是

$$\begin{aligned} (\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, H' \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) &= \frac{-iqF(0)}{m(2\pi)^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} A(\mathbf{x}) \cdot [(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}]_{\sigma'\sigma} \\ &= -\frac{qF(0)}{m(2\pi)^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} (\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})})_{\sigma'\sigma} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) , \end{aligned} \quad (10.6.21)$$

其中 $\mathbf{B} = \nabla \times A$ 是磁场. 因此在平缓变化的弱磁场极限下, 相互作用哈密顿量的矩阵元是

$$(\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, H' \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) = -\frac{qF(0)}{m} (\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})})_{\sigma'\sigma} \cdot \mathbf{B} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') . \quad (10.6.22)$$

自旋为 j 的任意粒子的磁矩 μ 被定义为, 粒子与平缓变化的静态弱磁场的相互作用的矩阵元是

$$(\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, H' \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) = -\frac{\mu}{j} (\mathbf{J}^{(j)})_{\sigma'\sigma} \cdot \mathbf{B} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') . \quad (10.6.23)$$

因此, 方程(10.6.22)给出荷为 q , 质量为 m 而自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子的磁矩:

$$\mu = \frac{qF(0)}{2m} . \quad (10.6.24)$$

作为一个特殊情形, 这包含了著名的Dirac结果 $\mu = q/2m$, 即没有辐射修正的自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的磁矩.

在这里不带证明的, 我们来提一下质子的形状因子, 通过比较电子-质子散射的实验数据与实验室参照系微分截面的Rosenbluth(罗森布鲁斯)公式:⁸

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^4}{4(4\pi)^2 E_0^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \left[1 + \frac{2E_0}{m} \sin^2(\theta/2) \right]^{-1} \\ &\quad \times \left\{ \left(F(k^2) + G(k^2) \right)^2 + \frac{k^2}{4m^2} \left(2F^2(k^2) \tan^2(\theta/2) + G^2(k^2) \right) \right\} , \end{aligned}$$

我可以测量出 $k^2 > 0$ 的形状因子 $F(k^2)$ 和 $G(k^2)$, 在上式中, E_0 是入射电子的能量(在这里取为 $E_0 \gg m_e$); θ 是散射角; 而

$$k^2 = \frac{4E_0^2 \sin^2(\theta/2)}{1 + (2E_0/m) \sin^2(\theta/2)} .$$

10.7 Källén-Lehmann表示*

我们在10.2节看到, 对于类似(10.2.1)的编时乘积的矩阵元, 单粒子中间态的出现导致了其Fourier变换中的极点. 多粒子中间态则会导致更加复杂的奇异性, 其很难进行普遍描述. 但是在真空期望值仅包含两个算符的特殊情况下, 我们有一个方便的表示, 它清楚的展示了Fourier变换的解析结构. 特别地, 这个表示可用于传播子, 即两个算符是场的基本粒子. 当与量子力学的正定要求结合时, 这一表示在传播子的解析行为与重整化常数的大小之间产生有趣的纽带.

考察一个复标量Heisenberg绘景算符 $\Phi(x)$, 其可以是也可以不是一个基本粒子场. 乘积 $\Phi(x)\Phi^\dagger(y)$ 的真空期望值可以表示成

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = \sum_n \langle 0|\Phi(x)|n \rangle \langle n|\Phi^\dagger(y)|0 \rangle, \quad (10.7.1)$$

其中求和取遍态的任意完全集. (这里对 n 的求和代表对连续指标的积分和对离散指标的求和.) 选择这些态为动量4-矢 P^μ 的本征态, 平移不变性告诉我们

$$\begin{aligned} \langle 0|\Phi(x)|n \rangle &= \exp(ip_n \cdot x) \langle 0|\Phi(0)|n \rangle, \\ \langle n|\Phi^\dagger(y)|0 \rangle &= \exp(-ip_n \cdot y) \langle n|\Phi^\dagger(0)|0 \rangle \end{aligned} \quad (10.7.2)$$

随之有

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = \sum_n \exp(ip_n \cdot (x-y)) |\langle 0|\Phi(0)|n \rangle|^2. \quad (10.7.3)$$

将其写成谱函数的形式将是方便的. 注意到求和 $\sum_n \delta^4(p-p_n) |\langle 0|\Phi(0)|n \rangle|^2$ 是4-矢 p^μ 的标量函数, 因而可以仅依赖于 p^2 以及(当 $p^2 \leq 0$ 时)阶跃函数 $\theta(p^0)$. 事实上, 方程(10.7.3)中的中间态总有 $p^2 \leq 0$ 和 $p^0 > 0$, 所以求和的形式为

$$\sum_n \delta^4(p-p_n) |\langle 0|\Phi(0)|n \rangle|^2 = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \rho(-p^2) \quad (10.7.4)$$

其在 $p^2 > 0$ 是有 $\rho(-p^2) = 0$. (因子 $(2\pi)^{-3}$ 是从 ρ 中抽取出来的, 这是为了之后的方便.) 谱函数显然是实的且正定的. 在这个定义下, 我们可以将(10.7.3)重写为

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \exp[ip \cdot (x-y)] \theta(p^0) \rho(-p^2) \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \int_0^\infty d\mu^2 \exp[ip \cdot (x-y)] \theta(p^0) \\ &\quad \times \rho(\mu^2) \delta(p^2 + \mu^2). \end{aligned} \quad (10.7.5)$$

交换对 p^μ 和 μ^2 积分的次序, 这可以表示为

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = (2\pi)^{-3} \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2), \quad (10.7.6)$$

其中 Δ_+ 是熟悉的函数

$$\Delta_+(x-y; \mu^2) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^4p \exp[ip \cdot (x-y)] \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2). \quad (10.7.7)$$

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略.

以相同的方法, 我们可以证明

$$\langle \Phi^\dagger(y)\Phi(x) \rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2 \bar{\rho}(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2) \quad (10.7.8)$$

其中, 第二个谱函数 $\bar{\rho}(\mu^2)$ 通过如下方程定义

$$\sum_n \delta^4(p-p_n) |\langle n | \Phi(0) | 0 \rangle|^2 = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \bar{\rho}(-p^2). \quad (10.7.9)$$

我们现在使用因果律条件, 即对易子 $[\Phi(x), \Phi^\dagger(y)]$ 在间隔 $x-y$ 类空时必须为零. 这个对易子的真空期望值是

$$\langle [\Phi(x), \Phi^\dagger(y)] \rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2 \left(\rho(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2) - \bar{\rho}(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2) \right). \quad (10.7.10)$$

正如5.2节中提及的, 对于类空的 $x-y$, 函数 $\Delta_+(x-y)$ 不为零, 但它变成偶函数. 为了使(10.7.10)对于所有类空间隔都为零, 必须有

$$\rho(\mu^2) = \bar{\rho}(\mu^2). \quad (10.7.11)$$

这是CPT定理的特殊情况, 这里没有使用微扰论就证明了它;

$$\langle T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} \rangle_0 = -i \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta_F(x-y; \mu^2), \quad (10.7.12)$$

其中 $\Delta_F(x-y; \mu^2)$ 是质量为 μ 的无自旋粒子的Feynman传播子:

$$-i\Delta_F(x-y; \mu^2) \equiv \theta(x^0-y^0) \Delta_+(x-y; \mu^2) - \theta(y^0-x^0) \Delta_+(y-x; \mu^2). \quad (10.7.13)$$

借用10.3节所引入的全传播子的记号, 我们引入动量空间函数

$$-i\Delta'(p) \equiv \int d^4x \exp[-ip \cdot (x-y)] \langle T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} \rangle_0. \quad (10.7.14)$$

回忆起

$$\int d^4x \exp[-ip \cdot (x-y)] \Delta_F(x-y; \mu^2) = \frac{1}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon}. \quad (10.7.15)$$

这给出了我们的谱表示:⁹

$$\Delta'(p) = \int_0^\infty \rho(\mu^2) \frac{d\mu^2}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon}. \quad (10.7.16)$$

这一结果与 $\rho(\mu^2)$ 的正定性的立即推论是, 当 $|p^2| \rightarrow \infty$ 时, $\Delta'(p)$ 无法比裸传播子 $1/(p^2 + m^2 - i\epsilon)$ 更快**地趋于零. 不时地有人提议在非微扰拉格朗日量中引入高阶导数项, 这会使得传播子在 $|p^2| \rightarrow \infty$ 时比 $1/p^2$ 更快的趋于零, 但是谱表示表明这将必然地背离量子力学的正定性假设.

**实际上, 甚至不能确定 $\Delta'(p)$ 在 $|p^2| \rightarrow \infty$ 时是否为零, 即使这是从谱表示中得出的. 问题源于交换了对 p^2 和 μ^2 的积分. 可以确定的是, $\Delta'(p)$ 是 $-p^2$ 的解析函数, 且有一穿过正实轴 $-p^2 = \mu^2$ 的, 由 $\pi\rho(\mu^2)$ 给出的间断点, 这将通过下一节的方法证明. 由此得出, $\Delta'(p)$ 是由谱函数 $\rho(\mu^2)$ 的色散关系与可能的扣除给定的:

$$\Delta'(p) = P(p^2) + (-p^2 + \mu_0^2)^n \int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2)}{(\mu^2 + \mu_0^2)^n} \frac{d\mu^2}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon},$$

其中 n 是正整数, μ_0^2 是任意的正常数, 而 $P(p^2)$ 是 p^2 的 $n-1$ 阶多项式, 与 μ_0^2 无关且在 $n=0$ 时不出现.

利用谱表示与等时对易关系, 我们可以导出谱函数的一个有趣的求和规则. 如果 $\Phi(x)$ 是按惯例归一化(非重整化)的正则场算符, 那么

$$\left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \Phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.7.17)$$

我们注意到

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta_+(x - y) \Big|_{x^0=y^0} = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

所以谱表示(10.7.10)与对易关系(10.7.17)告诉我们

$$\int_0^\infty \rho(\mu^2) d\mu^2 = 1. \quad (10.7.18)$$

这暗示了, 当 $|p^2| \rightarrow \infty$ 时, 非重整化场的动量空间传播子(10.7.16)有着自由场渐进行为

$$\Delta'(p) \rightarrow \frac{1}{p^2}.$$

这一结果尽在合理的紫外发散正规化方案下才是有意义的; 在微扰论中, 非重整化场的矩阵元无限大, 并且它们的传播子是定义不合理的.

现在考察这样的可能性, 存在一个质量为 m 的单粒子态 $|\mathbf{k}\rangle$, 其与态 $\langle 0|\Phi(0)$ 的矩阵元不为零. Lorentz不变性要求矩阵元采取形式

$$\langle 0|\Phi(0)|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^{-3/2} \left(2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \right)^{-1/2} N, \quad (10.7.19)$$

其中 N 是常数. 根据10.3节的普遍结果, 非重整化场的传播子 $\Delta'(p)$ 在 $p^2 \rightarrow -m^2$ 处应有一留数为 $Z \equiv |N|^2 > 0$ 的极点. 即,

$$\rho(\mu^2) = Z \delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2), \quad (10.7.20)$$

其中 $\sigma(\mu^2) \geq 0$ 是多粒子态的贡献. 与方程(10.7.18)一起, 这有一推论

$$1 = Z + \int_0^\infty \sigma(\mu^2) d\mu^2 \quad (10.7.21)$$

因而

$$Z \leq 1 \quad (10.7.22)$$

其中等号仅对于自由粒子成立, 这时 $\langle 0|\Phi(0)$ 与多粒子态没有矩阵元.

因为 Z 是正的, 方程(10.7.21)也可以视为给场 Φ 与多粒子态的耦合提供了一个上界:

$$\int_0^\infty \sigma(\mu^2) d\mu^2 \leq 1 \quad (10.7.23)$$

其中当 $Z = 0$ 时等号成立. 极限 $Z = 0$ 有一个有趣的解释, 即粒子是复合粒子而非基本粒子的条件.¹⁰ 在这里, “复合”粒子可以理解为场不出现在拉格朗日量中的粒子. 考察这样一个粒子, 中性无自旋粒子, 并假定它的量子数允许它被由其它场构建的算符 $F(\Psi)$ 所湮灭. 通过在拉格朗日量密度中增加形式[†]为 $\Delta\mathcal{L} = (\Phi - F(\Psi))^2$ 的项, 我们可以自由地引入该粒子的场 Φ , 这是

[†]在凝聚态物理中, 这被称为“Hubbard-Stratonovich(哈伯德-斯特拉托诺维奇)变换”.¹¹ 在卷II我们关于超导的讨论中, 这用于引入电子对的场.

因为对 Φ 的路径积分可以通过令它等于稳相点 $\Phi = F(\Psi)$ 完成, 这时 $\Delta\mathcal{L} = 0$. 但是假定我们转而写成 $\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$, 其中 $\Delta\mathcal{L}_0 \equiv -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2$ 是通常的自由场拉格朗日量, 并视 $\Delta\mathcal{L}_1 = \Delta\mathcal{L} - \Delta\mathcal{L}_0$ 为相互作用. 相互作用中的项 $\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ 是不新奇的. 我们在方程(10.3.12)中遇到了这样的项, 但在那里乘了因子 $(1 - Z)$; 唯一不同的是在这里 $Z = 0$. 取代调整 Z 以满足场重整化条件 $\Pi^{*'}(0) = 0$, 在这里我们必须视其为复合粒子的耦合常数上的条件. 不幸的是, 在量子场论中实现这一步骤是不可能的, 这是因为, 正如我们已经看到的, $Z = 0$ 意味着粒子与它的组分尽可能强的耦合, 这禁止了微扰论的使用. 在非相对论量子力学中, 条件 $Z = 0$ 确实证实是有用的; 例如, 它固定了氘核与中子和质子的耦合.¹²

尽管这里所导出的谱表示是针对无自旋粒子的, 将这些推广到其它场是很容易的. 诚然, 在下一章我们将证明, 到 e^2 阶, 电磁场的 Z -因子(一般称为 Z_3)给定为

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)$$

(其中 $\Lambda \gg m_e$ 是紫外截断), 这与上界(10.7.22)一致.

10.8 色散关系*

早期尝试将微扰量子场论用于强核力和弱核力的失败引导了理论家, 在20世纪50年代后期, 理论家们尝试将散射振幅的解析性与么正性用做推导不依赖于任何特定场论的普遍非微扰结果的方式. 这开始于对色散关系的再度注意. 在它的原始形式中,¹³ 色散关系以对折射率虚部积分的形式给出它的实部. 它是从折射率作为频率的函数的解析性质中推出的, 其源于条件: 电磁信号在介质中不能比光在真空中传播的更快. 通过将折射率表示为向前光子散射振幅, 色散关系可以重写为, 向前散射振幅的实部作为对它虚部积分的公式, 因而再经由么正性, 成为对总截面的公式. 关于这一关系令人振奋的事情之一是, 它提供了微扰论的一个替代品; 给定到 e^2 阶的散射振幅, 可以计算出到 e^4 阶的散射振幅的虚部以及总截面, 然后利用色散关系计算到该阶的向前散射振幅的实部, 在这个过程中甚至不需要计算一个圈图.

色散关系的现代方法始于1954年Gell-Mann, Goldberger(戈德伯格)和Thirring(瑟林)的工作.¹⁴ 取代考察光在介质中的传播, 他们直接从微观因果律的条件, 其陈述为当算符的对易子在所在点的间隔是类空间隔时为零, 导出了散射振幅的解析性. 这一方法使得Goldberger¹⁵不久之后导出了 π 介子-核子向前散射振幅的一个非常有用的公式.

为了看到如何使用微观因果律原理, 在任意自旋无质量玻色子的实验室参照系中考察在任意靶 α 上的向前散射, 其中靶的质量 $m_\alpha > 0$ 且 $\mathbf{p}_\alpha = 0$. (这不仅对光子的散射用重要应用, 在 $m_\pi = 0$ 的极限下对 π 介子散射也很有用, 这将在卷II中进行讨论.) 通过重复使用方程(10.3.4)或Lehmann-Symanzik-Zimmerman定理,³ S -矩阵元在这里是

$$S = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega\omega'} |N|^2} \lim_{k^2 \rightarrow 0} \lim_{k'^2 \rightarrow 0} \times \int d^4x \int d^4y e^{-ik' \cdot y} e^{ik \cdot x} (i\Box_y)(i\Box_x) \langle \alpha | T \{ A^\dagger(y), A(x) \} | \alpha \rangle. \quad (10.8.1)$$

这里的 k 和 k' 是初态和末态玻色子4-动量, 其中 $\omega = k^0$, $\omega' = k'^0$; $A(x)$ 是任意的Heisenberg-绘景算符, 但其在单玻色子态 $|k\rangle$ 与真空之间的矩阵元 $\langle \text{VAC} | A(x) | k \rangle = (2\pi)^{-3/2} (2\omega)^{-1/2} N e^{ik \cdot x}$ 不为零;

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略.

而 N 是矩阵元中的常数. 在光子散射中, $A(x)$ 是电磁场的一个横向分量, 而对于无质量 π 介子散射, 它是强子场的一个赝标量函数. 插入微分算符 $-i\Box_x$ 和 $-i\Box_y$ 是为了提供因子 ik'^2 和 ik^2 以抵消外线玻色子传播子. 令这些算符作用在 $A^\dagger(y)$ 和 $A(x)$ 上, 我们有

$$S = \frac{-1}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega\omega'} |N|^2} \lim_{k^2 \rightarrow 0} \lim_{k'^2 \rightarrow 0} \times \int d^4x \int d^4y e^{-ik' \cdot y} e^{ik \cdot x} \langle \alpha | T \{ J^\dagger(y), J(x) \} | \alpha \rangle + \text{ETC} , \quad (10.8.2)$$

其中 $J(x) \equiv \Box_x A(x)$, 而“ETC”代表等时对易子项(equal time commutator)的Fourier变换, 等时对易子产生于作用在编时乘积中阶跃函数上的导数. 对于 $x^0 = y^0$, 除非 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 否则类似 $A(x)$ 和 $A^\dagger(y)$ (或者它们的导数)的算符的对易子为零, 所以“ETC”项是作用在 $\delta^4(x - y)$ 上的微分算符的Fourier变换, 因而是玻色子4-动量的多项式函数. 我们在这里关心的是 S -矩阵元的解析性质, 所以该多项式的细节是无关的.

利用平移不变性, 方程(10.8.2)给定 S -矩阵元为 $S = -2\pi i \delta^4(k' - k) M(\omega)$, 其中

$$M(\omega) = \frac{-i}{2\omega |N|^2} F(\omega) , \quad (10.8.3)$$

$$F(\omega) \equiv \int d^4x e^{i\omega \ell \cdot x} \langle \alpha | T \{ J^\dagger(0), J(x) \} | \alpha \rangle + \text{ETC} , \quad (10.8.4)$$

现在它被理解成 $k^\mu = \omega \ell^\mu$, 其中 ℓ 是被 $\ell^\mu \ell_\mu = 0$ 和 $\ell^0 = 1$ 所固定的4-矢.

以对易子的形式, 编时乘积可以重写成两种不同的形式

$$\begin{aligned} T \{ J^\dagger(0), J(x) \} &= \theta(-x^0) [J^\dagger(0), J(x)] + J(x) J^\dagger(0) \\ &= -\theta(x^0) [J^\dagger(0), J(x)] + J^\dagger(0) J(x) . \end{aligned} \quad (10.8.5)$$

相对应地, 我们可以写下

$$F(\omega) = F_A(\omega) + F_+(\omega) = F_R(\omega) + F_-(\omega) , \quad (10.8.6)$$

其中

$$F_A(\omega) \equiv \int d^4x \theta(-x^0) \langle \alpha | [J^\dagger(0), J(x)] | \alpha \rangle e^{i\omega \ell \cdot x} + \text{ETC} , \quad (10.8.7)$$

$$F_R(\omega) \equiv - \int d^4x \theta(x^0) \langle \alpha | [J^\dagger(0), J(x)] | \alpha \rangle e^{i\omega \ell \cdot x} + \text{ETC} , \quad (10.8.8)$$

$$F_+(\omega) \equiv \int d^4x \langle \alpha | J(x) J^\dagger(0) | \alpha \rangle e^{i\omega \ell \cdot x} , \quad (10.8.9)$$

$$F_-(\omega) \equiv \int d^4x \langle \alpha | J^\dagger(0) J(x) | \alpha \rangle e^{i\omega \ell \cdot x} . \quad (10.8.10)$$

微观因果律告诉我们, 除非 x^μ 在光锥内, 否则(10.8.7)和(10.8.8)中的被积函数为零, 然后阶跃函数要求(10.8.7)中的 x^μ 在向后光锥内, 使得 $x \cdot \ell > 0$, 要求(10.8.8)中的 x^μ 在向前光锥内, 使得 $x \cdot \ell < 0$. 我们得到结论, $F_A(\omega)$ 对于 $\text{Im } \omega > 0$ 是解析的而 $F_R(\omega)$ 对于 $\text{Im } \omega < 0$ 是解析的, 这是因为在两种情

况下因子 $e^{i\omega \ell \cdot x}$ 均为对 x^μ 的积分提供了一个截断. (回忆“ETC”项是多项式, 因而对于所有有限点均解析.) 那么我们可以定义函数

$$\mathcal{F}(\omega) \equiv \begin{cases} F_A(\omega) & \text{Im } \omega > 0 \\ F_R(\omega) & \text{Im } \omega < 0 \end{cases} \quad (10.8.11)$$

除了在实轴上有间断, 其对于整个复 ω 平面是解析的.

我们现在可以来推导色散关系了. 根据方程(10.8.6), $\mathcal{F}(\omega)$ 穿越在任意实的 E 上的割点的不连续性是

$$\mathcal{F}(E + i\epsilon) - \mathcal{F}(E - i\epsilon) = F_A(E) - F_R(E) = F_-(E) - F_+(E). \quad (10.8.12)$$

如果在上半平面或下半平面 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时, $\mathcal{F}(\omega)/\omega^n$ 为零, 那么通过除以任意一个 n 阶多项式 $P(\omega)$, 我们可以获得一个在 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时为零的函数, 并且这个函数除了在实轴上的割点以及处在 $P(\omega)$ 零点 ω_ν 上的极点外都是解析的. (其中 $\mathcal{F}(\omega)$ 本身在 $|\omega| \rightarrow \infty$ 是为零, 我们可以取 $P(\omega) = 1$.) 根据留数方法, 那么我们有

$$\frac{\mathcal{F}(\omega)}{P(\omega)} + \sum_\nu \frac{\mathcal{F}(\omega_\nu)}{(\omega_\nu - \omega)P'(\omega_\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathcal{F}(z)dz}{(z - \omega)P(z)}, \quad (10.8.13)$$

其中 ω 是不在实轴上的任意点, 而 C 是由两部分构成的围道: 一个在实轴之上从 $-\infty + i\epsilon$ 跑到 $+\infty + i\epsilon$ 然后沿着大半圆回到 $-\infty + i\epsilon$, 另一个处在实轴之下, 从 $+\infty - i\epsilon$ 跑到 $-\infty - i\epsilon$ 然后沿着大半圆回到 $+\infty - i\epsilon$. 由于函数 $\mathcal{F}(z)/P(z)$ 在 $|z| \rightarrow \infty$ 时为零, 我们可以忽视来自大半圆的贡献. 利用方程(10.8.12), 方程(10.8.13)变成

$$\mathcal{F}(\omega) = Q(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega)P(E)} dE, \quad (10.8.14)$$

其中 $Q(\omega)$ 是 $(n - 1)$ 阶多项式

$$Q(\omega) \equiv -P(\omega) \sum_\nu \frac{\mathcal{F}(\omega_\nu)}{(\omega_\nu - \omega)P'(\omega_\nu)}.$$

这种形式的色散关系, 其中 $P(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 分别是 n 阶和 $n - 1$ 阶的, 被称为有 n 个消减. 如果我们取 $P = 1$, 那么 $Q = 0$, 这个关系就被称为未消减的.

如果我们让 ω 从上方接近实轴, 方程(10.8.14)给出

$$F_A(\omega) = Q(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega - i\epsilon)P(E)} dE. \quad (10.8.15)$$

回忆方程(10.8.6)和(3.1.25), 这是

$$F(\omega) = Q(\omega) + \frac{1}{2}F_-(\omega) + \frac{1}{2}F_+(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega)P(E)} dE \quad (10.8.16)$$

其中 $1/(E - \omega)$ 现在解释为主值函数 $\mathcal{P}/(E - \omega)$.

这一结果是有用的, 这是因为我们可以用可测截面的方式表示函数 $F_\pm(E)$. 对方程(10.8.9)和(10.8.10)中的多粒子中间态 β 的完全集求和(包括对 β 中粒子的动量积分)并再次使用平移不变性, 我们有

$$F_+(E) = (2\pi)^4 \sum_\beta \left| \langle \beta | J(0)^\dagger | \alpha \rangle \right|^2 \delta^4(-p_\alpha + E\ell + p_\beta), \quad (10.8.17)$$

$$F_{-}(E) = (2\pi)^4 \sum_{\beta} |\langle \beta | J(0) | \alpha \rangle|^2 \delta^4(p_{\alpha} + E\ell - p_{\beta}) . \quad (10.8.18)$$

但是在 $B + \alpha \rightarrow \beta$ 中吸收无质量玻色子 B 的矩阵元, 或者在 $B^c + \alpha \rightarrow \beta$ 中吸收它的反粒子 B^c 的矩阵元是

$$-2i\pi M_{B^c + \alpha \rightarrow \beta} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{B^c} N}} \langle \beta | J(0)^{\dagger} | \alpha \rangle , \quad (10.8.19)$$

$$-2i\pi M_{B + \alpha \rightarrow \beta} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_B N}} \langle \beta | J(0) | \alpha \rangle . \quad (10.8.20)$$

与方程(3.4.15)比较, 我们看到 $F_{\pm}(E)$ 可以表示成能量 $\mp E$ 处的总截面^{**}:

$$F_{+}(E) = \theta(-E) \frac{2|E||N|^2}{(2\pi)^3} \sigma_{\alpha+B^c}(|E|) , \quad (10.8.21)$$

$$F_{-}(E) = \theta(E) \frac{2|E||N|^2}{(2\pi)^3} \sigma_{\alpha+B}(E) . \quad (10.8.22)$$

现在, 对于实的 $\omega > 0$, 散射振幅(10.8.3)是

$$M(\omega) = \frac{-iQ(\omega)}{2\omega|N|^2} - \frac{i}{2(2\pi)^3} \sigma_{\alpha+B}(\omega) - \frac{P(\omega)}{\omega(2\pi)^4} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)} \right] E dE . \quad (10.8.23)$$

更加常见的是, 以实验室参照系中向前散射振幅 $f(\omega)$ 的形式表示这个色散关系, 实验室参照系被定义成使得实验室参照系微分截面在向前方向是 $|f(\omega)|^2$. 这一振幅以 $M(\omega)$ 的形式给定为 $f(\omega) = -4\pi^2\omega M(\omega) = 2\pi^2 i F(\omega) / |N|^2$, 所以方程(10.8.23)现在变成

$$f(\omega) = R(\omega) + \frac{i\omega}{4\pi} \sigma_{\alpha+B}(\omega) + \frac{P(\omega)}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)} \right] E dE ,$$

其中 $R(\omega) \equiv 2i\pi^2 Q(\omega) / |N|^2$. 光学定理(3.6.4)告诉我们右边的第二项等于 $i \operatorname{Im} f(\omega)$, 所以这也可以写成更通常的形式

$$\operatorname{Re} f(\omega) = R(\omega) + \frac{P(\omega)}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)} \right] E dE ,$$

特别地, 我们看到如果我们选择 $P(\omega)$ 为实, 那么 $R(\omega)$ 为实.

向前散射振幅又满足一个重要的对称性条件. 通过将方程(10.8.7)和(10.8.8)中的积分变量 x 变成 $-x$, 然后再使用平移不变性

$$\langle \alpha | [J^{\dagger}(0), J(-x)] | \alpha \rangle = \langle \alpha | [J^{\dagger}(x), J(0)] | \alpha \rangle$$

^{**}在某些情况下, 选择定则允许跃迁 $\alpha \rightarrow \alpha + B$ 和 $\alpha \rightarrow \alpha + B^c$, 函数 $F_{\pm}(E)$ 也包含正比于 $\delta(E)$ 的项, 这一项来源于对中间态 β 的求和中单粒子态 α 的贡献. 对于横向偏振光子, 或是极限 $m_{\pi} \rightarrow 0$ 中的赝标量 π 介子, 这是不会发生的.

我们看到对于 $\text{Im } \omega \leq 0$, 除了交换 J 与 J^\dagger , $F_A(-\omega)$ 与 $F_R(\omega)$ 是相同的. 即,

$$F_A(-\omega) = F_R^c(\omega) \quad \text{对于 } \text{Im } \omega \leq 0,$$

其中下标 c 表明该振幅指代的是反粒子 B^c 在 α 上的散射. (这个关系不被方程(10.8.7)和(10.8.8)中的等时对易子项所影响的证明, 我们留给读者.) 以同样的方式, 我们发现

$$F_R(-\omega) = F_A^c(\omega) \quad \text{对于 } \text{Im } \omega \geq 0,$$

并且, 对于实的 ω

$$F_\pm(-\omega) = F_\mp(\omega).$$

在(10.8.6)中使用这些关系, 并回忆 $f(\omega)$ 是正比于 $F(\omega)$, 针对于实的 ω , 我们发现了交叉对称性关系,

$$f(-\omega) = f^c(\omega). \quad (10.8.24)$$

我们可以随便地取 $P(\omega)$ 为充分高阶的任意多项式, 但是之后 $R(\omega)$ 不仅依赖于 $P(\omega)$, 也依赖于 $\mathcal{F}(\omega)$ 在 $P(\omega)$ 零点处的值. 如果 $P(\omega)$ 是实的且是 n -阶的, 方程(10.8.16)中唯一的自由参量是实 $(n-1)$ 阶多项式 $R(\omega)$ 中的 n 个实系数. 因此方程(10.8.16)中仅包含 n 个未知的独立实常数, 即对于给定的 $P(\omega)$, 多项式 $R(\omega)$ 中的实系数. 因此我们希望将其它任意的 n 多项式 $P(\omega)$ 取得尽可能的小.

我们可以尝试取 $P(\omega) = 1$, 但这并不合理. 3.7节的分析认为向前散射振幅应该像 ω 或者像 $\omega \ln^2 \omega$ 一样增长. 在 $f(\omega)/P(\omega)$ 随着 $\omega \rightarrow \infty$ 趋于零的情况下, 取 $P(\omega)$ 为二阶多项式是足够的, 这使得 $R(\omega)$ 关于 ω 是线性的. 方便起见选择 $P(E) = E^2$, 那么方程(??)变成

$$\begin{aligned} \text{Re } f(\omega) = & a + b\omega \\ & + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)} \right] \frac{dE}{E}, \end{aligned} \quad (10.8.25)$$

其中 a 和 b 是未知的常数. 交叉对称性条件(10.8.24)告诉我们色散关系中反粒子散射振幅 $f^c(\omega)$ 的相对应常数是

$$a^c = a, \quad b^c = -b. \quad (10.8.26)$$

例如, 如果我们假定截面 $\sigma_{\alpha+B}(E)$ 和 $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$ 在 $E \rightarrow \infty$ 时的行为为不同的常数乘上 $(\ln E)^r$, 那么(10.8.25)会给出

$$\text{Re } f(\omega) \sim [\sigma_{\alpha+B}(\omega) - \sigma_{\alpha+B^c}(\omega)]\omega \ln \omega \sim \omega(\ln \omega)^{r+1} \quad (10.8.27)$$

所以散射振幅的实部的增长要比虚部快一个因子 $\ln \omega$. 这是难以置信的; 我们在3.7节看到, 在 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 散射振幅的实部预期要比虚部小得多, 这也是实验所证实的. 我们得出结论, 如果 $\sigma_{\alpha+B}(E)$ 和 $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$ 在 $E \rightarrow \infty$ 时的行为为常数乘上 $(\ln E)^r$, 那么这两个常数必须是相同的. 因为我们在这里关心的是高能极限, 这一结果不依赖于 B 是无质量玻色子的假定, 所以在同样意义上, 在高能下, 任何粒子与其反粒子在一固定靶上的截面的比值应该趋于1. 这一结果是所谓Pomeranchuk(波梅兰丘克)定理¹⁶稍微推广的版本. (Pomeranchuk仅考虑了情况 $r = 0$, 而3.7节以及截面的观测行为都支持 $r = 2$ 是更可能的.)

尽管Pomeranchuk从类似3.7节的讨论中得到了对散射振幅渐进行为的估计, 现今, 高能行为通常从Regge(雷吉)极点理论¹⁷推导出来. 在这里进入该理论的细节将使我们远离主题; 只需知道, 对于强子过程, 随着 ω 趋于无穷, $f(\omega)$ 的渐进行为是对正比于 $\omega^{\alpha_n(0)}$ 的项的求和, 其中 $\alpha_n(t)$ 是一组“Regge轨迹”, 每一个对应于碰撞过程中无限组不同的单强子态的交换. 强子-强子散射中的领头轨迹(实际上, 很多轨迹的复合)是“玻密子(Pomeron)”, 对于玻密子, $\alpha(0)$ 接近于一. 正是这个轨迹给出了 $E \rightarrow \infty$ 时近似为常数的截面. 我们可以从强子态的频谱中估计更低阶Regge轨迹的 $\alpha_n(0)$. 在质量 m 处发生自旋 j 的介子共振的一个必要不充分条件¹⁸是, m^2 等于 t 的值且其中轨迹 $\alpha_n(t)$ 之一等于 j . 除了玻密子, 在 π 介子-核子散射的领头轨迹上, 我们发现了, 在 $m = 770\text{Mev}$ 处 $j = 1$ 的 ρ 介子, $m = 1690\text{Mev}$ 处 $j = 3$ 的 g 介子, 以及 $m = 2350\text{Mev}$ 处 $j = 5$ 的介子. 推算这些 $\alpha(t)$ 的值至 $t = 0$, 我们可以估计出这个轨迹有 $\alpha(0) \approx 0.5$. 这个轨迹与 π^+ 和 π^- 的耦合有一相反符号, 所以对于 π 介子-核子散射, 我们预期 $f(\omega) - f^c(\omega)$ 的行为粗略类似于 $\sqrt{\omega}$.

对于光子散射, B 和 B^c 之间不存在区别, 所以方程(10.8.26)在这里给出 $b = 0$, 而方程(10.8.25)变成

$$f(\omega) = a + \frac{\omega^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sigma(E)}{E^2 - \omega^2} dE. \quad (10.8.28)$$

这本质上是原始的Kramers-Kronig¹³关系. 正如我们将在13.5节中看到的, 对于荷为 e 而质量为 m 的靶, 常数 a 有著名的值 $\text{Re } f(0) = -e^2/m$.

参考文献

- [1] W. H. Furry, *Phys. Rev.* **51**, 125 (1937).
- [2] H. Yukawa, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **17**, 48 (1935).
- [3] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).
- [4] Y. Takahashi, *Nuovo Cimento*, Ser. 10, **6**, 370 (1957).
- [5] J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78**, 182 (1950).
- [6] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **79**, 615 (1950).
- [7] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A117**, 610 (1928).
- [8] M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* **79**, 615 (1950).
- [9] G. Källén, *Helv. Phys. Acta* **25**, 417 (1952); *Quantum Electrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1972); H. Lehmann, *Nuovo Cimento* **11**, 342 (1954).
- [10] J. C. Howard and B. Jouvét, *Nuovo Cimento* **18**, 466 (1960); M. J. Vaughan, R. Aaron, and R. D. Amado, *Phys. Rev.* **1254**, 1258 (1961); S. Weinberg, in *Proceeding of the 1962 High-Energy Conference at CERN* (CERN, Geneva, 1962): p. 683.
- [11] R. L. Stratonovich, *Sov. Phys. Dokl.* **2**, 416 (1957); J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 77 (1959).
- [12] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **137**, B672 (1965).

- [13] H. A. Kramers, *Atti Congr. Intern. Fisici, Como* (Nicolo Zanichelli, Bologna, 1927); 重印于H. A. Kramers. *Collected Scientific Papers* (North-Holland, Amsterdam, 1956); R. de Kronig, *Ned. Tyd. Nat. Kunde* **9**, 402 (1942); *Physica* **12**, 543 (1946); J. S. Toll, The Dispersion Relation for Light and its Application to Problems Involving Electron Pairs (Princeton University Ph. D. Thesis 1952). 历史回顾, 参看J. D. Jackson in *Dispersion Relations* ed. by G. R. Sreaton (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1961); M. L. Goldberger in *Dispersion Relations and Elementary Particles*, ed. by C. De Witt and R. Omnes (Hermann, Paris, 1960).
- [14] M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, and W. Thirring, *Phys. Rev.* **95**, 1612 (1954). M. L. Goldberger证明了这一结果的非微扰性质, *Phys. Rev.* **97**, 508 (1955).
- [15] M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **99**, 979 (1955).
- [16] I. Ia. Pomeranchun, *J. Expt. Theor. Phys. (USSR.)* **34**, 725 (1958). 英文版: *Soviet Physics - JETP* **34**(7), 499 (1958). 推广, 参看S. Weinberg, *Phys. Rev.* **124**, 2049 (1961).
- [17] 参看P. D. B. Collins, *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1977). 原始文献是T. Regge, *Nuovo Cimento* **14**, 951 (1959): **18**, 947 (1960).
- [18] 自旋与平方质量的曲线被称为Chew-Frautschi图; 参看G. F. Chew and S. C. Frautschi, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 41 (1962).

第 11 章 量子电动力学中的一圈辐射修正

在本章我们将继续进行带荷轻子——仅与电磁场相互作用的有质量自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子理论中的一些经典一圈计算. 已知存在的轻子有三种或三“味”: 电子和 μ 子, 以及最重的, 最近发现的 τ 子. 尽管我们的大多数计算将等价地适用于 μ 子和 τ 子, 明确起见, 我们这里的计算中的带荷粒子指代“电子”. 在11.1节的一些通用准备后, 我们将在11.2节进行真空极化的计算, 在11.3节计算电子的反常磁矩, 在11.4节计算电子自能. 在行进的过程中, 我们将引入数个在这种计算中被证实有用的数学技巧, 包括Feynman参量的使用, Wick旋转, 以及't Hooft和Veltman的维数正规化和Pauli和Villars(维拉斯)的旧正规化方法. 尽管我们将遇到无限大, 将会看到, 如果以重整化荷和重整化质量的形式表述, 最终的结果是有限的. 在下一章, 关于重整化我们在这里所学到的东西将推广至微扰论任意阶中的一般理论.

11.1 抵消项

电子和光子的拉格朗日量密度被取为如下形式*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_B^{\mu\nu}F_{B\mu\nu} - \bar{\psi}_B[\gamma_\mu(\partial^\mu + ie_B A_B^\mu) + m_B]\psi_B \quad (11.1.1)$$

其中 $F_B^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu$; A_B^μ 和 ψ_B 是光子和电子的裸场(即, 非重整化场), 而 $-e_B$ 和 m_B 是电子的裸荷与裸质量. 正如上一章所描述的, 我们引入重整化场, 重整化荷以及重整化质量:

$$\psi \equiv Z_2^{-1/2}\psi_B, \quad (11.1.2)$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{-1/2}A_B^\mu, \quad (11.1.3)$$

$$e \equiv Z_3^{+1/2}e_B, \quad (11.1.4)$$

$$m \equiv m_B + \delta m, \quad (11.1.5)$$

其中对常数 Z_2 , Z_3 和 δm 进行调整, 使得重整化场传播子的极点与没有相互作用时的自由场传播子的极点有相同的位置和留数. 那么, 以重整化量的形式, 拉格朗日量可以写为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (11.1.6)$$

其中

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}[\gamma_\mu\partial^\mu + m]\psi, \quad (11.1.7)$$

$$\mathcal{L}_1 = -ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (11.1.8)$$

*在本章, 我们不会在Heisenberg-绘景和相互作用绘景之间做变换, 所以我们将回到传统的记法, 在这个记法中大写的 A 和小写的 ψ 分别用来标记光子场和带荷粒子场.

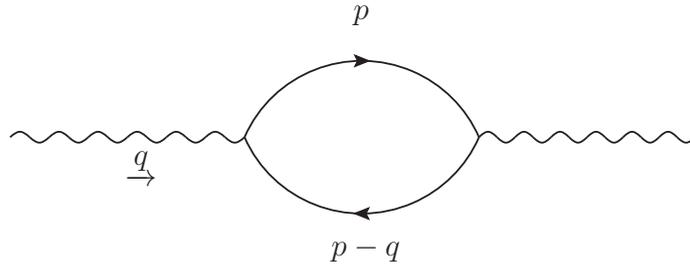


图 11.1 量子电动力学中真空极化的一圈图. 这里波浪线代表光子; 带箭头线代表电子

而 \mathcal{L}_2 是“抵消项”的和

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - (Z_2 - 1)\bar{\psi}\left[\gamma_\mu\partial^\mu + m\right]\psi \\ & + Z_2\delta m\bar{\psi}\psi - ie(Z_2 - 1)A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

将会发现 \mathcal{L}_2 中的所有项是 e 的二阶或更高阶, 并且这些项仅是用来抵消圈图所产生的发散.

11.2 真空极化

我们现在开始我们首个包含圈图的辐射修正计算, 即所谓的真空极化效应, 由对与内光子线相联系的传播子的修正构成. 在氢原子能级中, 真空极化会产生可测量的偏移, 并对束缚在重核周围原子轨道中的 μ 子能量做了重要的修正. 另外, 正如我们将在卷II中所讨论的, 在电动力学或其它规范理论高能行为的计算中, 真空极化的计算提供了一个关键元素.

就像10.5节中那样, 我们定义 $i(2\pi)^4\Pi^{*\mu\nu}(q)$ 为所有有两个光子外线的连接图之和, 这些连接图携带极化指标 μ 和 ν 并携带4-动量 q 进入并离开图, 其中不包含两条外线的光子传播子, 而星号代表我们排除了那些可以通过剪断某些内光子线变成非连的图. 全光子传播子 $\Delta'^{\mu\nu}(q)$ 由方程(10.5.13)给定:

$$\Delta' = \Delta[1 - \Pi^*\Delta]^{-1}, \quad (11.2.1)$$

其中 $\Delta^{\mu\nu}(q)$ 是没有辐射修正的光子传播子. 在这里我们的任务是计算对 $\Pi^{*\mu\nu}(q)$ 的领头贡献.

在最低阶中有对 Π^* 的一圈贡献, 对应于图11.1中的图:

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4\Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q) = & -\int d^4p \operatorname{Tr} \left\{ \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \right. \\ & \left. \times \left[(2\pi)^4 e\gamma^\rho \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\not{p} - \not{q}) + m}{(p - q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[(2\pi)^4 e\gamma^\sigma \right] \right\} \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

其中右边的负号是出现费米子圈所要求的. 更简洁些, 这是

$$\Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\operatorname{Tr} \{ [-i\not{p} + m]\gamma^\rho [-i(\not{p} - \not{q}) + m]\gamma^\sigma \}}{(p^2 + m^2 - i\epsilon)((p - q)^2 + m^2 - i\epsilon)}. \quad (11.2.3)$$

做这个积分的第一步是使用由Feynman所引入的一个技巧.¹ 我们使用基本公式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A + xB]^2} \quad (11.2.4)$$

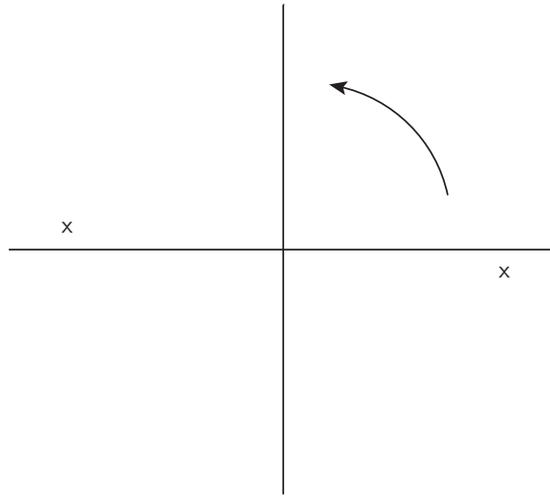


图 11.2 p^0 积分围道的Wick旋转. 小x标记 p^0 复平面中的极点; 箭头代表积分围道旋转的方向, 从实 p^0 -轴到虚 p^0 -轴.

将方程(11.2.3)中的标量传播子乘积写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + m^2 - i\epsilon)((p-q)^2 + m^2 - i\epsilon)} &= \int_0^1 \left[(p^2 + m^2 - i\epsilon)(1-x) \right. \\ &\quad \left. + ((p-q)^2 + m^2 - i\epsilon)x \right]^{-2} dx \\ &= \int_0^1 \left[p^2 + m^2 - i\epsilon - 2p \cdot qx + q^2x \right]^{-2} dx \\ &= \int_0^1 \left[(p-qx)^2 + m^2 - i\epsilon + q^2x(1-x) \right]^{-2} dx. \end{aligned}$$

(这是本章附录所给出的一类积分中的特殊情况.) 我们现在可以偏移动量空间中的积分变量*

$$p \rightarrow p + qx,$$

使得方程(11.2.3)变成

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4p \left[p^2 + m^2 - i\epsilon + q^2x(1-x) \right]^{-2} \\ &\quad \times \text{Tr} \left\{ \left[-i(\not{p} + \not{q}x) + m \right] \gamma^\rho \left[-i(\not{p} - \not{q}(1-x)) + m \right] \gamma^\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (11.2.5)$$

利用第8章附录的结果, 可以轻松地算出这里的迹

$$\begin{aligned} &\text{Tr} \left\{ \left[-i(\not{p} + \not{q}x) + m \right] \gamma^\rho \left[-i(\not{p} - \not{q}(1-x)) + m \right] \gamma^\sigma \right\} \\ &= 4 \left[-(p+qx)^\rho (p-q(1-x))^\sigma + (p+qx) \cdot (p-q(1-x)) \eta^{\rho\sigma} \right. \\ &\quad \left. - (p+qx)^\sigma (p-q(1-x))^\rho + m^2 \eta^{\rho\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

*严格地讲, 这一步仅在收敛积分中适用. 原则上, 为了证明这种变量的偏移合理. 我们已经引入一些正规化方案使得所有积分收敛, 例如下面要讨论的维数正规化方案.

我们的下一步被称为 *Wick* 旋转.² 只要 $-q^2 < 4m^2$, 对于 0 和 1 之间的所有 x , $m^2 + q^2x(1-x)$ 都是正的, 所以方程(11.2.5)的被积函数中的极点处在 $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + q^2x(1-x)} - i\epsilon$, 即, 恰好处在负实轴的上方和正实轴的下方. (见图11.2.) 我们可以逆时针地旋转 p^0 的围道而不穿过任何一个极点, 使得取代在实轴上从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对 p^0 积分, 我们转而在虚轴上从 $-i\infty$ 到 $+i\infty$ 对它积分. 即, 我们可以写成 $p^0 = ip^4$, 其中 p^4 取实值从 $-\infty$ 积到 $+\infty$. (如果不是 $-i\epsilon$ 而是 $i\epsilon$ 出现在传播子的分母中, 那么我们将会令 $p^0 = -ip^4$, 其中 p^4 又一次取实值从 $-\infty$ 积到 $+\infty$. 这个效应将是改变 $\Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q)$ 的符号.) 方程(11.2.5)现在变成

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int (d^4p)_E [p^2 + m^2 + q^2x(1-x)]^{-2} \\ &\quad \times \left[-(p+qx)^\rho(p-q(1-x))^\sigma + (p+qx) \cdot (p-q(1-x)) \eta^{\rho\sigma} \right. \\ &\quad \left. - (p+qx)^\sigma(p-q(1-x))^\rho + m^2 \eta^{\rho\sigma} \right], \end{aligned} \quad (11.2.7)$$

其中

$$(d^4p)_E = dp^1 dp^2 dp^3 dp^4$$

而所有的标量积利用欧几里得型进行计算

$$a \cdot b = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 + a^4 b^4$$

其中指定了 $q^4 \equiv -iq^0$. 另外, $\eta^{\rho\sigma}$ 可以被取成克罗内克- δ 符号, 其中指标取 1, 2, 3, 4, 或者取成通常的 Minkowski 张量, 其中指标取 1, 2, 3, 0.

积分(11.2.7)严重发散. 最终所有的无穷大会抵消, 但是为了看到这点, 必须在计算的中间阶段使用一些正规化技巧使得积分有限. 不会是简单地在某个最大动量 Λ 处截断积分, 而只对 $p^2 < \Lambda^2$ 的 p^μ 积分, 因为这相当于在电子传播子中引入阶跃函数 $\theta(\Lambda^2 - p^2)$, 而 Ward 等式(10.4.25)表明为了维持规范不变性, 对电子传播子的任何修正必须伴随着对电子-光子顶点的修正. 事实上, 伴随着一个普通的截断, 辐射修正会引入一个光子质量, 这是对规范不变性要求的一个显然破坏.

经验表明正规化一个发散积分而不损害规范不变性的最方便方法是维数正规化, 这一技巧有 't Hooft 和 Weltman³ 在 1972 年引入, 它基于从 4 维到任意时空维数 d 的一个延拓. 这相当于在类似(11.2.7)的积分中做角度平均, 方法是扔掉所有的 p 的奇次项, 而将有偶数个 p -因子的项换成**

$$p^\mu p^\nu \rightarrow p^2 \eta^{\mu\nu} / d, \quad (11.2.8)$$

$$p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma \rightarrow (p^2)^2 [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}] / d(d+2) \quad (11.2.9)$$

另外, 在以这种方式将被积函数写成仅是 p^2 的函数后, 体积元 $d^4 p_E$ 被替换成 $\Omega_d \kappa^{d-1} d\kappa$, 其中 $\kappa \equiv \sqrt{p^2}$, 而 Ω_d 是 d 维中单位球的面积.

$$\Omega_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2). \quad (11.2.10)$$

积分(11.2.7)现在对复时空维数 d 收敛. 我们可以通过复 d 值将积分延拓至 $d = 4$, 那么无穷大将再现为因子 $(d-4)^{-1}$.

**通过注意这些表达式的形式是由 Lorentz 不变性以及指标 μ, ν, ρ 等之间的对称性所规定的, 我们可以轻松地导出它们, 而通过要求两边在与 η 收缩后给出相同的结果可以找到因子.

对于积分(11.2.7), 维数正规化给出

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^\infty \kappa^{d-1} d\kappa \left[\kappa^2 + m^2 + q^2 x(1-x) \right]^{-2} \\ &\quad \times \left[\frac{-2\kappa^2}{d} \eta^{\rho\sigma} + 2q^\rho q^\sigma x(1-x) + \left(\kappa^2 - q^2 x(1-x) \right) \eta^{\rho\sigma} + m^2 \eta^{\rho\sigma} \right]. \end{aligned}$$

对 κ 的积分可以对任意复的 d (或者, 除了偶数, 对任意实的 d)进行. 我们可以使用著名公式(在本章附录将给出更广泛的形式):

$$\int_0^\infty \kappa^{d-1} [\kappa^2 + \nu^2]^{-2} d\kappa = \frac{1}{2} (\nu^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2), \quad (11.2.11)$$

$$\int_0^\infty \kappa^{d+1} [\kappa^2 + \nu^2]^{-2} d\kappa = \frac{1}{2} (\nu^2)^{\frac{d}{2}-1} \Gamma(1+d/2) \Gamma(1-d/2), \quad (11.2.12)$$

并发现

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{2e^2\Omega_d}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \int_0^1 dx \left[(1-2/d) \eta^{\rho\sigma} \left(m^2 + q^2 x(1-x) \right)^{\frac{d}{2}-1} \Gamma(1+d/2) \Gamma(1-d/2) \right. \\ &\quad \left. + \left(2q^\rho q^\sigma x(1-x) - q^2 \eta^{\rho\sigma} x(1-x) + m^2 \eta^{\rho\sigma} \right) \left(m^2 + q^2 x(1-x) \right)^{\frac{d}{2}-2} \right. \\ &\quad \left. \times \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2) \right]. \end{aligned}$$

积分中的两项可以结合, 利用

$$(1-2/d) \Gamma(1+d/2) \Gamma(1-d/2) = -\Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2).$$

我们发现

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4} \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2) (q^\rho q^\sigma - q^2 \eta^{\rho\sigma}) \\ &\quad \times \int_0^1 dx x(1-x) (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}. \end{aligned} \quad (11.2.13)$$

我们注意到一个重要的结果, 对 $\Pi^{*\rho\sigma}$ 的这一贡献满足关系

$$q_\rho \Pi_{1\text{loop}}^{*\rho\sigma}(q) = 0 \quad (11.2.14)$$

这正是10.5节中基于电流的守恒与中性所导出的. 我们使用维数正规化精确得到了这个结果. 维数正规化给出这一结果的原因是流的守恒不依赖于时空的维数.

方程(11.2.13)中的 Γ -函数 $\Gamma(2-d/2)$ 在 $d \rightarrow 4$ 是发散. 幸运的是, 正如我们在11.1节中看到的, 存在另外一个必须要加到 $\Pi^{*\rho\sigma}$ 上的项, 来自于相互作用拉格朗日量中的 $-\frac{1}{4}(Z_3-1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 项. 这一项有类似方程(11.2.13)的结构

$$\Pi_{\mathcal{L}_2}^{*\rho\sigma}(q) = -(Z_3-1)(q^2 \eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma), \quad (11.2.15)$$

所以到 e^2 阶, 完整的 Π^* 有形式

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2), \quad (11.2.16)$$

其中

$$\begin{aligned} \pi(q^2) = & -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x)(m^2 + q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \\ & - (Z_3 - 1). \end{aligned} \quad (11.2.17)$$

正如我们在10.5节所看到的, 重整化电磁场的定义要求 $\pi(0) = 0$ (为了使, 去除规范相关项后, 全光子传播子在 $q^2 = 0$ 处极点的留数与裸传播子相同). 因此, 到 e^2 阶,

$$Z_3 = 1 - \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)(m^2)^{\frac{d}{2}-2} \int_0^1 x(1-x) dx, \quad (11.2.18)$$

使得, 到 e^2 阶,

$$\begin{aligned} \pi(q^2) = & -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) \\ & \times \left[(m^2 + q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - (m^2)^{\frac{d}{2}-2} \right]. \end{aligned} \quad (11.2.19)$$

现在我们可以移掉正规化, 允许 d 趋于它的物理值 $d = 4$. 正如上面所提及的, 在一圈贡献中存在一个无限大, 源于 Γ -函数的极限行为

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{(2 - d/2)} - \gamma,$$

其中 γ 是Euler常数, $\gamma = 0.5772157$. 通过对 $\Gamma(2 - d/2)$ 使用 $1/(2 - d/2)$, 再将其它所有的 d 替换成4, 就给出了 $(Z_3 - 1)$ 的无限部分:

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{4e^2 \cdot 2\pi^2}{6(2\pi)^4} \frac{1}{2 - d/2} = \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{d - 4}. \quad (11.2.20)$$

我们将在卷II看到, 这一结果将被用来推导电荷重整化群方程中的领头项.

在 $d = 4$ 处的极点在 $\pi(q^2)$ 中显然抵消了, 这是因为当 $d = 4$ 时, $(m^2 + q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}$ 与 $(m^2)^{\frac{d}{2}-2}$ 有相同的极限1. 由于相同的原因, $\Gamma(2 - d/2)$ 中的 $-\gamma$ 项, 尽管对 $Z_3 - 1$ 有有限的贡献, 但在总的 $\pi(q^2)$ 中也抵消了. 存在对 $Z_3 - 1$ 其它有限的贡献, 这些贡献来源于 $\Gamma(2 - d/2)$ 中的极点与 $\Omega_d\Gamma(d/2)$ 围绕 $d = 4$ 的展开中的线性项之积, 但这些在 $\pi(q^2)$ 中也抵消了. 诚然, 在进行维数正规化中, 我们也可以将 $(2\pi)^{-4}$ 替换成 $(2\pi)^{-d}$, 而将因子 $Tr 1 = 4$ 替换成 γ -矩阵在任意偶数维 d 中的维数 $2^{d/2}$, 并且这些将会对 $(Z_3 - 1)$ 的有限部分有贡献, 但是对 $\pi(q^2)$ 无贡献. 更进一步, e^2 不能认为是 d -独立的, 这是因为检查方程(11.2.13)证明了, 它有 d -相关维数[质量] $^{4-d}$. 如果我们取 $e^2 \propto \mu^{4-d}$, 其中 μ 是某个带有质量单位的量, 那么在 $Z_3 - 1$ 存在额外的有限项, 它们源于 $\Gamma(2 - d/2)$ 中的极点与 μ^{4-d} 在 $(4 - d)$ 的级数展开中的 $(4 - d) \ln \mu$ -积, 但是, 又一次地, 它们在 $Z_3 - 1$ 与对 $\pi(q^2)$ 的一圈贡献之间抵消了.

在极限 $d \rightarrow 4$ 下, 唯一对 $\pi(q^2)$ 有贡献的项, 来自于 $\Gamma(2 - d/2)$ 中的极点与 $(m^2 + q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}$ 和 $(m^2)^{\frac{d}{2}-2}$ 在 $d = 4$ 的级数展开中的线性项之积:

$$(m^2 + q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - (m^2)^{\frac{d}{2}-2} \rightarrow \left(\frac{d}{2} - 2\right) \ln \left(1 + \frac{q^2x(1-x)}{m^2}\right). \quad (11.2.21)$$

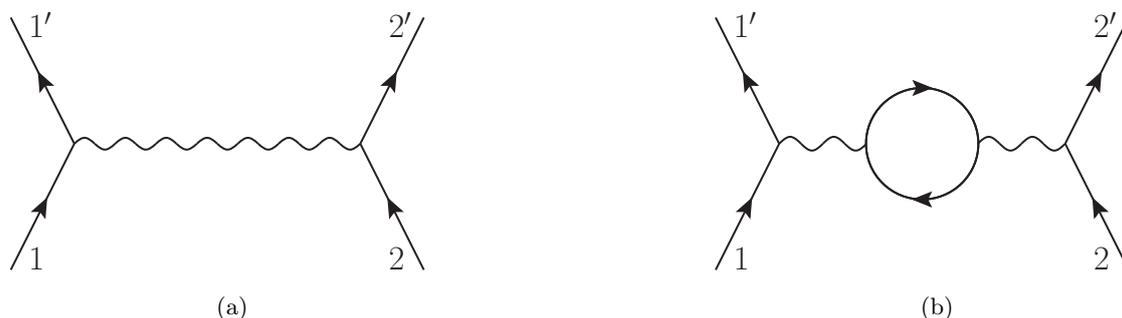


图 11.3 带荷粒子散射的两个图. 这里带箭头的线是带荷粒子; 波浪线是光子. 图(b)表示对树级近似图(a)的最低阶真空极化修正.

这最后给出了

$$\pi(q^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x) \ln \left(1 + \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right) dx. \quad (11.2.22)$$

通过考察真空极化在两个自旋 $\frac{1}{2}$ 带荷粒子散射上的效应, 我们可以探索它的物理意义. 图11.3中的Feynman图对散射S-矩阵元有如下形式的贡献

$$S_a(1, 2 \rightarrow 1', 2') = (2\pi)^{-12/2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \left[e_1 (2\pi)^4 \bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1 \right] \\ \times \left[-i(2\pi)^{-4} \frac{1}{q^2} \right] \left[e_2 (2\pi)^4 \bar{u}_{2'} \gamma_\mu u_2 \right],$$

$$S_b(1, 2 \rightarrow 1', 2') = (2\pi)^{-12/2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \left[e_1 (2\pi)^4 \bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1 \right] \\ \times \left[-i(2\pi)^{-4} \frac{1}{q^2} \right]^2 \left[i(2\pi)^4 (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \pi(q^2) \right] \left[e_2 (2\pi)^4 \bar{u}_{2'} \gamma^\nu u_2 \right],$$

其中 e_1 和 e_2 是两个被散射粒子的荷; 方程(11.2.22)中计算 $\pi(q^2)$ 使用的 e 是图11.3的圈中循环粒子荷的大小; 而 q^μ 是动量传递 $q \equiv p_1 - p_{1'} = p_{2'} - p_2$. 利用守恒性质 $q_\mu \bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1 = 0$, 这两个图合起来产生S-矩阵元:

$$S_{a+b}(1, 2 \rightarrow 1', 2') = \frac{-ie_1 e_2}{4\pi^2 q^2} [1 + \pi(q^2)] \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \\ \times \left[\bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1 \right] \left[\bar{u}_{2'} \gamma_\mu u_2 \right]. \quad (11.2.23)$$

在非相对论极限下, $\bar{u}_{1'} \gamma^0 u_1 \simeq -i\delta_{\sigma_1' \sigma_1}$ 而 $\bar{u}_{1'} \gamma^i u_1 \simeq 0$, 对粒子2同样如此. 另外, 在这一极限下 q^0 与 $|\mathbf{q}|$ 相比可忽略. 方程(11.2.23)在这一极限下变成

$$S_{a+b}(1, 2 \rightarrow 1', 2') = \frac{-ie_1 e_2}{4\pi^2 \mathbf{q}^2} [1 + \pi(\mathbf{q}^2)] \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \delta_{\sigma_1' \sigma_1} \delta_{\sigma_2' \sigma_2}. \quad (11.2.24)$$

这可以与一个定域的自旋无关中心势 $V(r)$ 所引起的Born近似中的S-矩阵相比

$$S_{\text{Born}}(1, 2 \rightarrow 1', 2') = -2i\pi \delta(E_{1'} + E_{2'} - E_1 - E_2) T_{\text{Born}}(1, 2 \rightarrow 1', 2'). \quad (11.2.25)$$

$$T_{\text{Born}}(1, 2 \rightarrow 1', 2') = \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ \times (2\pi)^{-12/2} e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2} . \quad (11.2.26)$$

令 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}$, 这给出

$$S_{\text{Born}} = \frac{-i}{4\pi^2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \\ \times \int d^3 r V(r) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} . \quad (11.2.27)$$

比较该式与方程(11.2.23)表明了, 在非相对论极限下, 图11.3所产生的S-矩阵相当于势 $V(r)$ 满足

$$\int d^3 r V(r) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = e_1 e_2 \frac{1 + \pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}$$

或者, 逆转Fourier变换

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \left[\frac{1 + \pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2} \right] . \quad (11.2.28)$$

到辐射修正的第一阶, 方程(11.2.28)与两个相距为 r 的扩展的荷分布 $e_1 \eta(x)$ 和 $e_2 \eta(y)$ 的静电相互作用产生的是同一个势:

$$V(r) = e_1 e_2 \int d^3 x \int d^3 y \frac{\eta(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{r}|} , \quad (11.2.29)$$

其中

$$\eta(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 q \pi(\mathbf{q}^2) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} . \quad (11.2.30)$$

注意到

$$\int d^3 r \eta(\mathbf{r}) = 1 + \frac{1}{2} \pi(0) = 1 , \quad (11.2.31)$$

所以粒子1和2的总荷, 正如用Coulomb势的长程部分所决定的, 是与控制重整化电磁场的相互作用相同的常数 e_1 和 e_2 .

对于 $|\mathbf{r}| \neq 0$, 通过一个直接的围道积分, 积分(11.2.30)可以被积掉:

$$\eta(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{8\pi^3 r^3} \int_0^1 x(1-x) dx \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right) .$$

这个表达式对于所有的 \mathbf{r} 都是负的. 然而, 我们已经看到 $\eta(\mathbf{r})$ 对所有的 \mathbf{r} 积分等于1. 因此 $\eta(\mathbf{r})$ 必须包含在 $\mathbf{r} = 0$ 处奇异的项 $(1+L)\delta^3(\mathbf{r})$, 其中对 L 进行选择使得满足方程(11.2.31):

$$L = \frac{e^2}{8\pi^3} \int \frac{d^3 r}{r^3} \int_0^1 x(1-x) dx \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right) . \quad (11.2.32)$$

那么荷分布函数的完整表达式是

$$\eta(\mathbf{r}) = (1+L)\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{8\pi^3 r^3} \int_0^1 x(1-x) dx \\ \times \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right) . \quad (11.2.33)$$

这一结果的物理解释是, 一个裸点电荷吸引真空中产生的相反符号电荷的粒子, 排斥它们的反粒子至无穷远, 使得裸荷实际上被屏蔽了, 产生变小了 $1/(1+L)$ 倍的重整化荷. 作为一个检验, 我们会注意到如果我们截断发散积分(11.2.32), 令积分仅覆盖 $r \geq a$ 的部分, 我们发现这个部分对于 $a \rightarrow 0$ 的发散是

$$L_\infty = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln a^{-1}. \quad (11.2.34)$$

因此如果我们将动量空间截断 Λ 与 a^{-1} 等同起来, L 的发散部分与 $(Z_3 - 1)$ 的发散部分的关系是

$$(Z_3 - 1)_\infty = -2L_\infty, \quad (11.2.35)$$

这是因为到 e^2 阶重整化荷(10.4.18)给定为

$$e_\ell = Z_3^{1/2} e_{B\ell} \simeq (1 + \frac{1}{2}(Z_3 - 1)) e_{B\ell} \simeq (1 + L)^{-1} e_{B\ell}. \quad (11.2.36)$$

下面来证明方程(11.2.35)

真空极化在 μ 子原子能级上有可观测效应. 我们将在第14章看到, 图11.3中Feynman图(b)的效应是偏移波函数为 $\psi(\mathbf{r})$ 的原子态能量

$$\Delta E = \int d^3r \Delta V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2, \quad (11.2.37)$$

其中 $\Delta V(\mathbf{r})$ 是势(11.2.28)中的微扰

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \frac{e_1 e_2}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[\frac{\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2} \right]. \quad (11.2.38)$$

这个微扰对于 $r \gg m^{-1}$ 指数衰减. 另一方面, 普通原子的电子波函数一般被限制在一个大得多的半径 $a \gg m^{-1}$ 之内; 例如, 绕着荷为 Ze 的核的电子, 对于该电子的类氢轨道, 我们有 $a = 137/Zm$ (这里 $m = m_e$). 那么, 能量偏移将仅依赖于 $r \ll a$ 的波函数行为. 对于轨道角动量 ℓ , 波函数行为对于 $r \ll a$ 类似于 r^ℓ , 所以方程(11.2.37)给出了正比于因子 $(ma)^{-(2\ell+1)}$ 的因子. 因此与更高的轨道角动量相比, $\ell = 0$ 的真空极化效应要大得多. 对于 $\ell = 0$, 波函数对于小于或等于 m^{-1} 的 r 近似等于常数 $\psi(0)$, 所以方程(11.2.37)变成

$$\Delta E = |\psi(0)|^2 \int d^3r \Delta V(\mathbf{r}). \quad (11.2.39)$$

利用方程(11.2.38)和(11.2.22), 对势($e_1 e_2 = -Ze^2$)的偏移的积分是

$$\int d^3r \Delta V(\mathbf{r}) = -Ze^2 \pi'(0) = -\frac{4Z\alpha^2}{15m^2}. \quad (11.2.40)$$

另外, 在 $\ell = 0$ 且主量子数为 n 的类氢原子态中, 在原点的波函数是

$$\psi(0) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z\alpha m}{n} \right)^{3/2}, \quad (11.2.41)$$

所以能量偏移(11.2.39)是

$$\Delta E = -\frac{4Z^4\alpha^5 m}{15\pi n^3}. \quad (11.2.42)$$

例如, 在氢原子的 $2s$ 态中, 能量偏移是 $-1.122 \times 10^{-7} \text{eV}$, 对应于 -27.13MHz 的频率平移 $\Delta E/2\pi\hbar$. 这有时被称为 *Uehling*(尤林)效应.⁴ 正如我们在第一章所讨论过的, 由于在没有各种辐射修正时, 纯Dirac理论讲精确预测氢原子 $2s$ 态和 $2p$ 态的简并, 这样微弱的能量偏移变得可观测. 我们将在第14章看到, $2s$ 态和 $2p$ 态之间 $+1580 \text{MHz}$ 的“Lamb位移”中的大部分来自于其它的辐射修正, 但是理论与实验吻合的相当好, 足以证实由于真空极化的 -37.13MHz 偏移确实出现了.

尽管在普通原子的辐射修正中, 真空极化只贡献小部分, 但在 μ 子原子中, 即一个 μ 子取代了轨道电子的原子, 真空极化支配了辐射修正. 这是因为在 μ 子原子中, 基于量纲的原因, 大部分辐射修正给出的能量偏移正比于 m_μ , 而真空极化能积分 $\int d^3r \Delta V$, 由于是一个电子圈产生的, 仍然像方程(11.2.40)中那样正比于 m_e^{-2} , 给出的能量偏移正比于 $m_\mu^3 m_e^{-2} = (210)^2 m_\mu$. 然而, 在这种情况下, μ 子原子半径并不比电子Compton波长大多少, 所以近似结果(11.2.39)仅给出真空极化所产生的能量数量级的能量偏移

* * *

为了与之后的计算相比较, 注意如果我们在 $\kappa = \Lambda$ 处截断积分, 那么取代方程(11.2.20), 我们将遇到如下形式的积分

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2} \int_\mu^\Lambda \kappa^{d-5} d\kappa = \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{\mu^{d-4} - \Lambda^{d-4}}{d-4},$$

其中 μ 是红外有效截断, 与图11.1的圈中循环的带荷粒子的质量是同一阶的. (找到这里的常数因子的最简单方法是, 要求这个表达式对于 $d < 3$ 且 $\Lambda \rightarrow \infty$ 的极限与方程(11.2.20)匹配.) 换成这样一个紫外截断, 我们可以达到极限 $d \rightarrow 4$, 并获得

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2} \ln(\Lambda/\mu). \quad (11.2.43)$$

11.3 反常磁矩与荷半径

我们的下一个例子是计算, 由于最低阶的辐射修, 电子或 μ 子的磁矩或荷半径中的偏移. 光子-轻子顶点的一圈图以及重整化修正如图11.4所示. 正如我们在10.3节中讨论过的那样, 由于轻子在质量壳上, 这些图中进入轻子线与外出轻子线上有嵌入的图为零. 在外光子线上有嵌入的图是上一节所讨论的真空极化效应. 这使得这里需要计算的只剩一个一圈图(图11.4中的最后一个):

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\text{loop}}^\mu(p', p) &= \int d^4k \left[e\gamma^\rho (2\pi)^4 \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\not{p}' - \not{k})}{(p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] [\gamma^\mu] \\ &\quad \times \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\not{p} - \not{k})}{(p - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[e\gamma_\rho (2\pi)^4 \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right], \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

其中 p' 和 p 分别是末态轻子4-动量和初态轻子4-动量. (对于连接外光子线与内轻子线的顶点, 它的贡献被取为 γ^μ , 这是因为在定义 Γ^μ 中抽取了一个 $e(2\pi)^4$ 的因子.)

这个积分有一个显然的紫外发散, 粗略的像 $\int d^4k/(k^2)^2$. 不像真空极化的情况, 在这里我们不需要为了保持规范不变性所要求的结果而使用一个像维数正规化那样精妙的重整化处理, 这是因为光子是一个中性粒子, 因此通过对光子传播子合适的修正(例如引入一个有很大截断质量 M 的因子 $M^2/(k^2 + M^2)$), 并且无需在别的地方引入修正以保持规范不变性, 就可以使得积分有限. 无

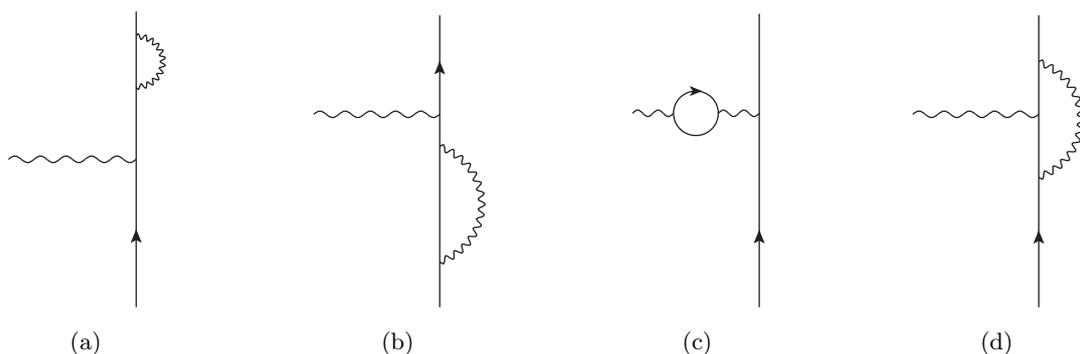


图 11.4 光子-轻子顶点函数 Γ^μ 的一圈图. 这里波浪线代表光子; 其它线代表电子或 μ 子. 图(a)和图(b)被轻子场重整化项抵消了; 图(c)源于11.2节中计算的真空极化; 而图(d)是11.3节所要计算的.

论如何, 正如我们将看到的, 反常磁矩和荷半径的计算中根本就不会遇到任何紫外发散. 在下文中, 带着如有必要任何发散积分都可以用截断质量 M 的形式表示这一理念, 我们将保留顶点函数积分的无限形式.

我们从组合分母开始, 对本章, 使用附录中所描述的Feynman技巧的多重版本

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[Ay + B(x-y) + C(1-x) \right]^{-3}. \quad (11.3.2)$$

应用于方程(11.3.1)中的分母, 这给出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[\left((p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon \right) y + \left((p - k)^2 + m^2 - i\epsilon \right) (x - y) \right. \\ & \quad \left. + (k^2 - i\epsilon)(1 - x) \right]^{-3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[\left(k - p'y - p(x - y) \right)^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x - y) - i\epsilon \right]^{-3}, \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

其中 $q \equiv p - p'$ 是光子传递的动量. 偏移积分变量

$$k \rightarrow k + p'y + p(x - y)$$

积分(11.3.1)变成

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\text{loop}}^\mu(p', p) &= \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^4 k}{\left[k^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x - y) - i\epsilon \right]^3} \\ & \quad \times \gamma^\rho \left[-i \left(\not{p}'(1 - y) - \not{k} - \not{p}(x - y) \right) + m \right] \gamma^\mu \\ & \quad \times \left[-i \left(\not{p}(1 - x + y) - \not{k} - \not{p}'y \right) + m \right] \gamma_\rho. \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

我们的下一步是Wick旋转. 正如上一节所解释的那样, 分母中的 $-i\epsilon$ 表明, 当我们把 k^0 的积分围道旋转至虚轴时, 必须逆时针旋转, 使得对 k^0 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分被替换成对虚值

的 k^0 从 $-i\infty$ 到 $+i\infty$ 的积分, 或者等价地, 对实值的 $k^4 \equiv -ik^0$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分. 我们也利用方程(11.3.4)中分母的旋转对称性; 我们扔掉分子中 k 的奇数次项, 将 $k^\lambda k^\sigma$ 替换成 $\eta^{\lambda\sigma} k^2/4$, 并将体积元 $d^4k = idk^1 dk^2 dk^3 dk^4$ 替换成 $2i\pi^2 \kappa^2 d\kappa$, 其中 κ 是 4-矢 k 的欧几里得型长度. 将这些汇总, 方程(11.3.4)变成

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\text{loop}}^\mu(p', p) &= \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \left\{ -\kappa^2 \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\rho / 4 \right. \\ &\quad \left. + \gamma^\rho \left[-i(\not{p}'(1-y) - \not{p}(x-y)) + m \right] \gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. \times \left[-i(\not{p}(1-x+y) - \not{p}'y) + m \right] \gamma_\rho \right\} \\ &\quad \times \left[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y) \right]^{-3}. \end{aligned} \quad (11.3.5)$$

这里我们仅对顶点函数在 Dirac 旋量之间的矩阵元 $\bar{u}' \Gamma u$ 感兴趣, 而这些旋量满足关系

$$\bar{u}' [i \not{p}' + m] = 0, \quad [i \not{p} + m] u = 0.$$

因此, 通过使用 Dirac 矩阵的反对易关系把所有的 \not{p}' 因子挪到左边而把所有的 \not{p} 因子挪到右边, 移至两边后再把它们替换成 im , 我们就能简化这个表达式. 在一个直接但繁琐的计算后, 方程(11.3.5)变成

$$\begin{aligned} \bar{u}' \Gamma_{1\text{loop}}^\mu(p', p) u &= \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \\ &\quad \bar{u}' \left\{ \gamma^\mu \left[-\kappa^2 + 2m^2(x^2 - 4x + 2) + 2q^2(y(x-y) + 1 - x) \right] \right. \\ &\quad \left. + 4im p'^\mu (y - x + xy) + 4im p^\mu (x^2 - xy - y) \right\} u \\ &\quad \times \left[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y) \right]^{-3}. \end{aligned} \quad (11.3.6)$$

接下来我们利用最后剩下的因子在反射 $y \rightarrow x - y$ 下的对称性. 在这个反射下, 乘以 p'^μ 和 p^μ 的函数 $y - x + xy$ 和 $x^2 - xy - y$ 相互交换, 所以这两个函数均被它们的平均替代:

$$\frac{1}{2}(y - x + xy) + \frac{1}{2}(x^2 - xy - y) = -\frac{1}{2}x(1 - x).$$

这最终给出

$$\begin{aligned} \bar{u}' \Gamma_{1\text{loop}}^\mu(p', p) u &= \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \\ &\quad \times \bar{u}' \left\{ \gamma^\mu \left[-\kappa^2 + 2m^2(x^2 - 4x + 2) + 2q^2(y(x-y) + 1 - x) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2im(p'^\mu + p^\mu)x(1 - x) \right\} u \\ &\quad \times \left[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y) \right]^{-3}. \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

注意到 p^μ 和 p'^μ 现在仅出现在组合 $p^\mu + p'^\mu$ 中, 这正是流守恒所要求的.

还有其它需要考虑的项. 当然, Γ^μ 中有零阶项 γ^μ . 修正项(11.1.9)中正比于 $Z_2 - 1$ 的项在 Γ^μ 中产生了

$$\Gamma_{\mathcal{L}_2}^\mu = (Z_2 - 1)\gamma^\mu. \quad (11.3.8)$$

另外, 在外光子传播子中嵌入修正的效应是:

$$\Gamma_{\text{vac pol}}^\mu(p', p) = \frac{1}{(p' - p)^2 - i\epsilon} \Pi^{\mu\nu}(p' - p) \gamma_\nu . \quad (11.3.9)$$

这些项中每一个, 其形式都与($H(q^2) = 0$)的一般结果(10.6.10)一致

$$\bar{u}' \Gamma^\mu(p', p) u = \bar{u}' \left[\gamma^\mu F(q^2) - \frac{i}{2m} (p + p')^\mu G(q^2) \right] u . \quad (11.3.10)$$

到 e^2 阶, 形状因子是

$$F(q^2) = Z_2 + \pi(q^2) + \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \\ \times \frac{\left[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2) - 2q^2(y(x - y) + 1 - x) \right]}{\left[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x - y) \right]^3} , \quad (11.3.11)$$

$$G(q^2) = \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \frac{4m^2 x(1 - x) \kappa^3 d\kappa}{\left[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x - y) \right]^3} , \quad (11.3.12)$$

其中 $\pi(q^2)$ 是真空极化函数(11.2.22).

现在, 形状因子 $G(q^2)$ 的积分是有限的:

$$G(q^2) = \frac{-e^2 m^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{x(1 - x)}{m^2 x^2 + q^2 y(x - y)} . \quad (11.3.13)$$

这使得计算反常磁矩变得简单. 在10.6节我们注意到, 对磁矩有贡献仅是 γ^μ 项, 所以辐射修正的效应是给磁矩的Dirac值 $e/2m$ 乘以因子 $F(0)$. 但是真正轻子荷的 e 的定义要求

$$F(0) + G(0) = 1 , \quad (11.3.14)$$

所以磁矩可以表示为

$$\mu = \frac{e}{2m} (1 - G(0)) . \quad (11.3.15)$$

从方程(11.3.13)中我们发现

$$-G(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = 0.001161 . \quad (11.3.16)$$

这是由Schwinger首次计算出的著名修正 $\alpha/2\pi$.⁵

当然, 这只是磁矩的辐射修正中的第一项. 即使就在下一阶, e 的4次阶, 项的个数变得非常多使得计算变得相当复杂. 然而, 由于 μ 子-质子质量比值很大, 在 μ 子的磁矩中有一个四阶项要比其它几个四阶项都大一些. 这一项源于在二阶图的虚光子线中插入了一个电子圈. 如图11.5所示. 这个电子圈的效应是将方程(11.3.1)中的光子传播子 $1/k^2$ 变成 $(1 + \pi_e(k^2))/k^2$, 其中 $\pi_e(k^2)$ 由方程(11.2.22)给出, 但其中质量 m 取为电子质量:

$$\pi_e(k^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1 - x) \ln \left(1 + \frac{k^2 x(1 - x)}{m_e^2} \right) dx .$$

对方程(11.3.12)的考察说明了, 在 μ 子磁矩的计算中, 虚光子动量 k 上的有效截断是 m_μ . 比

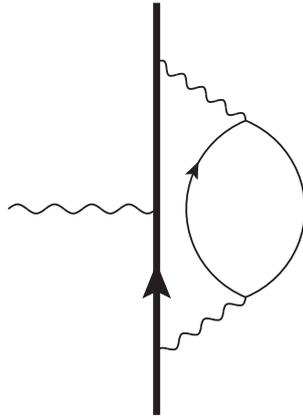


图 11.5 μ 子磁矩的两圈图. 这里粗直线代表 μ 子; 细的波浪线代表光子; 而其它细线是电子. 这个图对四阶的 μ 子旋磁比有一个相对较大的贡献, 这个贡献正比于 $\ln(m_\mu/m_e)$.

值 m_μ/m_e 非常大使得对于 m_μ^2 阶的 k^2 , 我们可以做近似

$$\pi_e(k^2) \simeq \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln(m_\mu^2/m_e^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln(m_\mu^2/m_e^2) \quad (11.3.17)$$

其中在 $\ln(m_\mu^2/m_e^2)$ 中系数为1阶的项被忽略了. 因为这是一个常数, 在 $-G(0)$ 中, 通过在虚光子线中增加一个电子圈所产生的变化, 就是给我们之前 $-G(0)$ 的结果(11.3.16)乘以方程(11.3.17), 使得现在

$$\mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu} \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \frac{e^4}{96\pi^2} \left[\ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + O(1) \right] \right). \quad (11.3.18)$$

(我们将在卷II看到, 这个讨论是重整化群方法的一个原始版本.) 这个结果11.3.18可以与整个4阶结果相比:⁶

$$\mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu} \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \frac{e^4}{96\pi^2} \left[\ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{25}{6} + \frac{197}{24} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{9\zeta(3)}{2} - 3\pi^2 \ln 2 + O\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \right] \right). \quad (11.3.19)$$

结果是乘以 $e^4/96\pi^4$ 的“ $O(1)$ ”项增加到了 -6.137 , 这比 $\ln(m_\mu^2/m_e^2) = 10.663$ 小不了多少, 所以近似(11.3.18)给出了仅到二阶因子的第四阶项. 与二阶结果 $\mu_\mu = 1.001161 e/2m_\mu$ 以及当前的实验值 $\mu_\mu = 1.001165923(8)e/2m_\mu$ 相比, 正确的4阶结果给出 $\mu_\mu = 1.00116546 e/2m_\mu$.

现在我们转向另一个形状因子. 方程(11.3.11)中 $F(q^2)$ 的积分有紫外发散. 然而为了满足荷的非重整化条件(11.3.14), Z_2 要取如下值

$$Z_2 = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} - \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \frac{\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2)}{[\kappa^2 + m^2 x^2]^3}. \quad (11.3.20)$$

(回忆 $\pi(0) = 0$.) 这本身是紫外发散, 其中无限大部分是

$$(Z_2 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\kappa}{\kappa}. \quad (11.3.21)$$

将方程(11.3.20)代入方程(11.3.11)给出

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \\ \times \left\{ \frac{[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x - 2) - 2q^2(y(x-y) + 1 - x)]}{[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y)]^3} \right. \\ \left. - \frac{[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x - 2)]}{[\kappa^2 + m^2x^2]^3} \right\}. \quad (11.3.22)$$

对 κ 的积分现在是收敛的:

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\ \times \left\{ \frac{-m^2[x^2 - 4x - 2] - q^2[y(x-y) + 1 - x]}{m^2x^2 + q^2y(x-y)} + \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} \right. \\ \left. - \ln \left[\frac{m^2x^2 + q^2y(x-y)}{m^2x^2} \right] \right\}. \quad (11.3.23)$$

然而, 我们看到, 对 x 和 y 的积分现在在 $x = 0$ 和 $y = 0$ 处对数发散, 这是因为在分母中有 x 和/或 y 的二次项, 而在分子上只有两个微分 $dx dy$. 这个发散可以到方程(11.3.11)中在 $x = 0$, $y = 0$ 和 $\kappa = 0$ 处为零的分母 $[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y)]^3$. 由于这个发散来自于小的 κ 区域而非大的 κ 区域, 它被称为红外发散而不是紫外发散.

在第13章, 我们将给出红外发散的一个综合处理. 在那里将证明, 对于类似电子-电子散射的过程, 截面中的红外发散, 例如那些由电子形状因子 $F(q^2)$ 中的红外发散所引入的发散, 在我们将低能光子发散以及弹性散射包含在内后, 这些发散将会被抵消掉. 另外, 我们将在第14章看到, 当我们计算对原子能级的辐射修正时, 由于束缚态电子不精确地在自由粒子质量壳上, $F(q^2)$ 中的红外发散是截断的. 现在, 我们将通过引入一个微小的光子质量 μ 以截断 $F(q^2)$ 中的红外发射来继续我们的计算, 将这个结果留给第14章, 看看如何使用.

若有了光子质量 μ , 方程(11.3.1)中的分母 $k^2 - i\epsilon$ 将会被 $k^2 + \mu^2 - i\epsilon$ 替代. 那么效应就是在方程(11.3.3)—(11.3.7), (11.3.11), (11.3.20)以及(11.3.24)的分母中给被立方的项加上一项 $\mu^2(1-x)$. 这样方程(??)被替换成

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\ \times \left\{ \frac{-m^2[x^2 - 4x - 2] - q^2[y(x-y) + 1 - x]}{m^2x^2 + q^2y(x-y) + \mu^2(1-x)} + \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + \mu^2(1-x)} \right. \\ \left. - \ln \left[\frac{m^2x^2 + q^2y(x-y)}{m^2x^2 + \mu^2(1-x)} \right] \right\}. \quad (11.3.24)$$

这个积分现在是完全收敛的. 它可以表示成Spence(斯盆司)函数的形式, 但是这个结果没有多少启发性. 对于我们第14章的目的, 计算 $F(q^2)$ 在 q^2 很小时的行为是足够的. 从Ward等式中, 我们已经知道了 $F(0) = 1 - G(0) = 1 + e^2/8\pi^2$, 所以我们来考虑 $q^2 = 0$ 处的一阶导数 $F'(q^2)$. 根据方程(??), 这是

$$F'(0) = \pi'(0) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \left\{ -\frac{2y(x-y) + 1-x}{m^2 x^2 + \mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2 - 4x + 2]y(x-y)}{[m^2 x^2 + \mu^2(1-x)]^2} \right\}. \quad (11.3.25)$$

方程(11.2.22)所给出的真空极化贡献是

$$\pi'(0) = \frac{e^2}{60\pi^2 m^2}. \quad (11.3.26)$$

扔掉方程(11.3.25)中所用正比于 μ/m 的幂次的项, 然后我们有*

$$F'(0) = \frac{e^2}{24\pi^2 m^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right] \quad (11.3.27)$$

其中 $\frac{2}{5}$ 是真空极化的贡献. 另一方面, 方程(11.3.13)表明 $G(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 处有一有限导数,

$$G'(0) = \frac{e^2}{48\pi^2 m^2}. \quad (11.3.28)$$

这些结果以顶点函数的另一表达式(10.6.15)所定义的电荷形状因子 $F_1(q^2)$ 的形式表示最为方便

$$\begin{aligned} & \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{2} i [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu F_2(q^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (11.3.29)$$

根据方程(10.6.17)和(10.6.18)

$$F_1(q^2) = F(q^2) + G(q^2). \quad (11.3.30)$$

对于 $|q^2| \ll m^2$, 这一形状因子近似是

$$F_1(q^2) \simeq 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \left(\frac{q^2}{m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right]. \quad (11.3.31)$$

这可以表示成荷半径 a 的形式, 荷半径有电荷形状因子在 $q^2 \rightarrow 0$ 时的极限行为定义:

$$F_1(q^2) \rightarrow 1 - q^2 a^2 / 6. \quad (11.3.32)$$

(这一定义的动机是, $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$ 对于半径为 a 的球壳的平均在 $\mathbf{q}^2 a^2 \ll 1$ 时趋于 $1 - \mathbf{q}^2 a^2 / 6$.) 我们看到电子的荷半径给定为

$$a^2 = -\frac{e^2}{4\pi^2 m^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right]. \quad (11.3.33)$$

我们将在第14章看到, 对于原子中的电子, 光子质量的角色由一个远小于 m 的有限红外截断扮演, 所以这里的对数很大且是负值, 这产生了一个正的 a^2 值.

* y -积分是平庸的. 在极限 $\mu \ll m$ 下, x -积分的计算变得非常轻松, 方法是将积分范围分成两部分, 一个从0到 s , 其中 $\mu/m \ll s \ll 1$, 而另一个是从 s 到1.

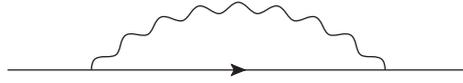


图 11.6 电子自能函数的一圈图. 像往常一样, 直线代表电子, 波浪线代表光子.

11.4 电子自能

我们以电子自能的计算总结本章. 尽管其本身没有什么直接的实验含义, 但是这里的一些的结果在第14章和卷II中将是有益的.

像10.3节中那样, 我们将有一条入电子线和一条出电子线的所有图之和定义为 $i(2\pi)^4[\Sigma^*(p)]_{\beta,\alpha}$, 其中 p 是两条电子线携带的动量, α, β 分别是入电子线和出电子线的Dirac指标, 而星号表示我们排除了那些可以通过剪断某个内电子线就能变成非连接的图, 并且两个外线上的传播子被省略了. 那么全电子传播子由如下的和给出

$$\begin{aligned} [-i(2\pi)^{-4}S'(p)] &= [-i(2\pi)^{-4}S(p)] \\ &+ [-i(2\pi)^{-4}S(p)] [i(2\pi)^4\Sigma^*(p)] [-i(2\pi)^{-4}S(p)] + \cdots, \end{aligned} \quad (11.4.1)$$

其中

$$S(p) \equiv \frac{-i\not{p} + m_e}{p^2 + m_e^2 - i\epsilon}. \quad (11.4.2)$$

这个求和是平庸的, 给出

$$S'(p) = [i\not{p} + m_e - \Sigma^*(p) - i\epsilon]^{-1}. \quad (11.4.3)$$

在最低阶有一个对 Σ^* 的一圈贡献, 由图11.6给出:

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4\Sigma_{1\text{loop}}^*(p) &= \int d^4k \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\rho\sigma}}{k^2 - i\epsilon} \right] \\ &\times [(2\pi)^2 e\gamma^\rho] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i\not{p} + i\not{k} + m_e}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right] [(2\pi)^4 e\gamma^\sigma] \end{aligned}$$

或者简化些

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{loop}}^*(p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right] \\ &\times \left[\frac{\gamma^\rho(-i\not{p} + i\not{k} + m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (11.4.4)$$

(这是在Feynman规范下的, 带荷粒子不在质量壳上的振幅是不是规范不变的.) 为了在我们计算Lamb位移时的使用, 使用由Pauli和Villars⁸引入的正规化方法将是方便的. 我们将光子传播子 $(k^2 - i\epsilon)^{-1}$ 换成

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon},$$

使得电子自能函数变成

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{loop}}^*(p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] \\ &\times \left[\frac{\gamma^\rho(-i\not{p} + i\not{k} + m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (11.4.5)$$

之后我们可以通过令正规化子质量 μ 趋于 ∞ 扔掉正规化子. 而在第14章, 我们也会关心 $\mu \ll m_e$ 的情况.

我们仍使用Feynman技巧来组合分母, 并回忆起 $\gamma^\rho \gamma^\kappa \gamma_\rho = -2\gamma^\kappa$ 以及 $\gamma^\rho \gamma_\rho = 4$. 这给出

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{loop}}^*(p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [2i(\not{p} - \not{k}) + 4m_e] \\ &\quad \times \int_0^1 dx \left[\frac{1}{((k - px)^2 + p^2x(1-x) + m_e^2x - i\epsilon)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{((k - px)^2 + p^2x(1-x) + m_e^2x + \mu^2(1-x) - i\epsilon)^2} \right]. \end{aligned} \quad (11.4.6)$$

偏移积分变量 $k \rightarrow k + px$ 并旋转积分围道, 给出

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{loop}}^*(p) &= \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [2i(1-x)\not{p} + 4m_e] \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(\kappa^2 + p^2x(1-x) + m_e^2x)^2} - \frac{1}{(\kappa^2 + p^2x(1-x) + m_e^2x + \mu^2(1-x))^2} \right]. \end{aligned} \quad (11.4.7)$$

κ -积分是平庸的

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{loop}}^*(p) &= \frac{-\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [2i(1-x)\not{p} + 4m_e] \\ &\quad \times \ln \left(\frac{p^2x(1-x) + m_e^2x + \mu^2(1-x)}{p^2x(1-x) + m_e^2x} \right). \end{aligned} \quad (11.4.8)$$

相互作用(11.1.9)也在 $\Sigma^*(p)$ 中贡献了一个抵消项 $-(Z_2 - 1)(i\not{p} + m_e) + Z_2\delta m_e$, 其中确定 Z_2 与 δm_e 的条件是, 视为 $i\not{p}$ 函数的 $S'(p)$ 应该在 $i\not{p} = -m_e$ 处有留数为一的极点. (我们将在下一章看到, 这使得当 $\mu \rightarrow \infty$ 时, Σ^* 在 e 的所有阶有限.) 在最低阶, 这给出

$$\begin{aligned} \delta m_e &= -\Sigma_{1\text{loop}}^* \Big|_{i\not{p}=-m_e} \\ &= \frac{2m_e\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [1+x] \ln \left(\frac{m_e^2x^2 + \mu^2(1-x)}{m_e^2x^2} \right), \quad (11.4.9) \\ Z_2 - 1 &= -i \frac{\partial \Sigma_{1\text{loop}}^*}{\partial \not{p}} \Big|_{i\not{p}=-m_e} \\ &= -\frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ (1-x) \ln \left(\frac{m_e^2x^2 + \mu^2(1-x)}{m_e^2x^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mu^2(1-x)^2(1+x)}{x(m_e^2x^2 + \mu^2(1-x))} \right\}. \end{aligned} \quad (11.4.10)$$

(到这一阶, 我们不区分 δm_e 和 $Z_2\delta m_e$.) 扔掉在 $\mu^2 \rightarrow \infty$ 时为零的项, 方程(11.4.8)–(11.4.10)给出

$$\Sigma_{1\text{loop}}^*(p) = \frac{-\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [2i(1-x)\not{p} - 4m_e] \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{p^2x(1-x) + m_e^2x} \right), \quad (11.4.11)$$

$$\delta m_e = \frac{2m_e\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [1+x] \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2} \right), \quad (11.4.12)$$

$$Z_2 - 1 = \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ (1-x) \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2} \right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right\}. \quad (11.4.13)$$

观察后发现, $\ln \mu^2$ 项在全自能函数中抵消了, 留下

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{order } e^2}^*(p) &= \Sigma_{1\text{loop}}^*(p) - (Z_2 - 1)(i\not{p} + m_e) + Z_2\delta m_e \\ &= \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ [i(1-x)\not{p} + 2m_e] \ln \left(\frac{m_e^2(1-x)}{p^2 x(1-x) + m_e^2 x^2} \right) \right. \\ &\quad - m_e[1+x] \ln \left(\frac{1-x}{x^2} \right) \\ &\quad \left. - (i\not{p} + m_e) \left[(1-x) \ln \left(\frac{1-x}{x^2} \right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right] \right\}.\end{aligned}$$

还有一个发散, 来自于最后一项在 $x \rightarrow 0$ 时的行为, 这个发散可以追溯到, 当我们在计算 $Z_2 - 1$ 时在 $p = -m_e^2$ 处取 p 后, 方程(11.4.5)中对光子动量 k 的积分在 $k^2 = 0$ 处的奇异行为. 这种红外发射将在第13章进行细致讨论. 目前, 我们关心的重点是紫外发散已经抵消掉了.

* * *

δm_e 的结果(11.4.9)本身有一些值得注意的地方. 注意到 $\delta m_e/m_e > 0$, 这正是我们对由于电荷与其自身的场的相互作用所产生的电磁自能所预期的. 但是不像Poincaré, Adraham(亚伯拉罕)以及其他⁹对电磁自能的经典估计, 在极限 $\mu \rightarrow \infty$ 下, 这时截断已经去除了, 方程(11.4.9)仅是对数发散的. 在这一极限下:

$$\delta m_e \rightarrow \frac{6m_e \pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{\mu}{m_e} \right). \quad (11.4.14)$$

在14.3节, 我们对Lamb位移的计算中, 我们将致力于相反的极限, $\mu \ll m_e$. 这里方程(11.4.9)给出

$$\delta m_e \rightarrow \frac{e^2 \mu}{8\pi} \left[1 - \frac{3\mu}{2\pi m_e} + \dots \right]. \quad (11.4.15)$$

附录 各种积分

为了组合 N 个传播子的分母, 我们需要将类似 $D_1^{-1} D_2^{-1} \dots D_N^{-1}$ 的乘积替换成对一个函数的积分, 而这个函数包含 D_1, D_2, \dots, D_N 的一个线性组合. 由于这个目的, 使用如下的公式通常是方便的

$$\begin{aligned}\frac{1}{D_1 D_2 \dots D_N} &= (N-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} \\ &\quad \times [D_1 x_{N-1} + D_2 (x_{N-2} - x_{N-1}) + \dots + D_N (1 - x_1)]^{-N}.\end{aligned} \quad (11.A.1)$$

在本章我们使用了这一公式 $N = 2$ 和 $N = 3$ 时的特殊情况.

组合分母, 偏移4-动量积分变量, Wick旋转并使用4-维旋转不变性, 在这之后, 我们通常会遇到如下形式的积分

$$\int d^4 k \frac{(k^2)^n}{(k^2 + \nu^2)^m}$$

其中 $(k^2 + \nu^2)^m$ 来自于结合后的传播子分母, 而 $(k^2)^n$ 来自于传播子分子以及顶点动量因子. 这个积分在 $2n + 4 \geq 2m$ 时是发散的, 但是通过解析延拓, 将时空维数从4延拓到复值的 d , 这个积分可以给出有限值. 为了计算随之的积分, 我们使用著名的公式

$$\int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^{\ell-1}}{(\kappa^2 + \nu^2)^m} = \nu^{\ell-2m} \frac{\Gamma(\ell/2)\Gamma(m-\ell/2)}{2\Gamma(m)}, \quad (11.A.2)$$

其中 $\ell = d + 2n$. 在 11.2 节中, 我们使用了这一公式的特殊情况 $n = 0, m = 2$ 和 $n = 1, m = 2$.

紫外发散在方程(11.A.2)中的体现方式为: 对于固定的 n , 因子 $\Gamma(m - \ell/2) = \Gamma(m - n - d/2)$ 在 $d \rightarrow 4$ 时的极点. 对于 $2 + n = m$, 这个因子变成

$$\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \rightarrow \frac{2}{d-4} + \gamma, \quad (11.A.3)$$

其中 $\gamma = 0.5772157\dots$ 是 Euler 常数. 从(11.A.3)以及 Γ -函数的递推公式, 我们可以获得 $2+n > m$ 时的极限行为.

参考文献

- [1] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 769 (1949).
- [2] G. C. Wick, *Phys. Rev.* **96**, 1124 (1954).
- [3] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**, 189 (1972).
- [4] E. A. Uehling, *Phys. Rev.* **48**, 55 (1935). $q^2 \neq 0$ 的一圈函数 $\pi(q^2)$ 由 J. Schwinger 首次给出, *Phys. Rev.* **75**, 651 (1949).
- [5] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948).
- [6] 这是 H. Suurahe 和 E. Wichmann 计算的(包含那些 $m_e \ll m_\mu$ 时为零的项), *Phys. Rev.* **105**, 1930 (1957); A. Petermann, *Phys. Rev.* **105**, 1931 (1957); H. H. Elend, *Phys. Lett.* **20**, 682 (1966); **21**, 720 (1966); G. W. Erickson and H. H. T. Liu, UCD-CNL-81 report (1968).
- [7] J. Bailey *et. al.* (CERN-Mainz-Daresbury Collaboration), *Nucl. Phys.* **B150**, 1 (1979). 这些实验是通过观察 μ 子自旋在储存环内的进动实现的.
- [8] W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 434 (1949). 另见 J. Rayski, *Phys. Rev.* **75**, 1961 (1949).
- [9] 参看 A. I. Miller, *Theory of Relativity — Emergence (1905) and Early Interpretation (1905-1911)* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1981): Chapter 1.

第 12 章 重整化的一般理论

我们在上一章看到, 在包含一圈图的量子电动力学计算中, 产生了对动量空间的发散积分, 但是当我们将该理论中所有的参量表示成“重整化”参量的形式, 例如实际测量的质量和电荷, 这些发散抵消了. 在1949年, Dyson¹概述了这种抵消会发生在量子电动力学各阶的一个证明. 很快大家就明白了Dyson的讨论适用于更大的一类理论(我们将在12.1节和12.2节证明这点), 这类理论中有有限个相对简单的相互作用, 即所谓的可重整理论, 而量子电动力学仅是这类理论的一个简单例子.

多年来, 大家普遍认为任何合理的物理理论将不得不采取可重整量子场论的形式. 在发展弱作用, 电磁作用和强作用的现代“标准模型”中, 可重整的要求扮演了重要角色. 然而, 我们将在这里看到, 紫外发散的抵消并不真正依赖于可重整性; 只要我们将对称性所允许的无限多个相互作用中的每一个都包含在内, 所谓的不可重整理论实际上会像可重整理论一样是可重整的.

现今, 大家普遍认为用以描述在可达到能量处的物理的真实理论是所谓的“有效场论”. 正如12.3节所要讨论的, 它们是更基础理论的低能近似, 而基础理论可能根本就不是场论. 任何一个有效场论必然包含无限个不可重整的相互作用. 然而, 就像在12.3节和12.4节所讨论的, 我们预期在这种有效场论中, 所有的不可重整项在低能处都被抑制了. 因而, 尽管原因上与最初在这些理论中做出可重整假定的动机不同, 类似量子电动力学和标准模型的可重整理论保留了它们在物理中的地位.

12.1 发散度

我们来考察一类非常广泛的理论, 其中包含各种相互作用, 并用 i 标记. 每种相互作用可以用每一 f 型场的个数 n_{if} , 以及作用在场上的导数个数 d_i 表征.

我们从计算这种理论中一个任意的连通的单粒子不可约Feynman图的“表观发散度” D 开始. 表观发散度 D 是被积函数分母中动量因子的数目减去分子中动量因子的数目, 对于每个我们要做的动量空间积分还要再加上4. 表观发散是对动量空间区域的积分在所有内线的动量都趋于无穷大时的实际发散度. 即, 如果 $D > 0$, 那么振幅中所有内动量以公共因子 κ 区域无穷的部分, 它的发散类似于

$$\int^{\infty} \kappa^{D-1} d\kappa. \quad (12.1.1)$$

在相同意义上, 发散度 $D = 0$ 的积分是对数发散的, 而 $D < 0$ 的积分是收敛的. 稍后我们将回到子积分为比该区域积分更坏这个问题上.

为了计算 D , 我们需要知道图的如下信息:

$I_f \equiv f$ 类场内线的数目,

$E_f \equiv f$ 类场外线的数目,

$N_i \equiv i$ 类相互作用顶点的数目.

我们将以如下形式写出 f 类场的传播子 $\Delta_f(k)$ 的渐进行为

$$\Delta_f(k) \sim k^{-2+2s_f} . \quad (12.1.2)$$

回顾第六章, 我们看到, 对于标量场 $s_f = 0$, 对于Dirac场 $s_f = \frac{1}{2}$, 对于有质量矢量场 $s_f = 1$. 更普遍地, 可以证明, 对于 (A, B) 型Lorentz变换的有质量场, 我们有 $s_f = A + B$. 不严格地说, 我们可以称 s_f 为“自旋”. 然而, 扔掉由于规范不变性而没有效应的项后, 有效光子传播子 $\eta_{\mu\nu}/k^2$ 有 $s_f = 0$. 对于与守恒流耦合的有质量矢量场, 只要流不依赖于该矢量场, 类似的结果依然成立. 也可以证明, 在相同意义下, 引力场 $g_{\mu\nu}$ 也有 $s_f = 0$ 的传播子.

根据方程(12.1.2), 传播子对 D 的总贡献等于

$$\sum_f I_f(2s_f - 2) . \quad (12.1.3)$$

另外, 每个 i 类相互作用中的导数向积分中引入了 d_i 个动量因子, 对 D 的总贡献等于

$$\sum_i N_i d_i . \quad (12.1.4)$$

最后, 我们需要独立的动量积分变量的总数. 每个内线可以标记一个4-动量, 但是它们不是全部独立的; 去掉一个用以保证外动量守恒的 δ -函数后, 每个顶点所附带的 δ -函数在这些内动量之间强加了一个线性关系. 因此, 动量空间积分元对 D 贡献了一项

$$4 \left[\sum_f I_f - \left(\sum_i N_i - 1 \right) \right] , \quad (12.1.5)$$

显然, 这正是图中相互独立圈的数目的4倍. 加上贡献(12.1.3), (12.1.4)和(12.1.5), 我们发现

$$D = \sum_f I_f(2s_f + 2) + \sum_i N_i(d_i - 4) + 4 . \quad (12.1.6)$$

方程(12.1.6)不像它所表现的那样方便, 因为它所给出的 D 的值似乎依赖于Feynman图的内部细节. 幸运的是, 它可以被拓扑等式简化

$$2I_f + E_f = \sum_i N_i n_{if} . \quad (12.1.7)$$

(每个内线贡献两条线与顶点相连, 而每个外线只贡献一条.) 利用方程(12.1.7)消除 I_f , 我们看到方程(12.1.6)变成

$$D = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i , \quad (12.1.8)$$

其中 Δ_i 是用来表征 i 类相互作用的一个参量:

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1) . \quad (12.1.9)$$

不考虑Feynman图的结果, 只是通过简单的量纲分析也可以获得这个结果. 场的传播子是一
对自由场编时乘积的真空期望值的Fourier变换, 所以一个按照惯例归一化的场, 若它的量纲*以动

*本章中, 在 $\hbar = c = 1$ 的单位值下, “量纲”总是指质量或动量幂次的量纲. 我们使用的场是按惯例归一化的, 也就是说自由场拉格朗日量中导数数目最多的那一项(其决定了传播子的渐进行为), 它的系数是无量纲的.

表 12.1 量子电动力学拉格朗日密度中的项. 这里的 d_i , $n_{i\gamma}$ 和 n_{ie} 分别是相互作用中导数, 光子场和电子场的个数, 而 Δ_i 是相应系数的量纲. (回忆起 $s_\gamma = 0$, $s_e = \frac{1}{2}$.)

相互作用	d_i	$n_{i\gamma}$	n_{ie}	Δ_i
$-ie\bar{\psi}A\psi$	0	1	2	$4 - 1 - 3 = 0$
$-\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	2	2	0	$4 - 2 - 2 = 0$
$-(Z_2 - 1)\bar{\psi}\not{\partial}\psi$	1	0	2	$4 - 1 - 3 = 0$
$[-(Z_2 - 1)m + Z_2\delta m]\bar{\psi}\psi$	0	0	2	$4 - 3 = 1$

量幂次表示是 \mathcal{D}_f , 那么传播子的量纲就是 $-4 + 2\mathcal{D}_f$. 因此, 如果传播子在 k 远大于质量时的行为类似于 k^{-2+2s_f} , 那么这个场的量纲必须满足 $-4 + 2\mathcal{D}_f = -2 + 2s_f$, 或者 $\mathcal{D}_f = 1 + s_f$. 一个 i 类相互作用, 若它有 n_{if} 个这样的场和 d_i 个导数, 那么它的量纲是 $d_i + \sum_f n_{if}(1 + s_f)$. 但是作用量必须是无量纲的, 所以为了抵消 d^4x 的量纲 -4 , 拉格朗日量密度中的每一项的量纲必须为 $+4$. 因此, 相互作用必须有一个量纲为 $4 - d_i - \sum_f n_{if}(1 + s_f)$ 的耦合常数, 这正好就是参数 Δ_i . 有 E_f 条 f 类外线的连通Feynman图, 其所对应的动量空间振幅是对总量纲为 $\sum_f E_f(1 + s_f)$ 的场的编时乘积的真空期望值对 $4 \sum_f E_f$ 个坐标的Fourier变换, 所以它的量纲为 $\sum_f E_f(-3 + s_f)$. 下面量纲中, -4 来自于动量空间 δ -函数, 而 $\sum_f(-2 + 2s_f)$ 是外线传播子的量纲, 所以动量空间积分本身再加上所有耦合常数因子的量纲是

$$\sum_f E_f(-3 + s_f) - (-4) - \sum_f E_f(-2 + 2s_f) = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1).$$

给定Feynman图耦合常数的总量纲是 $\sum_i N_i \Delta_i$, 留下了量纲为 $4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i$ 的动量空间积分. 只要我们所关心的积分区域是所有动量一起趋于无穷的, 动量空间积分的发散度就是它的量纲, 因而证明了方程(12.1.8).

如果所有相互作用都有 $\Delta_i \geq 0$, 那么方程(12.1.8)给出了 D 的上界, 对于所要计算的振幅相应的物理过程, 这个上界只依赖于物理过程中每类外线的数目

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f + 1). \quad (12.1.10)$$

例如, 在上一节所研究的量子电动力学的简单版本中, 拉格朗日量所包含的项的类型如表12.1所示. 这里所有的相互作用都有 $\Delta_i \geq 0$, 因而有 E_γ 个外光子线和 E_e 个外Dirac线的Feynman图的表现发散度被方程(12.1.10)所限制:

$$D \leq 4 - \frac{3}{2}E_e - E_\gamma. \quad (12.1.11)$$

仅有有限个外线组合可以产生表现发散的积分; 在12.2节将列举它们. 我们将要证明, 对于所有相互作用的 $\Delta_i \geq 0$ 的理论中出现的有限个发散, 通过对有限个物理常数的重定义以及场的重整化, 这些发散被自动地去除了. 由于这个原因, 这种理论被称为可重整的. 在12.3节我们将编录所有的可重整理论, 并讨论可重整性作为物理理论判据的意义.

“可重整”也可用于单个相互作用. 可重整相互作用是那些 $\Delta_i \geq 0$ 的相互作用, 它们的耦合常数的量纲为正或为零. 有时会区分 $\Delta_i = 0$ 的相互作用和 $\Delta_i > 0$ 的相互作用, 前者称为可重整的, 后者称为超重整的. 由于增加额外的场或导数总会降低 Δ_i , 包含任意给定类型场的可重整相互

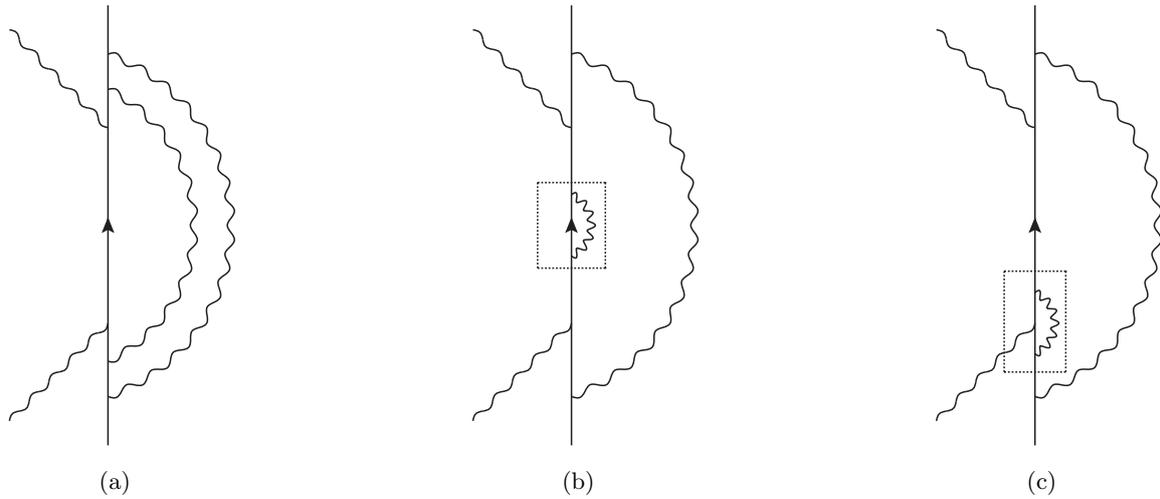


图 12.1 一些Compton散射的两圈图. 这里直线是电子; 波浪线是光子. 对图(a)的动量空间积分是发散的, 由于被虚线所包围的子图相联系的子积分是发散的, 对(b)和(c)的积分则是发散的.

作用仅有有限个. 我们已经看到在量子电动力学的最简版本中, 所有的相互作用都是可重整的, 而 $\bar{\psi}\psi$ 项是超重重整的.

另一方面, 如果有相互作用有 $\Delta_i < 0$, 我们引入的这样的顶点越多, 发散度(12.1.8)越大. 无论我们把各种 E_f 取得多大, 最终 Δ_i 的 i 类顶点都可以足够多, 方程(12.1.8)将变成正的(或零), 而积分会发散. 这种耦合常数量纲为负的相互作用被称为不可重整的; ** 有任何不可重整相互作用的理论也被称为不可重整的. 但这并不意味着这样的理论就是无希望的; 我们将看到这些发散也可以被吸收进理论参量的重定义中, 但是这时我们需要无限个耦合.

需要铭记于心的是我们在这里所计算的Feynman图发散度仅源于所有内4-动量一起趋于无穷的动量空间区域. 如果区域中仅属于某些子图的线的动量趋于无穷大, 发散也能产生. 例如, 在量子电动力学中, 对于Compton散射(其中 $E_e = 2$, $E_\gamma = 2$), 方程(12.1.11)给出 $D \leq -1$, 并且类似图12.1(a)的图是收敛的, 但是像图12.1(b)或12.1(c)的图是对数收敛的, 这是因为这些图包含 $D \geq 0$ 的子图(由虚线框标出). 我们可以认为这些图的发散是由于, 当这些图的两个独立内4-动量的八个分量在一个特定的4-维子空间上趋于无穷时的较坏的反常渐进行为, 即, 在这个子空间中, 唯一真正趋于无穷的4-动量是插入在内线或电子-光子顶点上的圈中的动量.

已经被证明了,² 任意图所对应的振幅, 使其真正收敛的要求是幂次计数不仅对整个积分的完全多重积分给出 $D < 0$, 对于通过保持任意一个或多个圈动量的线性组合不变所定义的任意子图, 也要给出 $D < 0$. (图12.1(b)和12.1(c)所示的图没有通过这个检验, 因为对于仅对虚线框中的圈动量积分的子积分, $D \geq 0$.) 我们不会在这里重复这个相当长的证明, 因为在较早的书³中有很好的处理, 并且无论怎样, 这个证明方法都与我们如何做真实的计算没多大关系. 下一节将描述这要求是如何被满足的

**在微扰统计力学中, 不可重整相互作用称为不相关的, 因为它们在高能极限下变得不重要. 而可重整和超重重整相互作用被分别称为临界的和相关的.

12.2 发散的抵消

考察表观发散度为正, 即 $D \geq 0$ 的Feynman图或者部分Feynman图. 那么, 所有内动量一起趋于无穷的那部分动量空间积分将会像 $\int_0^\infty k^{D-1} dk$ 那样发散. 如果我们相对任意外动量微分 $D+1$ 次, 我们会将被积函数中的净动量因子数目降低 $D+1$ 个,* 因而使得这部分动量空间积分收敛. 仍然可能存在源于子图的发散, 例如图12.1(a)和图12.1(b)中的子图; 我们暂且忽略这种可能性, 在本节稍后将回到这种可能性. 既然微分 $D+1$ 次使得积分有限, 由此得出这样的图或子图的贡献可以写成外动量的 D 次多项式, 在该多项式中系数发散但有一个有限的余数.

为了在没有不相关的复杂性下了解其中的原理, 考察对数发散的一维积分

$$\mathcal{I}(q) \equiv \int_0^\infty \frac{dk}{k+q}$$

其中 $D = 1 - 1 = 0$. 微分一次给出

$$\mathcal{I}'(q) \equiv - \int_0^\infty \frac{dk}{(k+q)^2} = -\frac{1}{q},$$

所以

$$\mathcal{I}(q) = -\ln q + c.$$

常数 c 显然是发散的, 但是积分的其它部分都是有限的. 以完全相同的方式, 我们可以算出 $D = 1$ 的积分

$$\int_0^\infty \frac{k dk}{k+q} = a + bq + q \ln q$$

其中常数 a 和 b 是发散的.

现在, 外动量的多项式项正是通过给拉格朗日量中添加合适的项所产生的: 如果有 E_f 个 f 类外线的图, 其发散度 $D \geq 0$, 那么通过增加各种有 $n_{if} = E_f$ 个 f 类场以及 $d_i \leq D$ 个导数的相互作用 i , 这样所产生的紫外发散多项式与前者相同. 如果在拉格朗日量中已经有了这样的相互作用, 那么紫外发散就是给这些相互作用的耦合常数加上修正. 因此, 通过这些耦合常数中引入合适的无限大项就可以抵消掉这些无限大. 所有我们所测量过的都是裸耦合常数与其中一个发散多项式相对应系数的和, 所以如果我们希望这个和等于(可能有限)测量值, 那么裸耦合常数必须包含一个无穷大以抵消对内动量的发散积分所产生的无穷大. (一个条件: 当发散发生在只有两条外线的图或子图中, 其表现为对粒子传播子的辐射修正, 这里我们不是要求某些耦合常数等于测量值, 而是要求全传播子与自由传播子在相同位置有留数相同的极点.) 以这种方式, 所有的无限大都被吸收到耦合常数, 质量以及场的重定义中.

为了使这个重整化程序运作, 重要的是, 拉格朗日量中要包含所有对应Feynman振幅紫外发散部分的相互作用. 当然, 拉格朗日量中的相互作用被各种对称性原理所限制, 例如Lorentz不变性, 规范不变性等, 但是它们以限制相互作用的方式限制了紫外发散. (证明非阿贝尔规范对称性以限制相互作用的方式限制了无限大要费些功夫, 这将在卷II中进行证明.) 在一般情况下, 在紫外发散上没有其它限制, 所以拉格朗日量必须包含每个与对称原理相容的项. (在超对称理论中, 这个规则存在例外.⁴)

*例如, 如果一个内标量场线携带动量 $k+p$, 其中 p 是外4-动量的线性组合而 k 是积分4-动量变量, 那么传播子 $[(k+p)^2 + m^2]^{-1}$ 相对 p^μ 的导数给出 $-2(k_\mu + p_\mu)[(k+p)^2 + m^2]^{-2}$, 其在 $k \rightarrow \infty$ 时趋于 k^{-3} 而不是 k^{-2} .

然而, 存在一类重要的理论, 其只有有限个相互作用, 但重整化程序依旧运作. 它们是所谓的可重整理论, 其相互作用都有 $\Delta_i \geq 0$. 这样, 方程(12.1.8)给出

$$D \leq 4 - \sum_f E_f (s_f + 1),$$

所以仅有有限个Feynman图或子图中产生了发散多项式: 那些外线足够少使得 $D \geq 0$ 的图. 将这些发散图或发散子图替换成单个顶点, 其中顶点由拉格朗日量中有 E_f 个 f 类场和 $0, 1, \dots, D$ 个导数的项产生, 这样将会产生与这种发散多项式相同的贡献. 但是, 与方程(12.1.9)相比, 我们看到它们与满足可重整性要求 $\Delta_i \geq 0$ 的相互作用是精确相同的, 或者换句话说,

$$0 \leq d_i \leq 4 - \sum_f n_{if} (s_f + 1).$$

为了使所有的无限大在可重整理论中抵消掉, 通常需要对称性允许的所有相互作用都必须真正地出现在拉格朗日量**中. 例如, 如果有相互作用为 $\bar{\psi}\psi\phi$ (或 $\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$) 的标量(或赝标量)场 ϕ 和费米场 ψ , 那么我们无法排除相互作用 ϕ^4 ; 否则就没有抵消项来抵消与四个标量或赝标量线相连的费米圈所产生的对数发散.

我们来更细致的看一下在量子电动力学的最简版本中, 无限大的抵消是如何运作的. 方程(12.1.11)表明只有如下的图或子图才可能产生发散积分:

$\mathbf{E}_e = 2, \mathbf{E}_\gamma = 1$

这是电子-光子顶点 $\Gamma_\mu^{(\ell)}(p', p)$. (上标 ℓ 表明这仅包含圈图的贡献.) 它有 $D = 0$, 所以它的发散部分是动量无关的. 这样Lorentz不变性仅允许这个发散常数正比于 γ_μ , 所以

$$\Gamma_\mu^{(\ell)} = L\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)} \quad (12.2.1)$$

其中 L 是个对数发散的常数, 而 $\Gamma_\mu^{(f)}$ 是有限的. 由于我们总可以把 $\Gamma_\mu^{(f)}$ 中的有限项 $\delta L \gamma_\mu$ 移到 $L\gamma_\mu$ 中, 所以这并不唯一地定义常数 L . 为了完成这个定义, 我们应指出, 就像10.4节中所证明的那样, $\Gamma_\mu(p, p)$, 以及随之的 $\Gamma_\mu^{(f)}(p, p)$, 它们在质量壳Dirac旋量之间的质量壳矩阵元正比于 γ^μ 的同一矩阵元, 所以我们可以通过 $p^2 + m_e^2 = 0$ 时的规定

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \Gamma_\mu^{(f)}(p, p) u(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (12.2.2)$$

来定义 L .

$\mathbf{E}_e = 2, \mathbf{E}_\gamma = 0$

这是电子自能插入 $\Sigma^*(p)$. 它有 $D = 1$, 所以它的发散部分对入费米子和出费米子所携带的动量 p^μ 是线性的. Lorentz不变性(以及宇称守恒)只允许它是 \not{p} 的函数, 所以我们可以将圈贡献写成

$$\Sigma^{(\ell)}(p) = A - (i\not{p} + m)B + \Sigma^{(f)}(p), \quad (12.2.3)$$

**额外地, 整体对称性不允许的相互作用和质量项, 只要它们是超重整的, 即有 $\Delta_i > 0$, 就可以出现在拉格朗日量中. 这是因为超重整耦合的出现降低了发散度, 使得对称性破缺不影响那些被 $\Delta_i = 0$ 的严格可重整耦合所抵消的发散. 要注意的是, 要体现对称性的是裸的严格可重整耦合; 以质量壳矩阵元定义的重整化耦合一般表现的是对称性破缺的效应.

其中 A 和 B 是发散常数, 而 $\Sigma^{(f)}$ 是有限的. 同样地, 因为我们总可以使 $\Sigma^{(f)}$ 偏移一个有限的 p 的一阶多项式. 我们将通过规定

$$\Sigma^{(f)} = \frac{\partial \Sigma^{(f)}}{\partial p} = 0 \quad \text{对于 } i p = -m \quad (12.2.4)$$

来定义 A 和 B . 实际上, B 不是一个新的发散常数. 只要我们使用一个遵守流守恒的正规化方案, Γ_μ 和 Σ 将通过Ward等式(10.4.27)相关

$$\Gamma^\mu(p, p) = \gamma^\mu + i \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p)$$

因而

$$L\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}(p, p) = B\gamma_\mu + i \frac{\partial \Sigma^{(f)}(p)}{\partial p^\mu}. \quad (12.2.5)$$

取该方程在 $\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')$ 与 $u(\mathbf{p}, \sigma)$ 之间的矩阵元, 并使用方程(12.2.2)和(12.2.4), 我们发现

$$L = B. \quad (12.2.6)$$

$\mathbf{E}_\gamma = 2, \mathbf{E}_e = 0$

这是光子自能插入 $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$. 它有 $D = 2$, 所以它的发散部分是 q 的二次多项式. Lorentz不变性仅允许 $\Pi_{\mu\nu}^*$ 采取 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $q_\mu q_\nu$ 的线性组合的形式, 而系数只能依赖于 q^2 , 所以圈贡献采取形式

$$\Pi_{\mu\nu}^{(\ell)}(q) = C_1 \eta_{\mu\nu} + C_2 \eta_{\mu\nu} q^2 + C_3 q_\mu q_\nu + \text{有限项},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是发散常数. 只要我们使用遵守流守恒的正规化方案, 我们必然有

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(\ell)}(q) = 0.$$

那么, 对于发散常数这同样要成立, 所以 $C_1 q_\nu + (C_2 + C_3) q^2 q_\nu$ 对于所有的 q 都必须是有限的. 由此得出 C_1 和 $C_2 + C_3$ 都必须是有限的, 因而可以被集中到 $\Pi_{\mu\nu}^{(\ell)}(q)$ 的有限部分中. 因此

$$\Pi_{\mu\nu}^{(\ell)}(q) = (\eta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) (C + \pi(q^2)), \quad (12.2.7)$$

其中 $\pi(q^2)$ 是有限的而 C 是 $\Pi_{\mu\nu}^{(\ell)}$ 中仅剩的发散. 为了确定 C 的定义, 我们可以将任意的有限常数 $\pi(0)$ 移入 C , 使得

$$\pi(0) = 0. \quad (12.2.8)$$

$\mathbf{E}_\gamma = 4, \mathbf{E}_e = 0$

这是光被光散射的振幅 $M_{\mu\nu\rho\sigma}$. 它有 $D = 0$, 所以, 利用Lorentz不变性和Bose统计, 它可以写成(这里不存在非圈图贡献)

$$M_{\mu\nu\rho\sigma} = K(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + \text{有限项}$$

其中 K 是潜在的发散常数. 然而, 流守恒给出

$$q^\mu M_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$

因而 $K(q_\nu\eta_{\rho\sigma} + q_\rho\eta_{\nu\sigma} + q_\sigma\eta_{\nu\rho})$ 是有限的. 为了使其对于 $q \neq 0$ 依然成立, K 本身必须是有限的. 这是对对称性原理在重整化程序中所扮演角色的一个很好的示例; 如果 K 表现为无限的, 无法通过对

相互作用 $(A_\mu A^\mu)^2$ 的耦合常数进行重整化来移除它, 因为规范不变性根本就不允许这样的相互作用, 但是由于规范不变性所附加的流守恒条件, K 是有限的.

$\mathbf{E}_\gamma = \mathbf{1}$, $\mathbf{E}_e = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{E}_e = \mathbf{1}$, $\mathbf{E}_\gamma = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$

它们分别有 $D = 3$ 和 $D = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$, 但Lorentz不变性使得所有这样的图为零.

$\mathbf{E}_\gamma = \mathbf{3}$, $\mathbf{E}_e = \mathbf{0}$

这有 $D = 1$, 但由于荷共轭不变性为零.

读者也许已经注意到了, 独立发散常数 A, B, C 与量子电动力学拉格朗日量的抵消项部分(11.1.9)中的独立参量 Z_2, Z_3 以及 δm 是一一对应的. 这些抵消项对 $\Sigma^*(p)$ 有一个直接的贡献 $Z_2 \delta m - (Z_2 - 1)(i\not{p} + m)$. 单粒子极点的位置与留数要与自由场相同的要求意味着, 我们必须选择 Z_2 和 δm 使得总的 $\Sigma^*(p)$ 满足方程(12.2.4), 即

$$Z_2 \delta m = -A, \quad (12.2.9)$$

$$Z_2 - 1 = -B, \quad (12.2.10)$$

这样, 完整的电子自能插入正是有限函数 $\Sigma^{(f)}(p)$:

$$\Sigma(p) = \Sigma^{(f)}(p). \quad (12.2.11)$$

另外, \mathcal{L}_2 对 Γ_μ 的直接贡献等于 $(Z_2 - 1)\gamma_\mu$. 利用方程(12.2.6), 我们看到全顶点是

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + (Z_2 - 1)\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(\ell)} = \gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}. \quad (12.2.12)$$

这不仅是有限的, 而且满足条件

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \Gamma_\mu(p, p) u(\mathbf{p}, \sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \gamma_\mu u(\mathbf{p}, \sigma), \quad (12.2.13)$$

也可以从方程(10.6.13)和(10.6.14)中看到这一点. 最后, \mathcal{L}_2 对 $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ 的贡献为 $-(Z_3 - 1)(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$. 为了使光子传播子与自由场有相同的极点且留数相同, 我们需要在总的 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 中 $q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu$ 的系数为零, 所以

$$Z_3 = 1 + C \quad (12.2.14)$$

这样光子传播子就是有限的:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (\eta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \pi(q^2). \quad (12.2.15)$$

迄今为止, 我们仅检验了, 产生于动量空间中所有内动量都很大(并带有通用的比例)的区域的发散, 是外动量的多项式并可以被合适的抵消项抵消掉. 这样的图被称为表观收敛的. 在我们得出所有的紫外发散实际上都可以被重整化移除的结论之前, 我们需要考察, 在高阶图中, 当动量空间积分变量的一些子集而非全体趋于无穷大时产生的发散. 例如, 在量子电动力学中, 子积分中的表观发散, 要么来源于光子自能部分 Π^* , 要么来源于电子自能部分 Σ^* , 要么来源于电子-电子-光子顶点 Γ^μ . 这种发散的问题是无法通过对外动量微分去掉这些发散; 留给我们的项, 导数只能作用在不在发散子图中的内线上, 因而没有降低那些子图的发散度. 正如上一节所提到的, 一个图或几个图的和, 仅当其自身以及它所有的子积分在动量幂次计数的意义上是表观收敛时, 才是真正收敛的. 但只要这样的发散子图出现了, 一个无限大的抵消项就会伴随而来. 在电动力学中, 它们是方程(11.1.9)中的项: 对于每一 $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ 是 $-(Z_3 - 1)(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$ 项, 对于每一

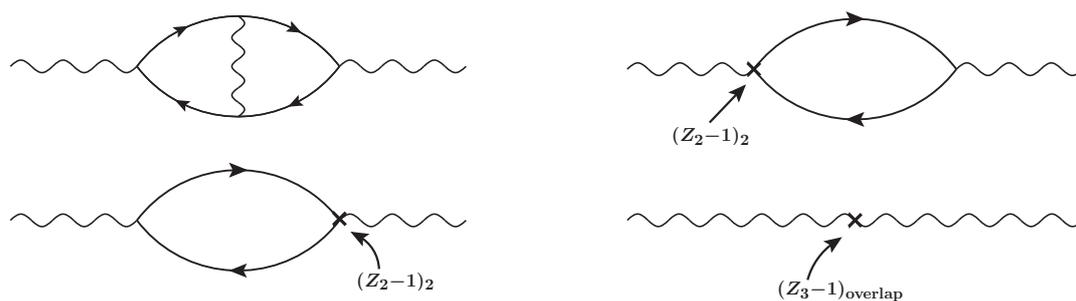


图 12.2 量子电动力学中一些包含交缠发散的4阶光子自能图. 带箭头的线是电子; 波浪线是光子. 十字代表抵消项的贡献.

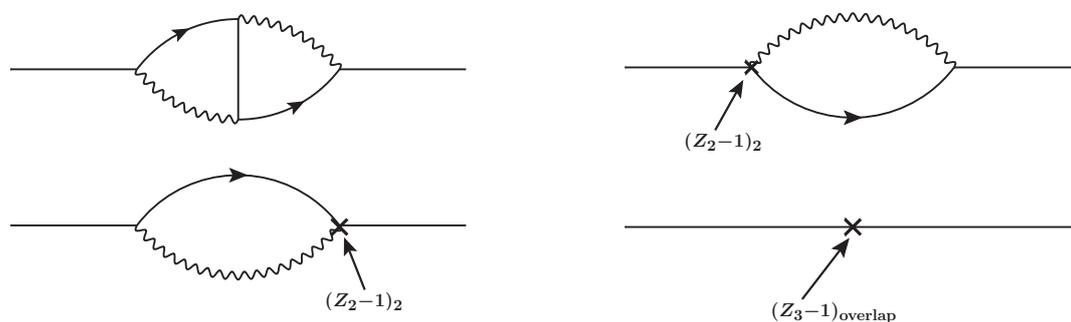


图 12.3 量子电动力学中一些包含交缠发散的4阶电子自能图. 波浪线是光子; 其它线是电子. 十字代表抵消项的贡献.

个 $\Sigma^*(p)$ 是 $Z_2\delta m - (Z_2 - 1)(i\not{p} + m)$ 项, 而对于每一 Γ^μ 是 $(Z_2 - 1)\gamma^\mu$ 项. 就像这个图是整体一样, 这些抵消项抵消了来自发散子图的无限大.¹

不幸的是, 这个简单的讨论中存在疏漏——交缠(overlap)发散的可能性. 即, 两个发散子图有可能分享一条内线, 使得我们无法将它们视为独立的发散积分. 在量子电动力学中, 仅当两个电子-电子-光子顶点在光子或电子自能插入[†]中交缠时, 如图12.2和12.3所示, 这才会发生.

将交缠发散考虑在内的完整重整化处理应该不仅要包含消除全部积分中表观紫外发散的處理, 也要包含消除所有子积分中的表观发散的處理, 并且要证明这个處理被质量, 场以及耦合常数的重整化(至少形式上地)实现了. 这样, 参考文献2的定理就确保了, 所有重整化场的Gree函数, 当其以重整化质量和耦合表示时是有限的. 重整化场, 质量以及耦合使得整个积分以及所有的子积分表观收敛的第一个证明由Salam(萨拉姆)给出.⁵ 一个更加具体的消除紫外发散的處理由Bogoliubov(玻戈留波夫)和Parasiuk(泊拉奇克)给出,⁶ Hepp(海普)修正了它,⁷ 并且他们证明了这等价于场, 质量以及耦合常数的重整化. 最后, Zimmerman⁸(齐默尔曼)证明这一處理确实消除了整个积分以及所有子积分中的表观发散, 并使用参考文献2的定理得到了这样的结论: 动量空间重整化Feynman积分是收敛的.

简言之, 消除表观发散的“BPHZ”方法要求我们考虑用盒子围住整个图和/或其子图的所有

[†]在两个自能插入中, 或者在一个自能插入与一个顶点部分中, 共享一条线使得不能留下足够多的外线将这样的子图与图的剩余部分相连. 历史上, 通过将电子自能表示成顶点函数的形式, 这样交缠发散就不会发生, 就可以用Ward等式(10.4.26)来绕过电子自能中的交缠发散问题. 由于这个方法是不必要的, 并且在任何情况下都不能解决光子或其它中性粒子的自能问题, 所以我们不会在这里叙述这个方法.

可能方式(称为“树丛”), 盒子可以相互嵌套但不能重叠. (下面会给出一个例子.) 对于每一树丛, 通过将盒子内(从最内部的盒子开始, 逐步向外扩展)表现发散度为 D 的任何子积分替换成其关于流入或流出该盒子的动量的Taylor级数展开式中的前 $D + 1$ 项, 我们可以定义一个剪除项.[‡] 剪除Feynman图通过原始图减去所有这些剪除项给出, 其中这些剪除项中包括由包含整个图的单个盒子组成的树丛的剪除项.

很容易看到, 以这种方式计算剪除Feynman振幅与通过将原始拉格朗日量中的所有场, 耦合常数以及质量替换成它们的重整化配对所获的振幅是相同的. 这种方法与我们在第11章所使用的那一类重整化之间的差异是, 用振幅定义的重整化场, 耦合常数和质量处在非传统的点上, 即所有的4-动量为零. (在这一方面, 本节开头讨论的一维发散积分提供了BPHZ方法分离发散项的一个基础例子.) 但关于重整化点没有什么特殊的; 一旦通过将Feynman振幅表示成这些非传统重整化量的形式而使其收敛, 便能够在不进入新的无限大的情况下改写成传统重整化场, 耦合以及质量的形式.

实际中使用BPHZ剪除处理是不必要的. 将场, 质量以及耦合替换称它们的(利用任何方便的重整化点定义的)重整化配对就会自动提供抵消所有无限大的抵消项. 哪怕出现了交缠发散, 取代证明BPHZ剪除处理确实使得所有积分收敛, 我们反而应该看一个展示重整化如何运作的例子.

考察图12.2所示的对光子自能插入 $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ 的4阶贡献. (这里的树丛由对 p 和 p' 的整个积分, 单独对 p 的子积分以及单独对 p' 的子积分构成.) 引入对应顶点部分和光子场重整化的抵消项, 其有值

$$\begin{aligned} [\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{overlap}} = & -\frac{e^4}{(2\pi)^8} \int d^4p \int d^4p' \frac{1}{(p-p')^2 - i\epsilon} \\ & \times \text{Tr} \{ S(p') \gamma_\nu S(p'+q) \gamma^\rho S(p+q) \gamma_\mu S(p) \gamma_\rho \} \\ & - 2(Z_2 - 1)_2 \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{Tr} \{ \gamma_\nu S(p+q) \gamma_\mu S(p) \} \\ & - (Z_3 - 1)_{\text{overlap}} (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu), \end{aligned} \quad (12.2.16)$$

其中 $S(p) \equiv [-i\not{p} + m]/[p^2 + m^2 - i\epsilon]$; $(Z_2 - 1)_2$ 是 $Z_2 - 1$ 中 e 的二阶项; 而 $(Z_3 - 1)_{\text{overlap}}$ 是对数发散常数, 其是 e 的4阶用来抵消 $[\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{overlap}}$ 中 q^λ 的二阶项. 在第二项中产生了因子2是因为对于二阶光子自能中的两个顶点都有重整化抵消项 $Z_2 - 1$. 然而, 要注意的是, 这里的第一项既可以被理解成 p' -积分给出的顶点修正插入在 p -积分给出的光子自能上, 也可以被理解成 p -积分给出的顶点修正插入在 p' -积分给出的光子自能上, 但是不能理解成插入两个独立的顶点修正, 这是因为只存在一个光子传播子.

为了看到如何处理方程(12.2.16)中的无限大, 注意到

$$[(Z_2 - 1)_2 + R_2] \gamma_\mu = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{p'^2 - i\epsilon} \gamma_\rho S(p') \gamma_\mu S(p') \gamma^\rho, \quad (12.2.17)$$

其中 R_2 是有限的余数. (Lorentz不变性告诉我们右边的积分正比于 γ_μ . 这个积分与 $(Z_2 - 1)_2 \gamma_\mu$ 的差到 e 的二阶等于在零电子动量和零光子动量处的全重整化电子-电子-光子顶点, 因而是有限的.)

[‡]正如这里所叙述的, 这个方法即适用于可重整理论也适用于不可重整理论. 在可重整理论中, 它暗示了, 除非该盒子包含对应拉格朗日量中可重整项的有限个图中的一个, 否则就没有剪除项.

这使得我们可以以如下形式重写方程(12.2.16)

$$\begin{aligned}
[\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{overlap}} &= -\frac{e^4}{(2\pi)^8} \int d^4p \int d^4p' \\
&\times \left[\frac{1}{(p-p')^2 - i\epsilon} \text{Tr} \{S(p') \gamma_\nu S(p'+q) \gamma^\rho S(p+q) \gamma_\mu S(p) \gamma_\rho\} \right. \\
&\quad - \frac{1}{p'^2 - i\epsilon} \text{Tr} \{S(p') \gamma_\nu S(p') \gamma^\rho S(p+q) \gamma_\mu S(p) \gamma_\rho\} \\
&\quad \left. - \frac{1}{p^2 - i\epsilon} \text{Tr} \{S(p') \gamma_\nu S(p'+q) \gamma^\rho S(p) \gamma_\mu S(p) \gamma_\rho\} \right] \\
&- 2R_2 \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{Tr} \{\gamma_\nu S(p+q) \gamma_\mu S(p)\} \\
&- (Z_3 - 1)_{\text{overlap}} (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu). \tag{12.2.18}
\end{aligned}$$

首先考察只对 p' 的积分. 前两项都是对数发散的, 但是它们的差是有限的. 第三项也是对数发散的(有一个规范不变的正规化子), 但这一项中的发散(不像前两项)的形式为 q 的二次多项式, 而余数是有限的. 剩余的发散被 $-(Z_3 - 1)_{\text{overlap}}(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$ 这一项抵消, 这一项抵消了 $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ 中的所有二阶项. 所以 p' -子积分给出有限结果. 方程(12.2.16)的对称性表明 p -积分也以精确相同的方式给出了一个有限的结果. 保持 $ap + bp'$ (其中 a 和 b 任意的非零常数)不变的对 p 和 p' 的子积分显然是收敛的, 而抵消项 $-(Z_3 - 1)_{\text{overlap}}(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$ 使得对 p 和 p' 一起积分变得有限. 因此方程(12.2.18)和它的任意一个子积分都满足收敛的幂次计数要求, 因而根据上一节所引用的定理,² 总表达式实际上是收敛的.

* * *

在电动力学中, 存在重整化耦合以及重整化质量和场的自然定义. 这并非总是如此, 例如, 考察单个实标量场 $\phi(x)$ 的理论, 其拉格朗日量密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{24} g \phi^4. \tag{12.2.19}$$

到一圈阶, 标量-标量散射的 S -矩阵根据Feynman规则给定为

$$S(q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q'_2) = \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(q'_1 + q'_2 - q_1 - q_2)}{(2\pi)^6 (16E'_1 E'_2 E_1 E_2)^{1/2}} F(q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q'_2), \tag{12.2.20}$$

其中

$$\begin{aligned}
-i(2\pi)^4 F(q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q'_2) &= -i(2\pi)^4 g + \frac{1}{2} \left[-i(2\pi)^4 g \right]^2 \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 \\
&\times \int d^4k \left[\frac{1}{\left[(q_1 + k)^2 + m^2 - i\epsilon \right] \left[(q_2 - k)^2 + m^2 - i\epsilon \right]} \right. \\
&\quad \left. + (q_2 \rightarrow -q'_1) + (q_2 \rightarrow -q'_2) \right], \tag{12.2.21}
\end{aligned}$$

而 q_1, q_2 和 q'_1, q'_2 是入4-动量和出4-动量. 像通常一样, 组合分母并旋转 k^0 -积分围道, 这变成

$$F = g - \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk \int_0^1 dx \left\{ \left[k^2 + m^2 - sx(1-x) \right]^{-2} + \left[k^2 + m^2 - tx(1-x) \right]^{-2} + \left[k^2 + m^2 - ux(1-x) \right]^{-2} \right\}, \quad (12.2.22)$$

其中 s, t 和 u 是Mandelstam(曼德斯塔姆)变量

$$s = -(q_1 + q_2)^2, \quad t = -(q_1 - q'_1)^2, \quad u = -(q_1 - q'_2)^2, \quad (12.2.23)$$

关系为 $s + t + u = 4m^2$; 另外, x 是在组合分母时引入的Feynman参量. 加上一个在 $k = \Lambda$ 处的紫外截断, 这给出结果(对于 $\Lambda \gg m$)

$$F = g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) - 3 \right\}. \quad (12.2.24)$$

假定我们待在 F 为实的区域, 我们可以定义重整化耦合 g_R 为 F 在我们希望的任意 s, t, u 点的值. 例如, 假使为了维持标量间的对称性, 我们选择在非质量壳点 $q_1^2 = q_2^2 = q_1'^2 = q_2'^2 = \mu^2$, $s = t = u = -4\mu^2/3$ 处重整化. 定义重整化耦合 g_R 为 F 在该点的值, 我们有

$$g = g_R + \frac{3g^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) - 1 - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{4x(1-x)}{3} + \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] + \dots. \quad (12.2.25)$$

这样, 在方程(12.2.24)中, 直到 g_R^2 阶的截断相关性抵消了, 留下了以 g_R 表示的 F 是有限的公式:

$$F = g_R - \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)} \right) \right\} + \dots. \quad (12.2.26)$$

这里, μ^2 可以取任何远大于 $-3m^2$ 的值, 在这个范围内 g_R 是实的. 显然, 方程(12.2.26)中显式的 μ -相关性被重整化耦合的 μ -相关性抵消了. 当我们进入到卷II的重整化群方法时, 这一改变重整化要求(这当然也存在于电动力学和其他真实理论中)的自由度将变得非常重要.

12.3 可重整性必要吗?

在上一节, 我们发现了一类拉格朗日量中只有有限个项的特殊理论, 然而对于这类理论, 重整化手段是适用的. 在这些理论中, 所有相互作用都满足可重整条件

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1) \geq 0,$$

[¶]回顾方程(12.2.25)的推导, 可以验证在这个推导中, 我们没有使用条件 $q_1^2 = q_2^2 = q_1'^2 = q_2'^2 = -m^2$, 所以无论我们取外线动量是多少, 方程(12.2.24)总是适用的.

表 12.2 包含标量 ϕ , Dirac场 ψ 和光子场 A^μ 的拉格朗日密度中所允许的可重整项. 这里 n_{if} 和 d_i 是 i 类相互作用中 f 类场的数目和导数的数目, 而 Δ_i 是相应系数的量纲.

	n_{if}		d_i	Δ_i	\mathcal{H}_i
	标量	光子 自旋 $\frac{1}{2}$			
1	0	0	0	3	ϕ
2	0	0	0	2	ϕ^2
2	0	0	2	0	$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$
3	0	0	0	1	ϕ^3
4	0	0	0	0	ϕ^4
2	1	0	1	0	$\phi\partial_\mu\phi A^\mu$
2	2	0	0	0	$\phi^2 A_\mu A^\mu$
1	0	2	0	0	$\phi\bar{\psi}\psi$
0	2	0	2	0	$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
0	0	2	0	1	$\bar{\psi}\psi$
0	0	2	1	0	$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$
0	1	2	0	0	$\bar{\phi}\gamma^\mu A_\mu\psi$

其中 d_i 和 n_{if} 是 i 类相互作用中 f 类场的数目和导数的数目, 而 s_f 是(附加一些条件) f 类场的自旋. 为了使重整化在这类理论中运作, 通常还需要对称性原理所允许的所有可重整相互作用都应该真的出现在拉格朗日量中.

很重要的是, 这样的相互作用种类只有有限多个. 如果有太多的场或导数, 或者自旋过高的场, Δ_i 都会变成负的. 除非有特殊的抵消, 根本就没有包含 $s_f \geq 1$ 的场的可重整相互作用, 这是因为在拉格朗日量中, 包含这种场以及两个或多个其它场并且 $\Delta_i \geq 0$ 的项将包含单个 $s_f = 1$ 的场以及两个标量但没有导数, 这并不是Lorentz不变的. 我们将在卷II中看到, 在合适的规范下, 一般的无质量自旋1规范场实际上有 $s_f = 0$, 例如光子. 另外, 我们将在卷II中看到, 即便是有质量规范场也可以实际上有 $s_f = 0$, 这取决于它们的质量实际上来源于哪里. 暂且将这些特殊情况搁置一旁, 表12.2中给出了, 包含标量($s = 0$), 光子($s = 0$)以及自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子($s = \frac{1}{2}$)的拉格朗日密度中, Lorentz不变性和规范不变性所允许的所有可重整项.

我们看到, 可重整要求对我们考察的物理理论的种类施加了几个约束. 这样的约束为物理理论的结构提供了一个实质上的钥匙. 例如, 它们本身的Lorentz不变性和规范不变性将允许在量子电动力学的拉格朗日量中引入正比于 $\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ 的“Pauli”项, 而这一项使得电子磁矩变成一个可调参量, 但由于它们不是可重整的, 我们排除了它们. 量子电动力学的成功预测, 例如11.3节所概述的电子磁矩的计算, 可以视为可重整性原理的效用. 这同样适用于我们将在卷II讨论的弱作用, 电磁作用和强作用的标准模型; 可以在该理论中加入任意多个项, 例如夸克和轻子之间的4-费米子相互作用, 这个相互作用会使标准模型的所有预测失效, 并且仅因为是不可重整的而被排除了.

我们必须相信拉格朗日量被限制成只能包含可重整相互作用吗? 正如我们在上一节所看到的, 如果我们在拉格朗日量中引入对称性所允许的所有相互作用, 这样的相互作用有无限多个, 那么将会存在用于抵消每一相互作用的抵消项. 在这个意义上, 只要我们在拉格朗日量中引入了所

有可能的项,不可重整理论变得和可重整理论一样可重整.

近些年来,可重整不是一个基本的物理要求逐渐变得显而易见,并且事实上任何真实的量子场论都将包含可重整项和不可重整项.这个观点的改变部分可以追溯到在寻找可重整引力理论上接二连三的失败.在由Einstein等效原理所支配的一类普遍的引力度规理论中,根本就不存在可重整的相互作用——广义协变相互作用必须从曲率张量和它的广义协变导数中构建,因而,即便是在一个引力子传播子行为是 k^{-2} 的“规范”中,这些相互作用包含了过多的度规导数以至于丧失了可重整性.尤其是,从引力的耦合常数 $8\pi G_N = (2.43 \times 10^{18} \text{GeV})^{-2}$ 量纲为负这件事中,我们可以轻松地看到广义相对论的不可重整性.即使只有这些,抵消虚引力子引起的发散也将要求拉格朗日量包含对称性所允许的所有相互作用——不仅是包含引力子的相互作用,还有包含任意粒子的相互作用.

但是,如果可重整性不是一个基本的物理原理,那么我们该如何解释像量子电动力学和标准模型这类可重整理论的成功呢?答案可以通过简单的量纲分析看到.我们已经注意到了*i*类相互作用的耦合常数有量纲

$$[g_i] \sim [\text{质量}]^{\Delta_i}, \quad (12.3.1)$$

其中 Δ_i 是指标(12.1.9).不可重整相互作用就是那些耦合常数量纲为质量负幂次的相互作用.现在不无道理的可以从(12.3.1)中猜测,耦合常数不仅有被 Δ_i 所控制的量纲,而且粗略是

$$g_i \approx M^{\Delta_i} \quad (12.3.2)$$

阶的,其中 M 是某些共用常数.(会看到这实际上是下面所要讨论的有效场论中的情况,在卷II中会更加细致的的讨论.)在计算表征动量标度 $k \ll M$ 处的物理过程中,将 $\Delta_i < 0$ 的*i*类相互作用包含在内将会引入因子 $g_i \approx M^{\Delta_i}$,基于量纲分析,其必须伴随一个因子 $k^{-\Delta_i}$,因而这种相互作用的效应在 $k \ll M$ 时被因子 $(k/M)^{-\Delta_i} \ll 1$ 压住*了.(在卷II中,会用重整化群方法更加仔细的进行这个讨论.)可重整的电弱理论和强相互作用理论的成功仅表明了 M 远大于检验这些理论时所处的能量标度.

例如,对电子和 μ 子的传统电动力学的领头不可重整修正正是那些量纲为5的相互作用,其仅被单个因子 $1/M$ 抑制了.仅存在一个被Lorentz不变性,规范不变性和CP不变性允许的相互作用, $(ie/2M)\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ 阶的Pauli项.根据方程(10.6.24), (10.6.17)和(10.6.19),这样的项会给电子或 μ 子磁矩贡献 $4e/M$ 阶的量.电子磁矩的计算值与实验相符至 $10^{-10}e/2m_e$ 阶,所以 M 必须要大于 $8 \times 10^{10}m_e = 4 \times 10^7 \text{Gev}$.

如果其它对称性约束了不可重整相互作用的形式,这一限制会被削弱.例如,传统的量子电动力学拉格朗日量在手征变换 $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ 下,除了费米子质量项 $-m\bar{\psi}\psi$ 有一个符号改变,拉格朗日量是不变的.如果我们假定整个拉格朗日量在形式对称性 $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi, m \rightarrow -m$ 下不变,那么拉格朗日量中的Pauli项将伴随一个额外因子 m/M 出现,使得它对电子磁矩的贡献仅是 $4em/M^2$ 阶的.由于该额外因子 m ,在这里是 μ 子而不是电子给 M 提供了最有用的限制. μ 子磁矩的计算值与实

*在此有必要假定紫外发散已经被重整化移除了,使得不存在紫外截断因子 Λ 来搞乱我们的量纲分析.否则,量纲分析告诉我们,对于 $\Lambda \rightarrow \infty$,每个额外的 $\Delta_i < 0$ 的不可重整耦合常数因子 g_i 将伴随一个增长因子 $\Lambda^{-\Delta_i}$.这个量纲讨论使得Heisenberg⁹很早就耦合常数的量纲对它们进行了分类,并提出¹⁰新效应发生的能量是 g_i^{1/Δ_i} 阶的,例如,在能量 $G_F^{-1/2} \approx 300 \text{GeV}$ 处,其中 G_F 是Fermi β -衰变理论的4-费米子耦合常数.在发展了重整化理论之后, Sakata(坂田)等人¹¹注意到了不可重整理论是那些耦合常数量纲为负的理论.

验相符至 $10^{-8}e/2m_\mu$ 阶, 所以 M 必须大于 $\sqrt{8 \times 10^8}m_\mu = 3 \times 10^3 \text{Gev}$. 在任何情况下, 如果 M 几近于 10^{18}GeV , 那么我们忽视了可能出现在量子电动力学中的不可重整项完全是合理的.

这些考察帮助我们解决了拉格朗日量中的高阶导数项所带来的一些谜题. 例如, 在实标量场 ϕ 的一般理论中, 我们会期望在拉格朗日密度中找到形式为 $\phi \square^n \phi$ 的项. 任何一个这样的项都会对标量自能函数 $\Pi^*(q^2)$ 有一个正比于 $(q^2)^n$ 的直接贡献. 如果我们打算在所有阶引入这样的贡献但忽视其它所有的不可重整相互作用的效应, 那么传播子 $\Delta'(q^2) = 1/(q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2))$ 就不会有在10.7节的一般讨论中所预期的负 q^2 处有 q^2 的单极点, 而是 n 个这样的极点(其中一些会重合), 它们一般处在复值的 q^2 处. 但是, 如果不可重整项 $\phi \square^n \phi$ 有一个 $M^{-2(n-1)}$ 阶的系数, 其中 $M \gg m$, 那么多余的极点就在 M^2 阶的 q^2 处, 在这里忽视其它无限多个也必须出现在拉格朗日量中的不可重整相互作用是不合理的. 因此在一般不可重整拉格朗日量中出现高阶导数项与10.7节中使用的量子场论的一般基础原理不矛盾. 然而, 出于同样的原因, 我们也不能完全用高阶导数项来避免紫外发散. 拉格朗日密度中的项 $M^{-2(n-1)}\phi \square^n \phi$ 在动量 $q^2 \approx M^2$ 处提供了一个截断, 但是在这些动量处我们无法忽视所有其它必须要出现的不可重整相互作用.

尽管不可重整相互作用被高度抑制了, 如果它们有其它本要被禁止的效应, 不可重整相互作用也是可探测的. 例如, 我们在12.5节看到, 荷共轭对称性和空间反演不变性是电磁相互作用结构被强加规范不变性, Lorentz不变性和可重整性后的自然结果, 然而我们可以很轻松地想出破坏这些对称性的不可重整项, 例如电子电偶极矩项 $\bar{\psi} \gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \psi F^{\mu\nu}$, 或者Fermi相互作用 $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$. 现今广泛接受的一个观点是, 重子数和轻子数守恒被高度抑制的不可重整相互作用的微弱效应破坏了. 另一可探测不可重整相互作用的例子是引力子给出的. 正如之前提到的, 引力子根本没有可重整相互作用. 然而, 我们显然探测到了引力, 因为引力有这样的特殊性质: 在宏观物体中, 所有粒子的引力场相干叠加

尽管不可重整理论包含无限多个自由参量, 它们依旧保持着可观的预测能力.¹² 它使得我们可以计算Feynman振幅的不解析部分, 就像上一节开头的一维例子中的 $\ln q$ 和 $q \ln q$ 项. 这种计算仅是再次产生了 S -矩阵理论公理所要求的结果, 即 S -矩阵只有那些么正性所要求的奇异性.

矛盾的是, 不可重整量子场论被证明最有用的情况正是对称性原理禁止了可重整相互作用的情况. 在这种情况下, 通过做 k/M 的幂级数展开, 我们可以导出一个有用的微扰论. 这已经用于细致处理低能 π 介子理论^{12, 13}以及低能引力子理论,¹⁴ 我们将在卷II中进行细致的讨论. 作为一个简单的例子, 考察一个实标量场的理论, 其在场变换

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \epsilon$$

下满足不变性原理, 其中 ϵ 是任意常数. 这个对称性禁止任何可重整相互作用和标量质量, 但它允许无限多个不可重整的导数相互作用

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{g}{4} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2 - \dots,$$

其中 $g \approx M^{-4}$, 而“...”表示有更多导数或场的项. (简单起见, 在这里假定该理论也有在反演 $\phi \rightarrow -\phi$ 下的对称性.) 根据上面的量纲分析, 对于所有能量和动量都是 $k \ll M$ 阶的一般反应, 它的图被因子 $(k/M)^\nu$ 抑制了, 其中

$$\nu = -\sum_i V_i \Delta_i = \sum_i V_i (d_i + n_i - 4),$$

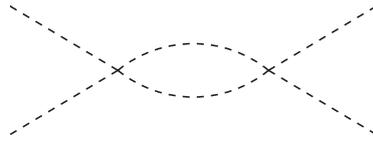


图 12.4 带有导数四线性相互作用的理论中的标量-标量散射一圈图.

而 n_i 和 d_i 是 i 类相互作用中标量场的个数和导数的个数, V_i 是这些相互作用顶点在我们图中的个数. 对于 $k \ll M$, 对任何过程的主要贡献是那些 ν 值最小的贡献. 利用熟悉的连通图的拓扑等式:

$$\sum_i V_i = I - L + 1, \quad \sum_i V_i n_i = 2I + E,$$

ν 的公式可以变成一个更有用的形式, 其中 I , E 和 L 是图中内线, 外线和圈的个数. 结合这些关系给出:

$$\nu = 2E - 4 + 4L + \sum_i V_i (d_i - n_i),$$

现在, 场变换对称性要求每个场必须伴随至少一个导数, 所以 $d_i - n_i$ 以及 L 和 V_i 对于所有相互作用都是非负的. 因此, 对于一个给定过程(即外线个数 E 固定), 主要的项仅能用树图(即 $L = 0$)和最小导数个数 $d_i = n_i$ 的相互作用构建. 也就是说, 在领头阶, 我们可以令拉格朗日密度仅依赖于场的一阶导数. 高能修正可以包含圈和/或在某些场上有更多导数的相互作用. 但到 k/M 任意给定的 ν 阶, 我们只需考虑有限个图, 即那些 $L \leq (4 - 2E + \nu)/4$ 的图, 以及有限个相互作用类型.

例如, 标量-标量散射在领头阶通过用第一阶中的相互作用 $-g(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2$ 计算单顶点树图给出. 根据我们对 ν 的公式, 在低能被因子 $(k/M)^2$ 抑制的领头修正, 其源于另一单顶点树图, 有两个额外导数的形式**为 $\partial_\mu \partial_\nu \partial^\mu \partial^\nu \phi \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi$ 的相互作用产生. 下一步的修正, 在低能处被 k/M 的两个高阶因子抑制, 它们均产生于图12.4中仅用相互作用 $-g(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2$ 计算的一圈图(包含对外线的置换), 单顶点树图也会产生这样的项, 其中单顶点源于有8个导数的四次相互作用, 它的耦合常数包含用来抵消圈图所产生发散†的无穷大部分. 圈图也在散射振幅中产生了有限项, 这些有限项正比于类似 $s^4 \ln s + t^4 \ln t + u^4 \ln u, s^2 t^2 \ln u + t^2 u^2 \ln s + u^2 s^2 \ln t$ 这样的项, 其中系数是可计算的且正比于 g^2 . 这些有限项代表确保 S -矩阵的么正性所需的最低阶散射振幅修正, 然而到目前为止, 微扰量子场论是计算它们的最简单方法.

尽管不可重整理论可以提供一个有力的关于能量的幂级数展开, 但是当能量达到表征各种耦合的共用质量标度 M 处, 它们不可避免的失去了所有预测能力. 如果我们打算逐级取这些展开, $E \gg M$ 的矩阵元结果将破坏么正性约束. 在这样的能量下发生了什么, 似乎仅有两种可能. 一个是强度不断增长的不可重整耦合的效应莫名其妙地饱和了, 避免了与么正性相矛盾.¹⁵ 另一种可能是某种新物理在标度 M 处介入了. 在这种情况下, 描述能量 $E \ll M$ 的自然的不可重整理论仅是有效场论而不是真正基本的理论.

有效场论最早的例子可能是Euler等人¹⁶在20世纪30年代导出的低能光子-光子相互作用理论.(参看1.3节.) 事实上, 他们计算了光子-光子散射Feynman图的贡献, 例如图12.5, 并发现在能量远

**与7.7节的评述一致, 我们排除了包含 $\square\phi$ 的相互作用, 因为利用 ϕ 的场方程可以将这样的相互作用以其它相互作用的形式表示.

†如果我们使用维数正规化, 它们是我们在一圈图中唯一遇到的发散. 对于其它正规化方法, 也存在四次发散和二次发散, 它们被有4个或6个导数的4-标量相互作用中的抵消项抵消.

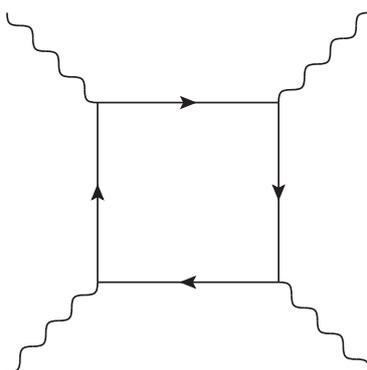


图 12.5 光子-光子散射图, 它的效应在低能下可以从 Euler 等人¹⁶的有效拉格朗日量中计算出来. 直线是电子; 波浪线是光子.

小于 m_e 时, 光子被光子散射与如下有效拉格朗日量计算出的结果相同

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] + \frac{e\mathbf{E}}{m_e^2} \text{和} \frac{e\mathbf{B}}{m_e^2} \text{的高阶项}$$

Euler 等人仅在树级近似下使用这个有效拉格朗日量, 去计算光子相互作用矩阵元中的领头项. 尽管这样的拉格朗日量是不可重整的, 不久之后就在树级近似以外使用它.^{12, 17}

在现代术语中, 我们称, 在推导该拉格朗日量时电子被“积掉”了, 这是因为在一圈近似下我们有

$$\exp \left(i \int \mathcal{L}_{\text{eff}}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) d^4x \right) = \int \left[\prod_x d\psi_e(x) \right] \exp \left(i \int \mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi_e, \mathbf{A}) d^4x \right).$$

一个更加普遍的方法就是写出最普遍的不可重整有效拉格朗日量, 利用它计算出各种振幅的能量和动量表达式, 匹配其给出的振幅结果与从底层理论导出的结果, 进而决定有效拉格朗日量中的常数.

我们会再次遇到有效场论, 尤其是到卷 II 考察破缺对称性时. 我们将看到, 即便有效场论无法从一个底层理论中导出, 无法导出的原因要么是对潜在理论不清楚, 要么是相互作用过强以至于无法使用微扰论, 这时有有效场论也是十分有用的. 确实, 即使我们对带电粒子的性质一无所知, 在足够低能量下的光子散射也必须由 $(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2$ 和 $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$ 构成的有效拉格朗日量描述, 这是因为它们是唯一 Lorentz 不变和规范不变且在 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 上没有导数的 4 次项. 有这种导数的项在低光子能 E 处被额外因子 E/M 抑制, 其中 M 是一些要被积掉的带电粒子的特征质量. 我们可以更进一步: 我们将看到, 即便有效场论所描述的轻粒子根本没有出现在底层理论中, 只要重粒子组分被积掉了, 它也是很有用的. 底层理论甚至可能根本不是场论——引力子的不相容问题使得很多理论家相信这一点, 事实上, 它是弦论. 但是, 无论有效场论来自何处, 它都不可避免地是不可重整理论.

12.4 浮动截断*

在结束本章之前, 值得讨论一下传统重整化理论与 Wilson(威尔逊)所开辟方法¹⁸之间的关系.

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略。

在Wilson方法中,我们要在动量上附加一个分量为 Λ 阶的“浮动”有限紫外截断(要么尖锐要么光滑),并且不要求 $\Lambda \rightarrow \infty$,而是要求理论的(那些出现在拉格朗日量中的)裸常数对 Λ 的依赖关系使得可观测量是 Λ -无关的.

用无量纲参量进行处理要方便一些. 如果一个裸耦合参量或裸质量参量 $g_i(\Lambda)$ 的量纲为[质量] $^{\Delta_i}$, 我们定义相应的无量纲参量 \mathcal{G}_i 为

$$\mathcal{G}_i(\Lambda) \equiv \Lambda^{-\Delta_i} g_i(\Lambda). \quad (12.4.1)$$

普通的量纲分析告诉我们, \mathcal{G}_i 的值在一个截断 Λ' 处可以表示为 \mathcal{G}_i 在另一截断 Λ 处的值和比值 Λ'/Λ 的函数:

$$\mathcal{G}_i(\Lambda') = F_i(\mathcal{G}_i(\Lambda), \Lambda'/\Lambda). \quad (12.4.2)$$

除了 Λ' 和 Λ , F 中不可能再有带量纲的参量, 这是因为任何紫外发散红外发散可以在这里进入; 内线动量被限制在 Λ 和 Λ' 之间的图产生了在 Λ 处的常数与在 Λ' 处的常数之差. 对方程(12.4.2)做相对 Λ' 的微分, 然后令 Λ' 等于 Λ , 这产生了对 \mathcal{G}_i 的微分方程:

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{G}_i(\Lambda) = \beta_i(\mathcal{G}(\Lambda)), \quad (12.4.3)$$

其中 $\beta_i(\mathcal{G}) \equiv [\partial/\partial z F_i(\mathcal{G}, z)]_{z=1}$. 对于微扰论中的弱耦合可以计算出函数 $\beta_i(\mathcal{G})$. 这是重整化群方程的Wilson版本, 我们将在卷II中以稍微不同的形式来讨论它.

对于截断的任意有限值, 拉格朗日量定义了一个有效场论, 在这个有效场论中不是积掉了“重”粒子, 例如Euler等人的工作中电子, 而是积掉了动量大于 Λ 的所有粒子. 即便我们从理论的某个截断 Λ_0 处出发, 即使这时理论只有有限个耦合参量 \mathcal{G}_i^0 , 在其它任意的截断值处, 微分方程(12.4.3)一般会生成对称性原理所允许的所有耦合的非零值.**

我们现在对可重整耦合和不可重整耦合做一区分, 分别标记为 \mathcal{G}_a 和 \mathcal{G}_n , 其中 a 取遍 $\Delta_a \geq 0$ 的有限个耦合(包括质量), 这些耦合的数目记为 N , 而 n 取遍量纲 $\Delta_n < 0$ 的无限个耦合. 我们希望证明, 如果 $\mathcal{G}_a(\Lambda_0)$ 和 $\mathcal{G}_n(\Lambda_0)$ 在某个初始截断值 Λ_0 时处在一个一般的 N -维初始曲面 \mathcal{S}_0 上, 那么(附加一些条件)对于 $\Lambda \ll \Lambda_0$, 它们会到达一个既独立于 Λ_0 又独立于初始曲面的固定曲面 \mathcal{G} .† 这个固定曲面是稳定的, 也就是说, 从表面上的任意一点, 由方程(12.4.3)生成的轨道都待在表面上. 这样的稳定曲面定义了一组参量个数有限的理论, 它的物理量都是截断无关的, 正如上一节所论述的, 这正是可重整理论的标志性质. 更进一步, 这一结构表面在截断 Λ_0 处定义的一般理论在 $\Lambda \ll \Lambda_0$ 时将看起来像个可重整理论.‡

为了证明这些结果, 考察在满足方程(12.4.3)的 $\mathcal{G}_i(\Lambda)$ 值上的小微扰 $\delta\mathcal{G}_i(\Lambda)$. 它将满足微分方程

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \delta\mathcal{G}_i(\Lambda) = \sum_j M_{ij}(\mathcal{G}(\Lambda)) \delta\mathcal{G}_j(\Lambda), \quad (12.4.4)$$

其中

$$M_{ij}(\mathcal{G}) \equiv \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}_j} \beta_i(\mathcal{G}). \quad (12.4.5)$$

**这一规则唯一已知的例外是在基于超对称性的理论中.⁴

†这一定理源于Polchinski.¹⁹ 这里所给出的是一个较短却不太严格的版本. (在Polchinski的证明中, 初始曲面被取成所有的不可重整耦合都为零. 我们将在这里看到, 对于一般的初始曲面, 耦合会趋于同一固定曲面.)

‡当然, 有些理论的对称性和场根本就不允许任何可重整相互作用的存在. 对于仅含费米场或仅含引力场的理论, 就是这种情况. 这样的理论在 $\Lambda \ll \Lambda_0$ 时看起来像自由场理论.

这一方程将可重整耦合与不可重整耦合耦合在一起, 使得很难看到它们行为之间的差异. 为了退耦, 我们引入线性变换

$$\xi_n \equiv \delta\mathcal{G}_n - \sum_{ab} \frac{\partial\mathcal{G}_n}{\partial\mathcal{G}_a^0} \left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} \delta\mathcal{G}_b, \quad (12.4.6)$$

其中 \mathcal{G}_n^0 是可重整耦合在截断 Λ_0 处的值, 我们用它作为初始曲面的坐标, 而 \mathcal{G}_n 不可重整耦合在截断 Λ 处的值, 它们是从微分方程(12.4.3)中导出的, 其中 Λ_0 时的初始值是初始表面上坐标为 \mathcal{G}_a^0 的点. 为了计算 ξ_n 对 Λ 的导数, 我们注意到导数 $\partial\mathcal{G}_i/\partial\mathcal{G}_a^0$ 满足与 $\delta\mathcal{G}_i$ 相同的微分方程(12.4.4). 这样, 证明下式就是一个基础练习

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \xi_n = \sum_m N_{nm} \xi_m, \quad (12.4.7)$$

其中

$$N_{nm} \equiv M_{nm} - \sum_{ab} \frac{\partial\mathcal{G}_n}{\partial\mathcal{G}_a^0} \left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} M_{bm}. \quad (12.4.8)$$

现在我们必须估计 N_{nm} 的元素. 对于自由场, 截断是不需要的, 所以对于非常弱的耦合, 所有的裸参量 $g_i(\Lambda)$ 变成 Λ -无关的. 因此, 对于弱耦合, 无量纲参量 \mathcal{G}_i 的标度就是 $\Lambda^{-\Delta_i}$, 而矩阵 M_{ij} 给定为

$$M_{ij} \approx -\Delta_i \delta_{ij}. \quad (12.4.9)$$

由此得出矩阵 N_{nm} 粗略给定为 $-\Delta_n \delta_{nm}$. 不可重整耦合的标志特征是 $\Delta_n < 0$, 所以方程(12.4.7)告诉我们, 至少对于某些有限范围内的耦合, 其中 N_{nm} 是正定的, ξ_n 在 $\Lambda \ll \Lambda_0$ 时像 Λ/Λ_0 的正幂次那样衰减. 那么在这一极限下, 微扰之间的关系是

$$\delta\mathcal{G}_n = \sum_{ab} \frac{\partial\mathcal{G}_n}{\partial\mathcal{G}_a^0} \left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} \delta\mathcal{G}_b. \quad (12.4.10)$$

特别的, 如果我们在初始曲面 \mathcal{S}_0 上和/或该曲面的起始点上和/或初始截断 Λ_0 上做一点小变动, 使得可重整耦合中微扰 $\delta\mathcal{G}_a$ 在某个截断 $\Lambda \ll \Lambda_0$ 处为零, 那么在所有其它耦合中的微扰 $\delta\mathcal{G}_n$ 在截断 Λ 处也为零. 因此 $\Lambda \ll \Lambda_0$ 处的不可重整耦合 $\mathcal{G}_n(\Lambda)$ 只能依赖于可重整耦合 $\mathcal{G}_a(\Lambda)$, 而不另外依赖于初始曲面或曲面上的起始点或初始截断 Λ_0 . 因此, 在截断 $\Lambda \ll \Lambda_0$ 处, 所有耦合趋于一个 N -维曲面 \mathcal{S} , 其坐标为 $\mathcal{G}_a(\Lambda)$, 这个曲面是既独立于初始曲面有独立于 Λ_0 . 要注意的是不可重整耦合 \mathcal{G}_n 在 \mathcal{S} 上一般不小; 重点是它们变成了可重整耦合的函数. 保持 Λ 远小于 Λ_0 的改变将改变耦合, 但耦合将依旧贴近于 \mathcal{S} (至少只要耦合不要变得过大以至于 N_{nm} 不再是正定矩阵). 因此, 正如所要证明的, \mathcal{S} 是稳定曲面.

我们已经知道所有的物理量可以以 Λ 和 $\mathcal{G}_n(\Lambda)$ 的形式表示, 并且是 Λ -无关的. 特别是对于那 N 个传统重整化耦合和质量, 例如量子电动力学中的 e 和 m_e , 这是正确的. 然而, 我们可以逆用这个关系以传统参量和 Λ 的形式表示 $\mathcal{G}_n(\Lambda)$. 以这种方式, 我们可以证明通常的重整化程序的合理性: 所有的物理量以一种截断无关的方式用传统重整化耦合和质量的形式表示.

Wilson方法在实际应用中有一些优点. 那就是无需担心子积分和交缠发散; 这个动量截断施加在了所有内线上. 另外, 一些超对称理论的不可重整定理, 这些定理告诉了我们一些耦合是不受辐射修正影响的, 对于这些定理, 它们仅适用于截断相关的裸耦合.²⁰

另一方面, Wilson方法有一些缺点. 其一是必须要放弃处理类似量子电动力学这样可重整理论方法上的一些特定简化; 一旦开始积掉动量高于某个标度 Λ 的粒子, 所导致的有限场论将包

含所有的Lorentz不变且规范不变的相互作用, 这些相互作用的耦合是 Λ 相关的. (虽然如此, 在能量 $E \ll \Lambda$ 处的物理过程中, 主导耦合将仍然是那些可重整的.) 另外, 截断一般会破坏显然的规范不变性, 亦或是显然的Lorentz不变性或么正性. 在Wilson方法的原始环境中, 即凝聚态物理中, 这些都不是问题, 因为没有人会期望一个真实的凝聚态理论是严格可重整的, 而且不存在必被截断破坏的基本物理原理. 实际上, 在晶体中, 光子动量上存在截断, 这一截断由晶格间距提供.

实际上, 传统方法与Wilson方法之间的差异是数学上的便利性而非物理解释. 确实, 传统重整化已经提供了一类可调截断; 当我们将我们的答案表示成耦合常数的形式, 而这些耦合常数又定义成物理振幅在某个 μ 阶动量处的值(就上节所讨论的标量场论而言), 使得积分收敛的抵消就开始在 μ 阶虚动量上抵消. 相反, Wilson方法中 Λ -相关的耦合常数最终必须表示成可观察质量和电荷的形式, 并且, 一旦这被完成了, 结果显然与传统方法所获得的结果是相同的.

12.5 偶然对称性*

在12.3节, 我们看到, 在充分低的能量下, 采取可重整场论作为自然的近似描述是有一些很好的原因的. 当可重整条件很强以至于有效拉格朗日量自动满足一个或多个对称性时, 这经常发生, 这些对称性不是底层理论的对称性, 因而可以被有效拉格朗日量中抑制的不可重整项破坏掉. 确实, 大多数实验上发现的基本粒子物理对称性都是这类“偶然对称性”.

带电轻子的电动力学中的反演与味守恒提供了一个经典例子. 最普遍的可重整且规范不变以及Lorentz不变的拉格朗日密度, 对于光子以及自旋 $\frac{1}{2}$ 且电荷为 $-e$ 的场 ψ_i 采取形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & - \sum_{ij} Z_{Lij}\bar{\psi}_{Li}[\not{\partial} + ieA]\psi_{Lj} - \sum_{ij} Z_{Rij}\bar{\psi}_{Ri}[\not{\partial} + ieA]\psi_{Rj} \\ & - \sum_{ij} M_{ij}\bar{\psi}_{Li}\psi_{Rj} - \sum_{ij} M_{ij}^\dagger\bar{\psi}_{Ri}\psi_{Lj}, \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

其中 i, j 对三个轻子味(e, μ 和 τ)求和, ψ_{Li} 和 ψ_{Ri} 是场 ψ_i 的左手部分和右手部分, 定义为

$$\psi_{Li} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_i, \quad \psi_{Ri} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_i, \quad (12.5.2)$$

而 Z_L, Z_R 和 M 是数值矩阵. 关于轻子味守恒, 我们不做任何假定, 所以矩阵 Z_{Lij}, Z_{Rij} 和 M_{ij} 不需要是对角的. 另外, 关于P, C和T下的不变性, 我们不做任何假定, 所以 Z_L 和 Z_R 之间或者 M 和 M^\dagger 之间没有必然联系. 这些矩阵上的唯一约束来自拉格朗日密度的实性质以及正则反对易关系, 前者要求 Z_{Lij} 和 Z_{Rij} 是厄密的, 后者要求 Z_{Lij} 和 Z_{Rij} 是正定的.

现在假定我们用新的场 ψ'_L 和 ψ'_R 替换轻子场 ψ_L 和 ψ_R , 这些新场定义为

$$\psi_L = S_L\psi'_L, \quad \psi_R = S_R\psi'_R, \quad (12.5.3)$$

其中 $S_{L,R}$ 是我们任意的非奇异矩阵. 当拉格朗日密度以这些新场表示时, 它所采取的形式与方程(12.5.1)相同, 只不过有一些新矩阵

$$Z'_L = S_L^\dagger Z_L S_L, \quad Z'_R = S_R^\dagger Z_R S_R, \quad M' = S_L^\dagger M S_R. \quad (12.5.4)$$

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略。

我们可以选择 S_L 和 S_R 使得 $Z'_L = Z'_R = 1$. (取 $S_{L,R} = U_{L,R}D_{L,R}$, 其中 $U_{L,R}$ 是对角化正定厄密矩阵 $Z_{L,R}$ 的么正矩阵, 而 $D_{L,R}$ 是对角矩阵, 它的矩阵元是 $Z_{L,R}$ 本征值平方根的倒数.)

现在做另一变换, 变换到轻子场 ψ''_i , 定义为

$$\psi'_L = S'_L \psi''_L, \quad \psi'_R = S'_R \psi''_R. \quad (12.5.5)$$

再一次, 以这些新场表示, 拉格朗日密度采取同一形式, 并有如下新矩阵

$$Z''_L = S'^{\dagger}_L S'_L, \quad Z''_R = S'^{\dagger}_R S'_R, \quad M'' = S'^{\dagger}_L M' S'_R. \quad (12.5.6)$$

这一次我们令 $S'_{L,R}$ 么正, 又一次使得 $Z''_L = Z''_R = 1$. 我们选择这些么正矩阵使得 M'' 是对角矩阵以及实矩阵. (通过极分解原理, 同任何平方矩阵一样, M' 可以变成 $M' = VH$ 的形式, 其中 V 是么正的而 H 是厄密的. 取 $S'_L = S'^{\dagger}_L V^{\dagger}$ 并选择 S'_R 为使 H 对角化的么正矩阵.) 扔掉上标的撇号, 拉格朗日密度现在采取形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum_i \bar{\psi}_{Li} [\not{\partial} + ieA] \psi_{Li} - \sum_i \bar{\psi}_{Ri} [\not{\partial} + ieA] \psi_{Ri} \\ & - \sum_i m_i \bar{\psi}_{Li} \psi_{Ri} - \sum_i m_i \bar{\psi}_{Ri} \psi_{Li}, \end{aligned} \quad (12.5.7)$$

其中 m_i 是实数, 是厄密矩阵 H 的本征值. 最后, 它可以变成更常见的形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum_i \bar{\psi}_i [\not{\partial} + ieA] \psi_i - \sum_i m_i \bar{\psi}_i \psi_i \quad (12.5.8)$$

当拉格朗日量采取这一形式时, 轻子电动力学的任何可重整拉格朗日量将自动满足P, C和T守恒, 并且使每一味的轻子数(减去反轻子数): 电子, μ 子和 τ 子数目守恒.** 特别地, 尽管有方程(12.5.1), 这一理论并不允许诸如 $\mu \rightarrow e + \gamma$ 这样的过程. 读者或许会担心将方程(12.5.8)中的 ψ_i (之前称为 ψ''_i)作为轻子场是否正确, 这个场显然使轻子数守恒, 而方程(12.5.1)中的 ψ_i 并没有使轻子数守恒, 这似乎允许了类似 $\mu \rightarrow e + \gamma$ 这样的过程. 这样的担心可以放在一旁; 正如10.3节所强调的, 不存在仅作为电子场或 μ 子场的场. 事实上, 尽管方程(12.5.1)产生了1个轻子辐射衰变到2个轻子的非零矩阵元, 但是该矩阵元不在轻子质量壳上, 通过令轻子在质量壳上, 即使使用方程(12.5.1)计算, 我们也会得到, 对于所有这样的过程, S-矩阵元为零.

推导这些结果中的关键是, 在方程(12.5.1)中, 电荷对于轻子场的左手部分和右手部分是相同的, 或者, 换句话说, 轻子场的左手部分和右手部分在电磁规范变换下以相同形式变换. 我们将在卷II中看到, 由于类似的原因, 强相互作用的现代可重整理论, 这个理论称为量子色动力学, 自动满足C守恒, (除了特定的非微扰效应)P守恒和T守恒, 以及每一夸克味的夸克数(减去反夸克数)守恒. 在卷II中, 我们也将看到, 对于弱作用和电磁作用的可重整标准模型的最简单版本, 出于与这里所描述的电动力学相类似的原因, 它将自动满足轻子味守恒(尽管对C和P是不守恒的). 产生于更高质量标度的不可重整相互作用或许会破坏这些守恒率中的任何一个, 这种可能性依然存在着.

**这是由Feinberg(范伯格), Kabir(卡比尔)和我²¹首先证明的. Feinberg²²更早注意到了, 在只有一种中微子的理论中, 弱作用效应将对过程 $\mu \rightarrow e + \gamma$ 产生一个可观测的速率, 直到第二种中微子的发现, 这个问题才被解决.

参考文献

- [1] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949). *Renormalization*提供了一个历史回顾, L. M. Brown编辑(Springer-Verlag, New York, 1993). 一个全面的现代处理, 参看J. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [2] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **118**, 838 (1959). 这个证明仅依赖于欧几里得动量空间中Feynman图积分的一般渐进性质, 而这个积分是通过Wick旋转所有积分围道获得的. 通过使用被积函数更加细节的性质, 这个证明被Y. Hahn和W. Zimmermann简化了, *Commun. Math. Phys.* **10**, 330 (1968), 然后被W. Zimmermann拓展至闵可夫斯基动量空间, *Commun. Math. Phys.* **11**, 1 (1968).
- [3] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York, 1965): Section 19.10 and 19.11.
- [4] 参看, J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1983), 以及那里所引用的原始文献.
- [5] A. Salam, *Phys. Rev.* **82**, 217 (1951); *Phys. Rev.* **84**, 426 (1951); P. T. Matthews and A. Salam, *Phys. Rev.* **94**, 185 (1954).
- [6] N. N. Bogoliubov and O. Parasiuk, *Acta Math.* **97**, 227 (1957).
- [7] K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2**, 301 (1966). Hepp评述道“很难找到两个对[Bogoliubov和Parasiuk的]证明中关键步骤的理解是同构的理论家,” 但Hepp自己的论文就很难读.
- [8] W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* **15**, 208 (1969). 另见W. Zimmermann, in *Lecture on Elementary Particles and Quantum Field Theory — Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics* (M.I.T. Press, Cambridge, 1970).
- [9] W. Heisenberg, *Z. Physik* **110**, 251 (1938).
- [10] W. Heisenberg, 参考文献6和*Z. Physik* **113**, 61 (1939).
- [11] S. Sakata, H. Umezawa, and S. Kamefuchi, *Prog. Theor. Phys.* **7**, 327 (1952).
- [12] S. Weinberg, *Physica* **96A**, 327 (1979).
- [13] J. Gasser and H. Leutwyler, *Ann. Phys. (NY)* **158**, 142 (1984); *Nucl. Phys.* **B250**, 465 (1985).
- [14] J. F. Donoghue, *Phys. Rev.* **D 50**, 3874 (1994).
- [15] 这一现象能够发生的一种可能方式是经由“渐进安全”现象; 参看S. Weinberg, *General Relativity — An Einstein Centenary Survey*, S. W. Hawking和W. Israel编辑(Cambridge University Press, Cambridge, 1979): Section 16.3.

-
- [16] H. Euler and B. Kockel, *Naturwiss.* **23**, 246 (1935); W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Physik* **98**, 714 (1936).
- [17] J. Halter在一圈计算中使用了Euler等人的有效拉格朗日量, *Phys. Lett.* **B 316**, 155 (1993).
- [18] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **B4**, 3174, 3184 (1971); *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975).
- [19] J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B231**, 269 (1984); *Recent Direction in Particle Theory — Proceedings of the 1992 TASI Conference*中的文章, J. Harvey和J. Polchinski编辑(World Scientific, Singapore, 1993): p. 235.
- [20] V. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229**, 381 (1983); M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B227**, 456 (1986); 以及那里所引用的参考文献. 另见, M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B359**, 571 (1991).
- [21] G. Feinberg, P. Kabir, and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 527 (1959).
- [22] G. Feinberg, *Phys. Rev.* **110**, 1482 (1958).

第 13 章 红外效应

在辐射修正的研究中,“软光子”,即那些能量和动量远小于所研究问题中过程的特征质量和能量的光子,它们所产生的修正扮演了一个特殊角色.不仅是由于这些修正通常非常大使得它们必须对微扰论的所有阶求和;这些修正非常简单以至于求和是不困难的.无限大波长光子的贡献采取的形式为发散积分,但是正如我们将看到的,这些“红外发散”全部抵消了.¹

在本章大部分内容中,我们将处理与任意种类且自旋任意的带电粒子相互作用的光子,这些带电粒子中包括像原子核这样既有强相互作用又有电磁相互作用的粒子.然而,将这里所展示的计算挪至其它无质量粒子,例如量子色动力学的胶子,是没有困难的.在13.4节,我们将明确地考察非常普遍的无质量粒子的理论,并会证明红外发散一般环境下的抵消.

在这些泛泛讨论之后,我们将回到光子,并讨论两个有实际意义的专题:软光子在带电粒子上的散射,其中带电粒子有非电磁的相互作用且自旋任意,以及像原子核这样的带电重粒子作为外电磁场源的处理.

13.1 软光子振幅

我们将在本节导出一个通用公式,这个公式给出了在过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射任意个低能光子的振幅,其中过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 包含任何个任意种类的高能带电粒子.

我们从只发射一个软光子的振幅出发.如果我们将有出动量 q 和极化指标 μ 的软光子线与离开过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的某个连通Feynman图的带电粒子线相连,如图13.1(a)所示,那么我们就要给 $\alpha \rightarrow \beta$ 的 S -矩阵元乘以一个额外的带电粒子传播子,该传播子携带带电粒子在发射光子之前所拥有的动量 $p + q$,再乘上新的带电粒子-光子顶点的贡献.对于无自旋,质量为 m 而电荷为 $+e$ 的带电粒子,这些因子是

$$\left[i(2\pi)^4 e(2p^\mu + q^\mu) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p+q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right],$$

其在极限 $q \rightarrow 0$ 下变成

$$\frac{e p^\mu}{p \cdot q - i\epsilon}. \quad (13.1.1)$$

(我们可以随意地重定义正无限小 ϵ 的标度,要小心的是要保留它的符号.)这一结果实际上对于任意自旋的带电粒子都对.例如,对于一个自旋 $\frac{1}{2}$ 且电荷为 $+e$ 的粒子,我们必须将出带电粒子的系数函数 $\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma)$ 替换成

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) \left[- (2\pi)^4 e \gamma^\mu \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\not{p} + \not{q}) + m}{(p+q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right].$$

在极限 $q \rightarrow 0$ 下,传播子的分子由并矢的和给出:

$$-i\not{p} + m = 2p^0 \sum_{\sigma'} u(\mathbf{p}, \sigma') \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma'),$$

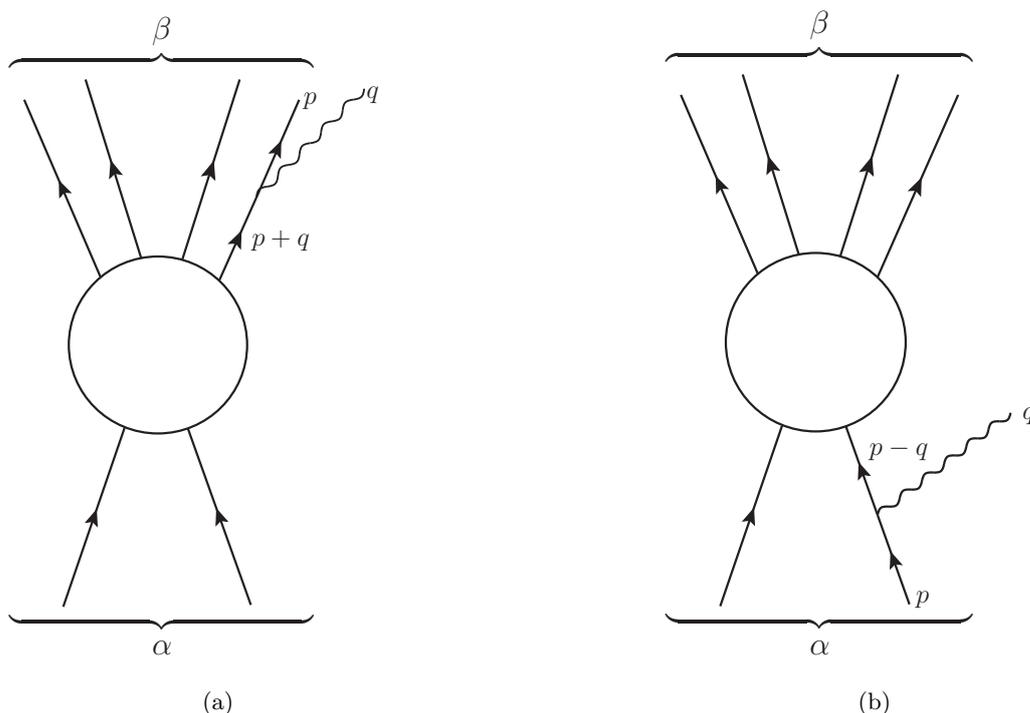


图 13.1 在任意过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射软光子的主导图. 直线是态 α 和 β 中的带电粒子(包含可能的硬光子); 波浪线是软光子.

所以我们有了对 γ^μ 的等动量矩阵元的求和, 由

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, \sigma) = -i \delta_{\sigma, \sigma'} p^\mu / p^0$$

给出, 而这个效应还是给过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的矩阵元乘以因子(13.1.1). 更普遍地, 对于任意自旋, 在极限 $q \rightarrow 0$ 下, 新的带电粒子内线的4-动量 $p + q$ 趋于质量壳, 所以传播子的分子就趋于对系数函数的并矢的求和, 而其将新的顶点矩阵转化成一个因子, 该因子正比于 p_μ 以及螺旋度指标下的单位矩阵, 这又一次导出了因子(13.1.1). 更进一步, 我们在第10章已经看到, 高阶修正既不影响传播子中质量壳极点的留数, 也不影响电子流在等动量的同一粒子态之间的矩阵元, 所以(13.1.1)给出了从出带电粒子线上发射一个软光子所附带的正确因子, 这个因子适用于微扰论的所有阶.

同样的推论也可套用在从过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的入带电粒子线上发射一个光子, 所不同的是, 在带电粒子发射一个4-动量为 q 的光子后, 带电粒子线的4-动量为 $p - q$, 所以取代(13.1.1), 我们得到因子

$$\frac{e p^\mu}{-p \cdot q - i\epsilon}. \tag{13.1.2}$$

当然, 光子也可以从过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中的内线出射, 但在这一情况下, 没有因子在 $q \rightarrow 0$ 时趋于 $(p \cdot q)^{-1}$. 因此, 在过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射4-动量为 q 且带极化指标 μ 的单个软光子的振幅 $M_{\beta\alpha}^\mu(q)$ (没有能动量守恒 δ -函数的 S -矩阵元), 在极限 $q \rightarrow 0$ 下, 由 $\alpha \rightarrow \beta$ 的矩阵元 $M_{\beta\alpha}$ 乘以像(13.1.1)和(13.1.2)这样的项之和给出, 每一个这样的项对应每个出射或入射带电粒子:

$$M_{\beta\alpha}^\mu(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n e_n p_n^\mu}{p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon}, \tag{13.1.3}$$

其中 p_n 和 $+e_n$ 是初态和末态中第 n 个粒子的4-动量和电荷, 而 η_n 是符号因子, 对于末态 β 中的粒子取+1, 对于初态 α 中的粒子取-1.

在继续考察多个软光子的发射之前, 值得讨论一下公式(13.1.3)的一个重要特征.² 为了计算发射一个螺旋度确定的光子的振幅, 我们必须用相对应的光子极化矢量 $e_\mu(\mathbf{q}, \pm)$ 来收缩该式. 但是, 我们在5.9节已经看到, $e_\mu(\mathbf{q}, \pm)$ 并不是一个4-矢量; 在Lorentz变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 下, 极化矢量变换成 $\Lambda^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{q}, \pm)$ 加上一个正比于 q^μ 的项. 为了不让后一项破坏Lorentz不变性, 因而 $M_{\beta\alpha}^\mu(q)$ 与 q_μ 收缩后必须为零. 但对于 $q \rightarrow 0$, (13.1.3)给出

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^\mu(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \eta_n e_n. \quad (13.1.4)$$

右边 $M_{\beta\alpha}$ 的系数正是末态中的总电荷减去初态中的总电荷, 所以它为零的条件正是电荷守恒的条件. 因此, 在没有任何关于规范不变性的独立假定下, 我们看到对于自旋1且无质量的粒子, Lorentz不变性要求, 任何支配这些粒子的相互作用的耦合常数, 例如电荷, 在低能下都必须守恒.

附带地, 在过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射一个4-动量为 q 并带张量指标 μ, ν 的软引力子的振幅由类似(13.1.3)的公式³给出:

$$M_{\beta\alpha}^{\mu\nu}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n f_n p_n^\mu p_n^\nu}{p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon}, \quad (13.1.5)$$

其中 f_n 是软引力子与第 n 种粒子的耦合常数. Lorentz不变性要求当其与 q_μ 收缩后为零. 但是

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\nu}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \eta_n f_n p_n^\nu, \quad (13.1.6)$$

所以和 $\sum f_n p_n^\nu$ 是守恒的. 然而, 4-动量的线性组合中能够守恒并且不禁止任何非平庸散射过程的只有总4-动量, 所以为了使(13.1.6)为零, f_n 必须都相等. (全体 f_n 的共用值可以认为是 $\sqrt{8\pi G_N}$, 其中 G_N 是牛顿引力常数.) 因此Lorentz不变性要求自旋2的低能无质量粒子与所有形式的能动量张量的耦合形式相同. 这在很大程度上证明了Einstein等效原理是在自旋2的无质量粒子上附加Lorentz不变性后的必然结果. 同样, 对于在过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射4-动量为 q 且自旋 $j \geq 3$ 的软无质量粒子, 其振幅形式为

$$M_{\beta\alpha}^{\mu\nu\rho\cdots}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n g_n p_n^\mu p_n^\nu p_n^\rho \cdots}{p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon}.$$

这时Lorentz不变性要求和 $\sum g_n p_n^\nu p_n^\rho \cdots$ 必须守恒. 但是这种既守恒又不禁止非平庸散射过程的量是不存在的, 所以 g_n 必须全部为零. 自旋 $j \geq 3$ 的无质量粒子或许存在, 但是它们的耦合在低能极限下无法幸存, 尤其是它们无法传递平方反比力.

现在, 我们来考察两个软光子的发射. 如果在一个图中两个光子是从过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的两个不同外线上发射的, 那么该图对矩阵元的贡献就是 $\alpha \rightarrow \beta$ 的矩阵元乘以类似(13.1.1)或(13.1.2)这样的因子之积. 或许会有些惊奇, 即使这两个光子是从同一外线上发射的, 上述结论依然成立. 例如, 如果光子1是在光子2之后从电荷为 $+e$ 且能动量4-矢为 p 的外线上发射的, 那么我们会得到因子

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot q_1 - i\eta\epsilon} \right] \left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot (q_2 + q_1) - i\eta\epsilon} \right],$$

但是, 如果光子2是在光子1之后发射的, 这个因子就变成

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot q_2 - i\eta\epsilon} \right] \left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta\epsilon} \right].$$

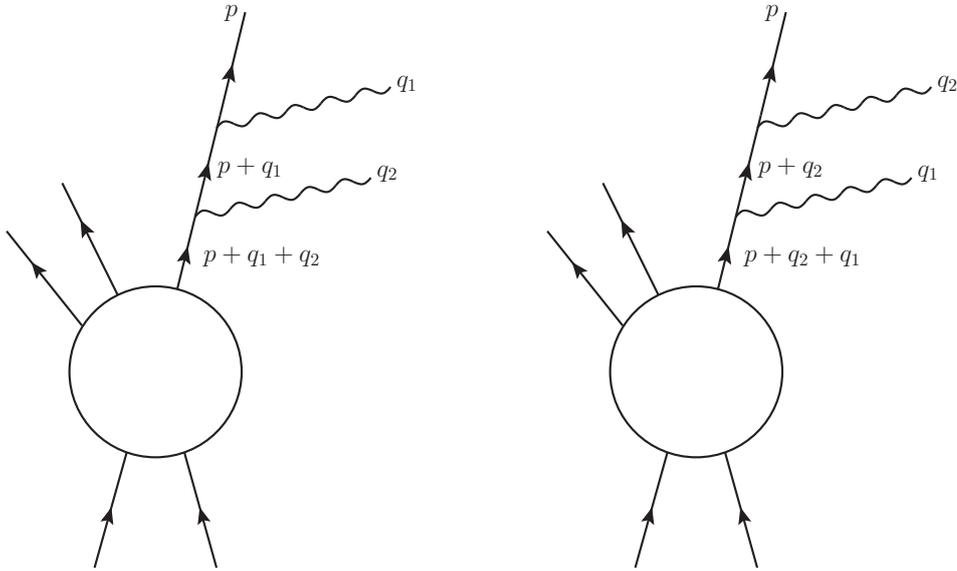


图 13.2 从同一出带电粒子线上发射两个软光子的图. 直线是硬粒子; 波浪线是软光子.

(参看图13.2. 又一次, 根据带电粒子线是离开的还是进入的, η 分别是+1或-1.) 这两个因子之和为

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot q_1 - i\eta\epsilon} \right] \left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot q_2 - i\eta\epsilon} \right],$$

这正是在发射单个光子时所遇到的相同因子的积.

更普遍地, 从单个外线上发射任意个光子时, 我们会遇到如下形式的求和*

$$\begin{aligned} & [p \cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2 + q_3) - i\eta\epsilon]^{-1} \dots \\ & \quad + \text{置换} \\ & = [p \cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot q_2 - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot q_3 - i\eta\epsilon]^{-1} \dots \end{aligned} \quad (13.1.7)$$

由此得出, 在过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射 N 个软光子的振幅 $M_{\beta\alpha}^{\mu_1 \dots \mu_N}(q_1 \dots q_N)$, 其中 μ_1, \dots, μ_N 和 q_1, \dots, q_N 分别是这 N 个光子的极化指标和4-动量, 在极限 $q \rightarrow 0$ 下, 由 $\alpha \rightarrow \beta$ 的矩阵元乘以类似(13.1.3)中的

*这一等式可以用数学归纳法进行证明. 我们已经看到该等式对于两个光子是成立的. 假定它对于 $N-1$ 个光子也是成立的. 这样, 对于 N 个光子, 我们可以将置换的求和写成, 先选择第一个要发射的光子再对剩余光子的置换求和, 然后对选择方式求和:

$$\begin{aligned} & [p \cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta\epsilon]^{-1} \dots [p \cdot (q_1 + q_2 + \dots + q_N) - i\eta\epsilon]^{-1} + \text{置换} \\ & = \sum_{r=1}^N \left[p \cdot \left(\sum_{s=1}^N q_s \right) - i\eta\epsilon \right]^{-1} \prod_{s \neq r} [p \cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1} \\ & = \sum_{r=1}^N \left[p \cdot \left(\sum_{s=1}^N q_s \right) - i\eta\epsilon \right]^{-1} [p \cdot q_r - i\eta\epsilon] \prod_{s=1}^N [p \cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1} = \prod_{s=1}^N [p \cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1}, \end{aligned}$$

这正是所要证明的.

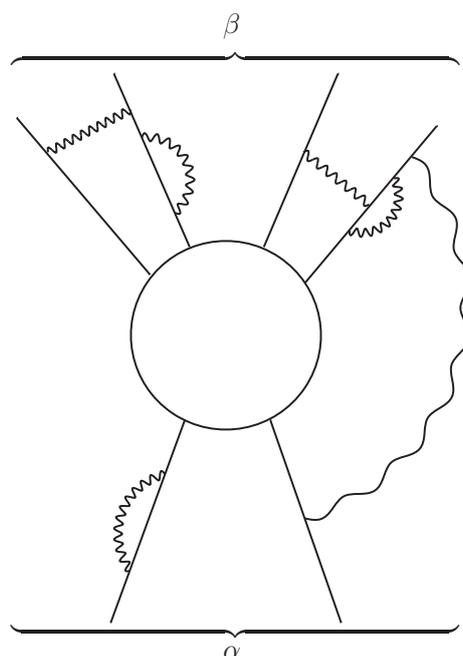


图 13.3 虚软光子对反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 的 S -矩阵的辐射修正的典型主导图. 直线是态 α 和 β 中的粒子(包括硬光子); 波浪线是软光子.

因子之积给出, 而对于每一光子都有一个这样的因子:

$$M_{\beta\alpha}^{\mu_1 \cdots \mu_N}(q_1 \cdots q_N) \rightarrow M_{\beta\alpha} \prod_{r=1}^N \left(\sum_n \frac{\eta_n \epsilon_n p_n^{\mu_r}}{p_n \cdot q_r - i\eta_n \epsilon} \right). \quad (13.1.8)$$

13.2 虚软光子

我们现在要用上一节的结果去计算过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的两个带电粒子线之间交换虚软光子对所有阶辐射修正的影响, 如图 13.3 所示. 对于“软”光子, 我们是指所携带动量远小于 Λ 的光子, 其中 Λ 是低能选择的某个适当的分界点, 用来表明上一节所做近似有效. 我们将看到这些软光子引入了红外发散, 所以, 作为权宜之计, 我们不得不对光子动量引入下界 λ . 辨认出软光子动量上的两个限制的差异非常重要. 上界 Λ 仅用来定义软光子的“软”指什么; 软光子辐射修正的 Λ 相关性被振幅其余部分的 Λ -相关性抵消了, 计算这个 Λ -相关性仅需引入动量远大于 Λ 的虚光子. 另一方面, 下界截断最终必须通过取 $\lambda \rightarrow 0$ 移除掉; 正如我们将看到的, 这一极限下的红外发散将被发射实软光子的效应抵消.

对于每一个虚软光子, 我们都必须补充一个传播子因子

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\mu'}}{q^2 - i\epsilon}, \quad (13.2.1)$$

然后给振幅(13.1.8)乘上这些传播子之积, 收缩掉光子极化指标, 并积掉光子 4-动量. 额外的, 对于 N 个虚软光子, 我们必须除以因子 $2^N N!$, 这是因为对虚光子线所有可以连接的两个末端处进行求和引入了对 $N!$ 个光子线置换的重复求和和对这些线的两端交换的重复求和. 那么, 包括 N 个软

光子的辐射修正效应就是给当过程不带这样的辐射修正时的矩阵元 $M_{\beta\alpha}$ 乘以因子

$$\frac{1}{N!2^N} \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{nm} e_n e_m \eta_n \eta_m J_{nm} \right]^N, \quad (13.2.2)$$

其中

$$J_{nm} \equiv -i(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^4 q}{[q^2 - i\epsilon][p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon][p_m \cdot q - i\eta_m \epsilon]}. \quad (13.2.3)$$

要注意的是, 我们改变了(13.2.3)分母中 $p_m \cdot q$ 的符号, 这是因为如果我们定义 q 为线 n 发射的动量, 那么 $-q$ 就是线 m 发射的动量.

对 N 求和, 我们得出结论, 当过程包含任意个动量 $|\mathbf{q}| \geq \lambda$ 的软光子所引起的辐射修正时, 它的矩阵元给定为

$$M_{\beta\alpha}^\lambda = M_{\beta\alpha}^\Lambda \exp \left[\frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{nm} e_n e_m \eta_n \eta_m J_{nm} \right], \quad (13.2.4)$$

其中 $M_{\beta\alpha}^\Lambda$ 是仅包含动量远大于 Λ 的虚光子时的振幅.

(13.2.3)中对 q^0 的积分可以通过留数法积掉. 被积函数除了在4个极点外对 q^0 是解析的, 这四个极点在

$$\begin{aligned} q^0 &= |\mathbf{q}| - i\epsilon, & q^0 &= -|\mathbf{q}| + i\epsilon, \\ q^0 &= \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n \epsilon, & q^0 &= \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m \epsilon, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{v}_n \equiv \mathbf{p}_n/p_n^0$, 对 \mathbf{v}_m 同样如此. 如果粒子 n 是出射的而粒子 m 是入射的, 那么 $\eta_n = +1$, $\eta_m = -1$, 所以通过在上半平面闭合 q^0 围道, 我们避开极点在 $q^0 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n \epsilon$ 或 $q^0 = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m \epsilon$ 处的贡献. 类似的, 如果 n 是入射的而 m 是出射的, 我们可以通过在下半平面闭合围道来避开这两个极点. 在这两种情况中, $q^0 = \pm(|\mathbf{q}| - i\epsilon)$ 处的极点只有一个有贡献, 并且我们得到纯实的积分

$$\begin{aligned} J_{nm} &= -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} \\ &\quad (\text{对于 } \eta_n = -\eta_m = \pm 1). \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

另一方面, 如果粒子 n 和 m 都是出射的或都是入射的, 那么 $\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n \epsilon$ 和 $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m \epsilon$ 处的极点出来实 q^0 -轴的两侧, 无论以何种方式闭合围道, 我们都无法避开来自其中一个的贡献:

$$\begin{aligned} J_{nm} &= -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} \\ &\quad - \frac{4i\pi^3}{\beta_{nm}} \ln \left(\frac{\Lambda}{\lambda} \right) \quad (\text{对于 } \eta_n = \eta_m = \pm 1), \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

其中 β_{nm} 是粒子 n 和 m 在其中一个粒子的静系中的相对速度:

$$\beta_{nm} \equiv \sqrt{1 - \frac{m_n^2 m_m^2}{(p_n \cdot p_m)^2}}. \quad (13.2.7)$$

方程(13.2.6)中的虚项导致了方程(13.2.4)中一个红外发散的相因子,⁴ 这个相因子在我们取矩阵元的绝对值以计算反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率时会被扔掉. (这个无限大的相因子是非相对论Coulomb散

射著名特征相应的相对论版, 即Schrödinger波函数的出射波部分对径向坐标 r 的依赖关系的形式是 $\exp(ipr - i\nu \ln r)/r$ 而不是 $\exp(ipr)/r$, 其中 ν 是电荷乘积除以相对速度.⁵⁾ 影响反应速率的是 J_{nm} 的实部, 其对于所有的 η_n 和 η_m 取值

$$\operatorname{Re} J_{mn} = -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)}. \quad (13.2.8)$$

一个基础的计算给出

$$\operatorname{Re} J_{mn} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln \left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right) \ln \left(\frac{\Lambda}{\lambda} \right). \quad (13.2.9)$$

在方程(13.2.4)的绝对值平方中使用该式就给出了虚软光子对于反应 $\Gamma_{\beta\alpha}$ 速率的影响

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda, \quad (13.2.10)$$

其中 $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ 和 $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda$ 分别是反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 仅包含动量大于 λ 或 Λ 的软光子辐射修正时的速率, A 是指数

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln \left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right). \quad (13.2.11)$$

要注意的是, 既然方程(13.2.10)中的两个速率分别只依赖于 λ 和 Λ , 而修正因子 $(\lambda/\Lambda)^A$ 已经表现为 λ 的函数对 Λ 的同一函数的比值, 上式显然是合理的.

指数 A 总是正的. 例如, 在单个粒子被一个中性粒子或外势散射时, 当 n 和 m 都是初态带电粒子或末态带电粒子时(在这一情况下, $\eta_n \eta_m = +1$ 而 $\beta_{nm} = 0$), 或者 n 是初态或末态带电粒子而 m 是另一态中的粒子时(在这一情况下, $\eta_n \eta_m = -1$ 而 $\beta_{nm} = \beta$, 其中 $1 > \beta > 0$), 我们都必须在方程(13.2.11)中加项. 这给出

$$A = -\frac{e^2}{8\pi^2} \left[4 - \frac{2}{\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right],$$

这对于所有的 $1 > \beta > 0$ 都是正的. 因为 A 是正的, 在对所有阶求和后, 虚软光子所引入的红外发散效应就变成使得任意给定的带电粒子反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率在极限 $\lambda \rightarrow 0$ 下为零.

* * *

在我们继续考察实软光子发射是如何抵消这些红外发散之前, 我们应该暂停一下, 指出之上计算中的一个技巧, 就我所知, 这个技巧总被文献忽略了. 在计算这些辐射修正时, 我们既引入了虚光子被同一带电粒子外线吸收并发射的图, 也引入了那些虚光子被不同的线吸收和发射的图. 然而, 我们在第10章已经知道, 在计算 S -矩阵时, 我们不应该引入在外线中插入自能子图所产生的辐射修正. 这似乎表明我们应该扔掉方程(13.2.11)中 $n = m$ 的项, 但是, 如果这样的话, 我们在下一节会发现红外发散的抵消将是不完整的.

解决这一问题要注意到, 虚软光子不仅直接产生红外发散, 而且通过它们对带电粒子场的重整化常数 Z_n 的效应产生红外发散. (在含有单个自旋 $\frac{1}{2}$ 的带电场的理论中, 例如量子电动力学, 重整化常数 Z_n 就是被写成 Z_2 的那个.) 正是正比于 $Z_n - 1$ 的抵消项抵消了外线中辐射修正的效应. 确切一些, 种类为 n 的带电粒子的重整化场是因子 $Z_n^{-1/2}$ 乘以非重整化场, 所以当我们用重整化场(对应于省略了外线中的辐射修正)计算 S -矩阵时, 我们引入了一个额外的因子 $\prod_n Z_n^{-1/2}$, 该乘积取遍初

态和末态中的所有带电粒子。(当然,对于中性粒子也存在因子 $Z_n^{-1/2}$,但这些不是红外发散的。)以一种稍微不同的记法,这个因子是

$$\prod_f Z_f^{-E_f/2},$$

其中 Z_f 是 f 种场的场重整化, E_f 是 f 种外线的数目,而乘积现在取遍所有的带电种类。然而,这些场重整化常数也出现在图的内部;将包含 N_{if} 个 f 类带电粒子场的 i 类相互作用表示成重整化场的形式会引入红外发散因子

$$\prod_f (Z_f)^{N_{if}/2}.$$

(例如,方程(11.1.9)中的抵消项 $-ie(Z_2 - 1)A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 与普通的电磁相互作用 $-ieA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 合起来产生在总的相互作用 $-iZ_2 e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$. 该 Z_2 因子中的红外发散正是方程(11.3.24)括号中的第二项以及方程(??)中的最后一项产生红外发散的原因。)在重整化场的传播子中也存在红外发散;对于 f 种重整化带电场的传播子,当其以非重整化场传播子的形式表示时,会引入因子 Z_f^{-1} . 将这些放到一起,对于每一 f 种带电场,由相互作用的抵消项以及对外线和内线的辐射修正引入的因子 Z_f ,其总数是

$$\frac{1}{2} \sum_i V_i N_{if} - I_f - \frac{1}{2} E_f,$$

其中 I_f 和 E_f 是 f 种内线和 f 种外线的数目, V_i 是 i 类相互作用顶点的数目。在6.3节我们已经注意到这个量对于每个 f 为零。因此,抵消外线上的辐射修正的抵消项,其本身被产生于内线和顶点的 Z_f 因子抵消了。因此方程(13.2.11)现在的样子,即包含了 $n = m$ 的项,是正确的。

13.3 实软光子; 发散的抵消

要解决上一节所遇到的红外发散问题要注意到这样的事实,即测量包含数目确定的光子和带电粒子的反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率 $\Gamma_{\beta\alpha}$ 是不大可能的,这是因为能量非常低的光子总可以逃脱探测。对于这样的反应可以测量的是速率 $\Gamma_{\beta\alpha}(E, E_T)$,即未观测到的光子能量小于某个小量 E ,并且无论未观测光子的数目是多少,它们所获得的能量小于某个很小的总能量 E_T 。(显然, $E < E_T$. 在没有软光子探测器的实验中,我们可以通过测量 α 和 β 中“硬”粒子的能量给软光子获得的能量施加一个限制 E_T ,在这一情况下我们就令 $E = E_T$.) 我们现在转向这一速率的计算。

在反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射 N 个实软光子的 S -矩阵是通过振幅(13.1.8)上的 N 个光子极化指标 μ_1, μ_2, \dots 与合适的系数函数

$$\frac{\epsilon_\mu^*(\mathbf{q}, h)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\mathbf{q}|}}$$

进行收缩获得的,其中 \mathbf{q} 是光子动量, $h = \pm 1$ 是螺度,而 ϵ^μ 是相对应的光子极化“矢量”。* 这给出光子发射矩阵元(δ -函数省略掉的 S -矩阵元)

$$M_{\beta\alpha}^\lambda(\mathbf{q}_1, h_1, \mathbf{q}_2, h_2, \dots) = M_{\beta\alpha}^\lambda \times \prod_{r=1}^N (2\pi)^{-3/2} (2|\mathbf{q}_r|)^{-1/2} \sum_n \frac{\eta_n e_n [p_n \cdot \epsilon^*(\mathbf{q}_r, h_r)]}{p_n \cdot q_r}. \quad (13.3.1)$$

*对于光子极化矢量我们使用 ϵ^μ 而非 e^μ ,是为了避免与电荷的 e_n 引起混淆。

(下标 λ 是提醒我们这些振幅是在虚光子动量上有红外截断 λ 的情况下计算的. 最后我们会取 $\lambda \rightarrow 0$. 根据13.1节所讨论的因式分解, 虚光子的出现并不会干扰结果(13.3.1).) 对该矩阵元取平方, 对螺度求和, 并乘以 $\prod_r d^3 q_r$, 就给出了发射 N 个软光子到动量空间体积元 $\prod_r d^3 q_r$ 的微分速率. 从方程(8.5.7)中我们回忆起, 对于 $q^2 = 0$, 螺度求和后的形式为

$$\sum_{h=\pm 1} \epsilon_\mu(\mathbf{q}, h) \epsilon_\nu^*(\mathbf{q}, h) = \eta_{\mu\nu} + q_\mu c_\nu + q_\nu c_\mu, \quad (13.3.2)$$

其中 $\mathbf{c} \equiv -\mathbf{q}/2|\mathbf{q}|^2$ 且 $c^0 \equiv 1/2|\mathbf{q}|$. 电荷守恒条件 $\sum_n \eta_n e_n = 0$ 允许我们扔掉方程(13.3.2)中包含 q_μ 或 q_ν 的项, 给出微分速率**

$$d\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \prod_{r=1}^N \frac{d^3 q_r}{(2\pi)^3 (2|\mathbf{q}_r|)} \sum_{nm} \frac{\eta_n \eta_m e_n e_m (p_n \cdot p_m)}{(p_n \cdot q_r)(p_m \cdot q_r)}. \quad (13.3.3)$$

为了计算发射 N 个能量明确为 $\omega_r \equiv |\mathbf{q}_r|$ 的软光子的微分速率, 我们必须要做方程(13.3.3)对光子动量 \mathbf{q}_r 方向的积分. 这些积分与我们在积分(13.2.8)中遇到的是相同的,

$$-\pi(p_n \cdot p_m) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{q}}}{(E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln \left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right). \quad (13.3.4)$$

因此, 方程(13.3.3)对光子方向积分给出能量为 $\omega_1, \dots, \omega_N$ 的光子的微分速率:

$$d\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(\omega_1 \dots \omega_N) = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda A(\alpha \rightarrow \beta)^N \frac{d\omega_1}{\omega_1} \dots \frac{d\omega_N}{\omega_N}, \quad (13.3.5)$$

其中 $A(\alpha \rightarrow \beta)$ 是上一节遇到的同一常数:

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln \left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right).$$

我们从方程(13.3.5)中看到, 对发射光子能量的非约束积分将引入另一个红外发散. 然而, 么正性要求, 如果我们对虚光子动量施加红外截断(正如下标 λ 所表明的), 那么我们对实光子必须使用同一截断. 为了计算任意一个未观测光子所获能量不大于 E 而任意多个未观测光子所获能量之和不大于 E_T 的反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率 $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ (其中 E 和 E_T 选的足够小使得用来导出方程(13.3.1)的近似是合理的), 我们必须做方程(13.3.5)对所有光子能量的积分, 附加限制 $E \geq \omega_r \geq \lambda$ 和 $\sum_r \omega_r \leq E_T$, 然后, 由于该积分包含的构型仅相差 N 个软光子的置换, 所以除以 $N!$, 最后对 N 求和. 这给出

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(E, E_T) = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A(\alpha \rightarrow \beta)^N}{N!} \int_{E \geq \omega_r \geq \lambda, \sum_r \omega_r \leq E_T} \prod_{r=1}^N \frac{d\omega_r}{\omega_r}. \quad (13.3.6)$$

若不是有约束 $\sum_r \omega_r \leq E_T$, 该积分可以因式分解成 N 个对单个 ω_r 的积分之积. 约束可以作为一个因子通过在被积函数中引入一个阶跃函数

$$\theta(E_T - \sum_r \omega_r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin E_T u}{u} \exp \left(iu \sum_r \omega_r \right) \quad (13.3.7)$$

** $|\mathbf{q}| d\Gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{q})/\Gamma_{\beta\alpha}$ 在 $N=1$ 时的结果对应于一个离散变化的流密度4-矢 $J^\mu(x) = \sum_n^{(t)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}_n t) p_n^\mu e_n / E_n$ 经典地发射的能量分布, 其中求和在 $t < 0$ 时取遍初态中的粒子而在 $t > 0$ 时取遍末态中的粒子.

进行实现. 这样方程(13.3.6)就变成

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(E, E_T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin E_T u}{u} \exp\left(A(\alpha \rightarrow \beta) \int_{\lambda}^E \frac{d\omega}{\omega} e^{i\omega u}\right) \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}. \quad (13.3.8)$$

在极限 $\lambda \ll E$ 下, 通过将指数中的积分写成对 $(e^{i\omega u} - 1)/\omega$ 与 $1/\omega$ 的积分之和就可以积掉它, 其中在对 $(e^{i\omega u} - 1)/\omega$ 的积分中我们可以令 $\lambda = 0$, 而对 $1/\omega$ 的积分是平庸的. 重整调整 u 和 ω 变量, 对于 $\lambda \ll E$, 这给出:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(E, E_T) \rightarrow \mathcal{F}\left(E/E_T; A(\alpha \rightarrow \beta)\right) \left(\frac{E}{\lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}, \quad (13.3.9)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x; A) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin u}{u} \exp\left(A \int_0^x \frac{d\omega}{\omega} (e^{i\omega u} - 1)\right) \\ &= 1 - \frac{A^2 \theta(x - \frac{1}{2})}{2} \int_{1-x}^x \frac{d\omega}{\omega} \ln\left(\frac{x}{1-\omega}\right) + \dots \end{aligned} \quad (13.3.10)$$

对于同一阶的 E 和 E_T 且 $A \ll 1$ 时, 方程(13.3.9)中的因子 $\mathcal{F}(E/E_T; A)$ 接近于 1; 例如,

$$\mathcal{F}(1; A) \simeq 1 - \frac{1}{12} \pi^2 A^2 + \dots$$

因为 $A(\alpha \rightarrow \beta) > 0$, 方程(13.3.9)中的因子 $(E/\lambda)^{A(\alpha \rightarrow \beta)}$ 在极限 $\lambda \rightarrow 0$ 下变成无限大. 然而, 方程(13.2.10)表明在这一极限下速率 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}$ 为零:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^{\Lambda}.$$

在方程(13.3.9)中使用该式表明, 在极限 $\lambda \ll E$ 下, 红外截断 λ 被扔掉了:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(E, E_T) \rightarrow \mathcal{F}\left(E/E_T; A(\alpha \rightarrow \beta)\right) \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^{\Lambda}. \quad (13.3.11)$$

我们要提醒读者的是能量 Λ 仅是“软”光子和“硬”光子之间一个方便的分界点, 其中我们在方程(13.3.11)中明确地考虑了软光子而硬光子的效应埋藏在 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\Lambda}$ 中. 由于 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\Lambda} \propto \Lambda^A$, 所以方程(13.3.11)的右边是独立于 Λ . 然而, 在耦合常数较小的理论中, 例如量子电动力学, 相较于碰撞所涉及的特征能量 W , 将 Λ 取得充分小使得这里所做的近似适用于能量远小于 Λ 的光子, 但有足够大使得 $A(\alpha \rightarrow \beta) \ln(W/\Lambda) \ll 1$, 这种做法通常是一个很好的策略. 然后, 在最低阶微扰论下计算 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\Lambda}$ 会是一个很好的近似, 其中 $E \ll \Lambda$ 的主要辐射修正由方程(13.3.11)中的因子 $(E/\Lambda)^A$ 给出.

* * *

软引力子会有相同的红外发散计算.³ 任意反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 的速率, 在软引力子所获能量小于 E 时, 表现为正比于 E^B , 其中

$$B = \frac{G}{2\pi} \sum_{nm} \eta_n \eta_m m_n m_m \frac{1 + \beta_{nm}^2}{\beta_{nm} \sqrt{1 - \beta_{nm}^2}} \ln\left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}}\right). \quad (13.3.12)$$

13.4 一般的红外发散

迄今为止, 我们在本章中所考察的由软光子引起的红外发散, 仅是在不同物理理论中会遇到的各种红外发散的一个例子. 另一个例子是有无质量带电粒子的量子电动力学提供的. 这里, 即使软光子引起的红外发散抵消后, 我们在方程(13.3.11)的 A 中发现了 \ln 对数发散. 根据方程(13.2.11)和(13.2.7), 对于所有带电粒子都是电子的反应, 在极限 $m_e \rightarrow 0$ 下, 指数趋于

$$A \rightarrow -\frac{1}{4\pi^2} \sum_n e_n^2 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \neq m} e_n e_m \eta_n \eta_m \ln \left(\frac{2|p_n \cdot p_m|}{m_e^2} \right) \rightarrow -\frac{\ln m_e}{2\pi^2} \sum_n e_n^2 .$$

(在最后一步中我们使用了电荷守恒条件 $\sum_n e_n \eta_n = 0$.) 这个公式中的红外发散源于以平行于初末态中某个“硬”电子动量方向发射的软光子, 并且, 即使光子同电子一样是不软的, 这也会发生, 因为如果 \mathbf{p}_n 平行于 \mathbf{q} , 那么传播子分母 $(p_n \pm q)^2$ 对于 $p_n^2 = q^2 = 0$ 为零. 更精确一点, 对于 $p_n^2 = q^2 = 0$, 这一因子*对光子方向的积分采取形式

$$\int d^2 \hat{q} (p \pm q)^{-2} = \mp \frac{\pi}{\sqrt{\mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2}} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{1 - \cos \theta} ,$$

其中 θ 是光子动量与带电粒子动量之间的夹角. 这个积分在 $\theta = 0$ 处对数发散.

当然, 在真实世界中不存在无质量的带电粒子, 但是在标量积 $|p_n \cdot p_m|$ 的特征值 E^2 远大于 m_e^2 的反应中, 令人感兴趣的是找到大的 $\ln(m_e/E)$ 因子出现的地方. 在这一情况下, 主导的辐射修正通常由 A 中的 $-\ln(m_e/E) \sum_n e_n^2 / 2\pi^2$ 项给出. 更重要的是, 量子色动力学中存在无质量粒子——胶子, 胶子携带类似于电荷的守恒量子数, 该量子数称为色荷, 这使得从初末态中的硬胶子或其它带色粒子发射的平行硬胶子产生了红外发散.

一般而言, 这些红外发散无法通过对末态恰当组合的求和消除掉. 然而, 李政道和Nauenberg(诺恩堡)⁶业已指出, 如果我们不仅对恰当的末态进行求和, 并且假定初态也有特定的几率分布, 那么就可以使这个红外发散抵消掉. 下面给出的是他们的讨论的修正版, 这个版本会使得我们立刻清楚为什么在有质量带电粒子的电动力学的情况下, 仅对末态求和就是足够的.

由于这些原因, 回到“旧形式”微扰论是比较方便的, 在这个理论中, S -矩阵由方程(3.2.7)和方程(3.5.3)给出

$$S_{ba} = \delta(b - a) - 2i\pi \delta(E_a - E_b) T_{ba} , \quad (13.4.1)$$

其中

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int dc_1 \cdots dc_\nu \frac{V_{bc_1} V_{c_1 c_2} \cdots V_{c_\nu a}}{(E_a - E_{c_1} + i\epsilon) \cdots (E_a - E_{c_\nu} + i\epsilon)} . \quad (13.4.2)$$

(对 $c_1 \cdots c_\nu$ 的积分应该理解成对这些态中的粒子种类和自旋的求和, 再加上对这些粒子的3-动量的积分.) 红外发散产生于(且仅产生于)这一表达式中一个或多个能量分母为零.

然而, 不是所有为零的能量分母都产生红外发散. 一个一般的中间态 c 可能有 $E_c = E_a$, 但通常这只是积分区域内部的一个点, 并且对该区域的积分凭借分母中的 $i\epsilon$ 暗含的处理变得收敛. 为了使中间态 c 产生红外发散, 必须要让能量 $E_c = E_a$ 达到积分区域的端点. 例如, 如果方程(13.4.2)中的第一个中间态 c_1 由初态 α 中的粒子构成, 而这一态中的任意无质量粒子都替换成喷注(*jets*), 这

*这个因子不是平方的, 因为发散仅发生两个项的干涉之间, 其中一个是在 S -矩阵元中的这一项, 而另一个是光子从某个其它的 $m \neq n$ 的带电粒子线上发射的 S -矩阵元中的项. 对于 $m = n$, 积分(13.2.8)正比于 m_n^2 .

就会发生, 其中喷注由任意多个近平行的无质量粒子构成, 这些粒子的总动量等于要替换它们的喷注的动量. 在这一情况下, 处在 $E_{c_1} = E_a$ 的端点是动量空间中每一喷注中的所有无质量粒子都平行的那一点. 更一般地, 在态 a 中, 我们可以将任意多个无质量粒子替换成近平行无质量粒子的喷注, 再加上任意多个额外的无质量的软粒子. 称所有这样态的几何为 $D(a)$ (更精确些, 我们需要引入一个小角度 Θ 和一个小能量 Λ 以定义“近平行”和“软”分别指什么. 我们不会费心去表明集合 $D(a)$ 对 Θ 和 Λ 的依赖关系.) $D(a)$ 中的态是“危险”的, 也就是说, 能量分母 $E_a - E_{c_1}$ 在端点处为零会引入一个红外发散; 在 $E_{c_1} = E_a$ 处的端点是每一个喷注中的所有无质量粒子都平行的点, 并且所有无质量的软粒子的能量为零.

更近一步, 如果 c_1, \dots, c_n 中的每一个都在集合 $D(a)$ 中, 那么 $D(a)$ 中的中间态 c_{n+1} 在同样的意义下也是危险的. 另一方面, 如果某个态 c_m 不在 $D(a)$ 中, 那么后面 $k > m$ 的态 c_k , 即使它属于集合 $D(a)$, 它也不是危险的, 这是因为, 如果硬粒子或喷注的 3-动量等于态 a 中的那些粒子, 那么它们的构型就只是积分区域内普通的一点. 以精确相同的方式, 我们可以定义集合 $D(b)$, 在该集合中, 态 b 中的一个或多个无质量粒子被近平行无质量粒子的喷注所替换, 而每个喷注的动量与它所替换粒子的总动量相等, 并且我们可以增添任意多个无质量的软粒子. 中间态 c_m , 如果它属于集合 $D(b)$, 并且后面 $k > m$ 的态 c_k 都属于 $D(b)$, 那么它就是危险的.

为了分离出这些危险态的效应, 我们将方程 (13.4.2) 重写成以下形式

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(V \left[\frac{\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{\notin a,b}}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^{\nu} \right)_{ba}, \quad (13.4.3)$$

其中 \mathcal{P}_a , \mathcal{P}_b 和 $\mathcal{P}_{\notin a,b}$ 分别是到 $D(a)$, $D(b)$ 和所有其它态上的投影算符. (在这里我们假定了, 态 b 和态 a 中的同一粒子, 它们的动量不会非常接近, 使得 $D(a)$ 和 $D(b)$ 不会重叠.) 现在, 在 $\Lambda \rightarrow 0$ 且 $\Theta \rightarrow 0$ 时, 危险的中间态所占据的相空间非常小, 这使得无论它们在那里引起了红外发散, 这些发散都可以被忽视掉. 因此, 幂级数 (13.4.3) 变成

$$T_{ba} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left[V \frac{\mathcal{P}_b}{E_a - H_0 + i\epsilon} \right]^r V \left[\frac{\mathcal{P}_{\notin a,b}}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^{\nu} \times \left[\frac{\mathcal{P}_a}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^s \right)_{ba}. \quad (13.4.4)$$

如果最左边和最右边之间的投影算符 $\mathcal{P}_{\notin a,b}$ 都换成 $\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{\notin a,b}$, 并且左边和右边的 \mathcal{P}_b 和 \mathcal{P}_a 换成了 $\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_a$, 这就是精确的, 但正如上面所评述的, 当 Λ 和 Θ 充分小的时候, 其在最终结果上的效应可以忽略掉.

方程 (13.4.4) 可以写成更紧凑的形式:

$$T_{ba} = \left(\Omega_b^{-\dagger} T_S \Omega_a^+ \right)_{ba}, \quad (13.4.5)$$

其中, 为了将来的使用方便, 对于一般的态 α 和 β , 我们定义 Ω_{α}^+ 和 Ω_{β}^- 为:

$$\left(\Omega_{\alpha}^+ \right)_{ca} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathcal{P}_{\alpha}}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^r \right)_{ca}, \quad (13.4.6)$$

$$\left(\Omega_{\beta}^- \right)_{db} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathcal{P}_{\beta}}{E_b - H_0 - i\epsilon} V \right]^r \right)_{db}, \quad (13.4.7)$$

T_S 是“安全”算符**

$$(T_S)_{dc} \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(V \left[\frac{\mathcal{P}_{\not{c},d}}{E_c - H_0 + i\epsilon} V \right]^\nu \right)_{dc} . \quad (13.4.8)$$

现在, 所有红外发射都分离到两个算符 Ω_b^- 和 Ω_a^+ 中.

为了消除这些红外发散, 现在只需要注意到, 若非危险态上的投影算符, 那么根据方程(3.1.16), 算符 Ω_b^- 和 Ω_a^+ 就分别是将自由粒子态转化到“出”态和“入”态的么正算符. 因此, 对于某个给定的末态 β 和某个给定的初态 α , 如果将这些算符限制在态的子空间 $D(\beta)$ 和 $D(\alpha)$ 上, 即态在这些子空间中是危险的, 那么这些算符就是么正的. 即, 对于一般的 α 和 β

$$\Omega_b^- \mathcal{P}_\beta \Omega_b^{-\dagger} = \mathcal{P}_\beta , \quad (13.4.9)$$

$$\Omega_a^+ \mathcal{P}_\alpha \Omega_a^{+\dagger} = \mathcal{P}_\alpha . \quad (13.4.10)$$

因此, 对于任意给定的末态和初态 β 和 α , 如果对态在其中是危险的子空间进行求和, 那么跃迁速率与红外发散无关:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in D(\alpha)} \sum_{b \in D(\beta)} |T_{ba}|^2 &= \text{Tr} \left\{ \Omega_b^- \mathcal{P}_\beta \Omega_b^{-\dagger} T_S \Omega_a^+ \mathcal{P}_\alpha \Omega_a^{+\dagger} T_S^\dagger \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \mathcal{P}_\beta T_S \mathcal{P}_\alpha T_S^\dagger \right\} = \sum_{a \in D(\alpha)} \sum_{b \in D(\beta)} |(T_S)_{ba}|^2 . \end{aligned} \quad (13.4.11)$$

为了弄清楚这确实解决了红外发散的一般问题, 有必要说明一下只有类似方程(13.4.11)中那样的求和才是实验上可测的. 既然实验上不可能将出射带电(或带色)无质量粒子与动量近平行且总能量相同⁷的无质量粒子的喷注区分开, 为了获得可测的跃迁速率, 我们貌似应该对附加任意多个非常软的量子的危险末态求和, 而所有这些态有着相同的总电荷(或色荷). 对初态的求和更加有问题. 我们可以假定真实的无质量粒子总是作为伴随着软量子系综的喷注产生, 其中软量子的系综是某个动量空间体积中的平均. 然而, 据我所知, 没有人能够给出一个完整的证明来证明与红外发散无关的跃迁速率的和就是实验上可测的那个.

(有质量带电粒子的)量子电动力学中不会产生这样的问题, 正如我们已看到的, 为了消除量子电动力学中的红外发散, 只需要对末态求和. 这一差异的原因可以追溯到电动力学中的如下性质: 在电动力学中, 态 $a, b, c \dots$ 是带电粒子数以及硬光子数确定的态(用希腊字母标记)的直积, 再乘以仅包含能量小于某个小量 Λ 的软光子的态. 那么, 对于在反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 中的带电粒子与硬光子之间产生了软光子的某个集合 f 的反应, 方程(13.4.5)简化为

$$T_{\beta f, \alpha} = \left(\Omega^-(\beta)^\dagger \Omega^+(\alpha) \right)_{f0} (T_S)_{\beta\alpha} , \quad (13.4.12)$$

其中0代表软光子真空, 而 Ω^\pm 像之前那样计算, 不过现在处在仅有软光子构成的退化Hilbert空间中, 并且这些光子的相互作用取为相互作用哈密顿量, 其中该哈密顿量中的所有的带电粒子都处在由变量 β 和 α 所标志的固定态中. 正如之前一样, 这些算符在软光子的“危险”Hilbert空间 \mathcal{D} 中是

**在 $(\Omega_b^-)_{ab}$ 中, 我们使用了 T_{ba} 是在 $E_b = E_a$ 下进行计算的性质, 而在 $(T_S)_{dc}$ 中, 我们使用的性质是: 除非 E_c 非常接近 E_a , 否则投影算符 \mathcal{P}_a 会使得 $(\Omega_a^+)_{ca}$ 为零. 另外, 方程(13.4.5)中的因子 $\Omega_b^{-\dagger}$ 和 Ω_a^+ 使得 $\mathcal{P}_{\not{c},d} = \mathcal{P}_{\not{c},a,b}$.

么正的, 所以,[†] 无需对初态求和, 我们就有

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{D}} |T_{\beta f, \alpha 0}|^2 &= |(T_S)_{\beta \alpha}|^2 \left(\Omega^+(\alpha)^\dagger \Omega^-(\beta) \Omega^-(\beta)^\dagger \Omega^+(\alpha) \right)_{00} \\ &= |(T_S)_{\beta \alpha}|^2 \left(\Omega^+(\alpha)^\dagger \Omega^+(\alpha) \right)_{00} = |(T_S)_{\beta \alpha}|^2. \end{aligned} \quad (13.4.13)$$

13.5 软光子散射*

在本章我们对软光子相互作用的处理中, 迄今为止在我们所考虑的反应中, 软光子在反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 中被发射或吸收, 而该反应总会发生. 关于反应, 亦有可能做一个有用的推广陈述, 即在一个有趣反应的生成中, 反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 是平庸的, 而软光子扮演了重要的成分在这里, 我们将考虑这类反应最简单且最重要的例子, 软光子在任意种类且自旋任意的有质量粒子上的散射, 在这类反应中, α 和 β 是单粒子态. 在这里, 软光子散射振幅中的领头项并不来源于极点项, 而是来源于通过流守恒条件与极点项相关的非极点项, 这产生了困难.

光子散射的 S -矩阵元可以写成以下形式

$$\begin{aligned} S(q, \lambda; p, \sigma \rightarrow q', \lambda'; p', \sigma') &= i(2\pi)^4 \delta^4(q + p - q' - p') \\ &\quad \times \frac{\epsilon_\nu^*(\mathbf{q}', \lambda') \epsilon_\mu(\mathbf{q}, \lambda) M_{\sigma', \sigma}^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p})}{(2\pi)^6 \sqrt{4q^0 q'^0}}, \end{aligned} \quad (13.5.1)$$

其中 q 和 q' 是初态光子和末态光子的 4-动量, p 和 p' 是靶在初态和末态时的 4-动量, λ 和 λ' 是初末态光子的螺旋度, $\epsilon_\nu(\mathbf{q}', \lambda')$ 和 $\epsilon_\mu(\mathbf{q}, \lambda)$ 相对应的光子极化矢量, 而 σ 和 σ' 是靶在初态和末态时的自旋 z -分量. 根据 6.4 节的定理, 振幅 $M^{\nu\mu}$ 可以表示成

$$(2\pi)^{-3} M_{\sigma', \sigma}^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = \int d^4x e^{iq \cdot x} \left(\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, T \{ J^\nu(0), J^\mu(x) \} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) + \dots \quad (13.5.2)$$

其中 $J^\mu(x)$ 是电磁流, 而省略号代表可能的“海鸥”项, 例如带电标量场理论中的那些项, 在这些项中, 两个光子不与另外的流相互作用而是在单个顶点上相互作用. 我们现在重复在第 10 场描述且在 13.1 节使用过的标准定极讨论. 在方程 (13.5.2) 中的两个流算符之间插入中间态的完备集, 对 x 积分并分离出单粒子中间态, 这给出

$$\begin{aligned} M_{\sigma', \sigma}^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \frac{G^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p} + \mathbf{q}) G^\mu(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p})}{E(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{p}) - q^0 - i\epsilon} \\ &\quad + \frac{G^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}) G^\nu(\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{p})}{E(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) - E(\mathbf{p}') + q^0 - i\epsilon} + N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (13.5.3)$$

其中 G^μ 是流的单粒子矩阵元

$$(2\pi)^{-3} G_{\sigma', \sigma}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \equiv \left(\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) \quad (13.5.4)$$

而 $N^{\nu\mu}$ 表示除了单粒子态本身的态, 再加上任意的直接双光子相互作用项的贡献. (方程 (13.5.3) 按照矩阵乘法的意义理解, 其中自旋指标没有显式地写出来.) 对于 $N^{\nu\mu}$, 除了它在 $q^\mu \rightarrow 0$ 时不具有前两项所呈现的奇异项, 因而可以展成 q^μ 的幂级数之外, 我们知道的很少.

[†] 我们现在没有遇到任何方程 (13.3.11) 中那样的 $(E/\Lambda)^4$ 因子, 其原因是, 我们在这里将我们要求和的实软光子态中的最大能量 E 与在计算 Ω^\pm 时要求和的“危险”软光子态的最大能量 Λ 等同起来.

* 本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略.

我们现在使用流守恒(或规范不变)条件:

$$q_\mu M^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = 0, \quad (13.5.5)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}) = [E(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{p})]G^0(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (13.5.6)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}) = [E(\mathbf{p}') - E(\mathbf{p}' - \mathbf{q})]G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}). \quad (13.5.7)$$

应用于方程(13.5.3), 这些条件产生了我们所需要的 $N^{\nu\mu}$ 上的条件:

$$q_\mu N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = -G^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p} + \mathbf{q})G^0(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}) + G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q})G^\nu(\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (13.5.8)$$

我们又注意到 $M^{\nu\mu}$ 满足“交叉”对称性条件

$$M^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = M^{\mu\nu}(p' - p - q; \mathbf{p}', \mathbf{p}), \quad (13.5.9)$$

并且, 既然方程(13.5.3)中的极点项显然满足这一条件, 所以 $N^{\nu\mu}$ 也满足这一条件:

$$N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = N^{\mu\nu}(p' - p - q; \mathbf{p}', \mathbf{p}), \quad (13.5.10)$$

我们将用这些条件决定 $N^{\nu\mu}$ 的动量幂级数展开中的第一项.

首先关于流的单粒子矩阵元 $G^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ 对动量 \mathbf{p}' 和 \mathbf{p} 的幂级数展开, 我们需要说明一些事情. 空间反演不变性(就在它适用的程度上而言)告诉我们, G^0 和 G^i (其中 $i = 1, 2, 3$)的展开中分别只包含动量的偶数阶项和奇数阶项. 根据方程(10.6.3), $G_{\sigma', \sigma}^0$ 中动量的零阶项是 $e\delta_{\sigma', \sigma}$, 其中 e 是粒子电荷. 这样, 流守恒条件就告诉我们, 到动量的第二阶,

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{G}_{\sigma', \sigma}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \left(\frac{\mathbf{p}'^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) e\delta_{\sigma', \sigma}.$$

因此, \mathbf{G} 中动量的一阶项给定为 $e(\mathbf{p}' + \mathbf{p})\delta_{\sigma', \sigma}/2m$ 加上可能的垂直于 $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ 的一阶项, 而旋转不变性告诉我们这个垂直于 $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ 的一阶项必须正比于 $(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \mathbf{J}_{\sigma', \sigma}$, 其中 \mathbf{J} 是熟悉的带电粒子的自旋矩阵. 综合这些结果, 我们有展开

$$G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = e1 + \text{二次}, \quad (13.5.11)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{e1}{2m}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) + \frac{i\mu}{j}\mathbf{J} \times (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + \text{三次}, \quad (13.5.12)$$

其中“1”是单位自旋矩阵, 而“二次”和“三次”指代小动量 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}' 的幂级数展开中可忽略项的阶. 由于流是厄密的, 方程(13.5.12)中的系数 μ/j 是实的. 当系数以这种形式写出时(其中 j 是带电粒子的自旋), μ 就是粒子的磁矩.

现在, 我们回到 $N^{\nu\mu}$, 并考察方程(13.5.8)关于小动量 q^μ , \mathbf{p} 和 \mathbf{p}' 的幂级数展开. 在方程(13.5.8)中令 $\nu = 0$ 表明 $q_\mu N^{0\mu}$ 至少是这些小量的二次项. 不存在正比于 q^μ 的常矢量, 所以 $N^{0\mu}$ 至少必须是小动量的一阶项. 这样, 交叉对称性条件(13.5.10)就告诉我们, N^{i0} 也必须至少是小动量的一阶项. 然后, 在方程(13.5.8)中取 $\nu = i$ 并使用方程(13.5.12)告诉我们

$$q_k N^{ik} = -\frac{e^2 q^i}{m} + \text{二次}$$

以及随之的

$$N^{ik} = -\frac{e^2}{m}\delta_{ik} + \text{线性}. \quad (13.5.13)$$

既然 G^i 至少是小动量的一阶项, 那么方程(13.5.3)中 M^{ik} 的极点项也是如此, 在零阶, 这仅给我们留下非极点项 N^{ik} :

$$M^{ik}(0; 0, 0) = N^{ik}(0; 0, 0) = -\frac{e^2}{m} \delta_{ik} . \quad (13.5.14)$$

由此我们可以计算软光子散射截面. 但是没有进行这个计算的必要; 既然我们已经知道了, 在零动量极限下, 光子散射振幅仅依赖于靶粒子的质量和电荷, 并且关于电荷是二阶的. 我们可以立即使用光子对任意自旋给定的靶粒子的二阶散射截面的计算结果, 例如量子电动力学中我们对微分光子散射截面的结果(8.7.42):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta) . \quad (13.5.15)$$

我们现在可以看到这是一个通用公式, 在低能极限下对于质量为 m , 电荷为 e 且种类和自旋任意的靶粒子, 即使这些粒子是复合粒子且有强相互作用, 例如原子核, 这一公式依然适用. Gell-Mann, Goldberger 和 Low(洛)⁸ 已经证明了, 在软光子散射振幅中, 以靶粒子质量, 电荷和磁矩的形式可以将这些结果推广至领头阶的下一项.

13.6 外场近似*

重的带电粒子, 像原子核, 其作用近似地为经典外场的源, 这在直观上是很显然的. 在本节, 我们将看到如何证明这一近似是合理的, 并获得它自身局限性的一些概念.

考察这样的Feynman图或Feynman图的部分, 重带电粒子从初态到末态穿越该Feynman图并发射了 N 个不在壳的光子, 这 N 个光子的4-动量为 q_1, q_2, \dots, q_N 并携带极化指标 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$. 对所有这样的图或这样的子图(不包括那 N 个光子传播子)求和给出振幅

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_N e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots e^{-iq_N \cdot x_N} \\ & \times \langle \mathbf{p}', \sigma' | T \{ J^{\mu_1}(x_1), J^{\mu_2}(x_2), \dots, J^{\mu_N}(x_N) \} | \mathbf{p}, \sigma \rangle \\ & \equiv \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p) \end{aligned} \quad (13.6.1)$$

计算该矩阵元时纳入了重粒子可以参与的所有相互作用, 其中包括强核力. 该振幅在 $q_1, q_2, \dots, q_N \rightarrow 0$ 时有一高阶极点, 该高阶极点产生于流乘积矩阵元中的一项, 而在该矩阵元中, 中间态仅由初态和末态中的同一重粒子构成. 当 q_1, q_2, \dots, q_N 与(可能复合)重粒子的动力学相联系的所有能量和动

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略。

量相比很小时, 这一高阶极点将主导(13.6.1) 在这一情况下, 10.2节的方法给出**

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}(q_1, q_2, \cdots, q_N; p) &\rightarrow \frac{(-i)^{N-1}}{2p^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \\ &\times \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \cdots + q_N - p) \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{N-1}} \\ &\times \frac{\mathcal{G}_{\sigma', \sigma_1}^{\mu_1}(p) \mathcal{G}_{\sigma_1, \sigma_2}^{\mu_2}(p) \cdots \mathcal{G}_{\sigma_{N-1}, \sigma}^{\mu_N}(p)}{[2p \cdot q_1 - i\epsilon][2p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \cdots [2p \cdot (q_1 + \cdots + q_{N-1}) - i\epsilon]} \\ &+ \text{置换} \end{aligned} \quad (13.6.2)$$

其中

$$\frac{\mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu}(p)}{2p^0 (2\pi)^3} \equiv \langle \mathbf{p}, \sigma' | J^{\mu}(0) | \mathbf{p}, \sigma \rangle \quad (13.6.3)$$

而“+置换”代表我们要对 N 个光子的所有置换求和. 要应用到原子系统, 重要的是要意识到(13.6.1)适用于既有强相互作用又有电磁相互作用的任意自旋的粒子, 比如原子核.

我们又注意到, 对于自旋任意且电荷为 Ze 的粒子, 电流在等4-动量态之间的矩阵元是†

$$\langle p, \sigma' | J^{\mu}(0) | p, \sigma \rangle = \frac{Ze p^{\mu} \delta_{\sigma' \sigma}}{p^0 (2\pi)^3}, \quad (13.6.4)$$

这使得

$$\mathcal{G}_{\sigma' \sigma}^{\mu}(p) = 2Ze p^{\mu} \delta_{\sigma' \sigma}. \quad (13.6.5)$$

关于方程(13.6.5), 其中的关键是这些矩阵都是对易的, 所以它们的乘积可以从对置换的求和中因式分解出来:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}(q_1, q_2, \cdots, q_N; p) &\rightarrow \\ &\frac{(-i)^{N-1} (Ze)^N p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_N}}{p^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \cdots + q_N - p) \delta_{\sigma', \sigma} \\ &\times \left[\frac{1}{[p \cdot q_1 - i\epsilon][p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \cdots [p \cdot (q_1 + \cdots + q_{N-1}) - i\epsilon]} \right. \\ &\quad \left. + \text{置换} \right]. \end{aligned} \quad (13.6.6)$$

到 q 的领头阶, 这里的 δ -函数可以写成

$$\delta^4(p' + q_1 + \cdots + q_N - p) = p^0 \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \cdots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(p \cdot (q_1 + \cdots + q_N)). \quad (13.6.7)$$

**在微扰论中, 分母来源于传播子的分母:

$$(p' + q_1 + \cdots + q_r)^2 + m^2 - i\epsilon \rightarrow 2p' \cdot (q_1 + \cdots + q_r) - i\epsilon \rightarrow 2p \cdot (q_1 + \cdots + q_r) - i\epsilon,$$

而传播子的分子提供了因子 $\sum uu^\dagger$, 其与光子发射顶点矩阵一起产生了矩阵元(13.6.3). 矩阵 \mathcal{G}^μ 与上一节的矩阵 G^μ 相差因子 $2p^0$.

†证明该式最简单的方法是, 首先要注意到, 在粒子静止的Lorentz系中, 旋转不变性要求流矩阵元的空间分量为零而时间分量正比于 $\delta_{\sigma', \sigma}$, 并且对 σ 或 σ' 没有其它的相关性. 比例常数由方程(10.6.3)给出, 然后, Lorentz变换就给出了方程(13.6.4).

幸运地是, 在这里, 对置换求和后的结果比单个项要简单得多. 对于 $p \cdot (q_1 + \cdots + q_N) = 0$, 我们有

$$\left[\frac{1}{[p \cdot q_1 - i\epsilon][p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \cdots [p \cdot (q_1 + \cdots + q_{N-1}) - i\epsilon]} + \text{置换} \right] = (2i\pi)^{N-1} \delta(p \cdot q_1) \delta(p \cdot q_2) \cdots \delta(p \cdot q_{N-1}). \quad (13.6.8)$$

例如, 对于 $N = 2$, 这变成:

$$\frac{1}{[p \cdot q_1 - i\epsilon]} + \frac{1}{[p \cdot q_2 - i\epsilon]} = \frac{1}{[p \cdot q_1 - i\epsilon]} + \frac{1}{[-p \cdot q_1 - i\epsilon]} = 2i\pi \delta(p \cdot q_1).$$

获得一般结果(13.6.8)的最简单方法是作为如下等式的Fourier变换

$$\theta(\tau_1 - \tau_2) \theta(\tau_2 - \tau_3) \cdots \theta(\tau_{N-1} - \tau_N) + \text{置换} = 1.$$

将方程(13.6.8)代入方程(13.6.6), 这给出了振幅的最终结果(13.6.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}(q_1, q_2, \cdots, q_N; p) &\rightarrow (Ze)^N (2\pi)^N \delta_{\sigma', \sigma} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_N} \\ &\times \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \cdots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(p \cdot q_1) \delta(p \cdot q_2) \cdots \delta(p \cdot q_N). \end{aligned} \quad (13.6.9)$$

这一结果既适用于相对论性运动的重粒子也适用于缓慢运动的重粒子, 也可用来导出带电粒子散射的“Weizsäcker-Williams”(魏伯乐-威廉姆斯)近似.⁹ 在非相对论带电重粒子的特殊情况下, 即 $|\mathbf{p}| \ll p^0$, 方程(13.6.9)进一步简化成

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}(q_1, q_2, \cdots, q_N; p) &\rightarrow (Ze)^N (2\pi)^N n^{\mu_1} n^{\mu_2} \cdots n^{\mu_N} \\ &\times \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \cdots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(q_1^0) \delta(q_2^0) \cdots \delta(q_N^0) \delta_{\sigma', \sigma}, \end{aligned} \quad (13.6.10)$$

其中 n 是单位类时矢量

$$n^0 = 1, \quad \mathbf{n} = 0.$$

现在假定, 电荷为 Ze 的单个非相对论重粒子, 其动量空间归一化波函数为 $\chi_\sigma(\mathbf{p})$, 并且该粒子即出现在初态中又出现末态中. 利用方程(13.6.10)中 δ -函数的Fourier表示, \mathcal{G} 在这一态下的矩阵元是

$$\begin{aligned} \int d^3 p d^3 p' \chi_{\sigma'}^*(\mathbf{p}') \chi_\sigma(\mathbf{p}) \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}(q_1, q_2, \cdots, q_N; p) &\rightarrow \\ \int d^3 X \sum_\sigma |\psi_\sigma(\mathbf{X})|^2 \prod_{r=1}^N 2\pi Z e n^{\mu_r} \delta(q_r^0) e^{-i\mathbf{q}_r \cdot \mathbf{X}} &\quad (13.6.11) \end{aligned}$$

其中 $\psi(\mathbf{X})$ 是坐标空间波函数:

$$\psi_\sigma(\mathbf{X}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \chi_\sigma(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{X}}. \quad (13.6.12)$$

由于方程(13.6.11)中的因式分解, 在该态中引入一个带电重粒子的效应就与在动量空间Feynman图中增加任意个新型顶点的效果相同, 在这种新顶点中, 像电子这样电荷为 $-e$ 的轻Dirac粒子与一外场相互作用, 而每个这样的顶点对总振幅贡献因子[‡](现在包含了光子传播子和电子-光子顶点)

$$i \int d^4 q \left[\frac{-i}{(2\pi)^4 q^2 - i\epsilon} \right] \left[2\pi Z e n_\mu \delta(q^0) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}} \right] \left[(2\pi)^4 e \gamma^\mu \delta^4(k - k' - q) \right] \quad (13.6.13)$$

[‡]这里的第一个因子是通常的因子 i , 在Feynman规则中, 这个因子伴随着带电重粒子相互作用拉格朗日量中的常数

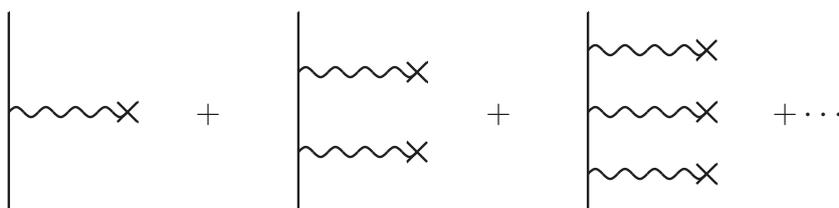


图 13.4 电子被外场散射的图. 这里的直线代表电子, 以交叉十字结尾的波浪线带便于电子与外场的相互作用

其中 k 和 k' 是初态和末态的电子4-动量. 那么, 完整的散射振幅必须是在权重函数 $\sum_{\sigma} |\psi_{\sigma}(\mathbf{X})|^2$ 下对重粒子位置 \mathbf{X} 取平均. 通过在相互作用拉格朗日量中增加新项

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(x) = \mathcal{A}_{\mu}(x) J_e^{\mu}(x) \quad (13.6.14)$$

将会产生相同的因子(13.6.13), 其中 $J_e^{\mu} \equiv -ie\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$ 是电子的电流, 而 \mathcal{A}^{μ} 是外矢势

$$\mathcal{A}^{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iq \cdot x} \left[\frac{2\pi Z e n^{\mu} \delta(q^0) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}}}{q^2 - i\epsilon} \right]. \quad (13.6.15)$$

当然, 这正是通常的Coulomb势:

$$\mathcal{A}^0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{X}|}, \quad \mathcal{A}(x) = 0. \quad (13.6.16)$$

如果存在多个带电重粒子(就像分子中那样), 我们必须将 $\mathcal{A}^{\mu}(x)$ 表示为像(13.6.16)这样的项的和, 其中的每一项有着她自己的电荷 Ze 以及位置 \mathbf{X} .

在使用外场近似时, 紧记我们所求和的图是什么是有用的. 考察单个(相对论性或非相对论性)电子与单个带电重粒子, 例如质子或氦核, 进行相互作用. 如果我们忽视所有其它的相互作用, 那么, 电子与外场的相互作用所引起的电子散射, 其Feynman图就是那些在电子线上插入任意多个电子-外场顶点(13.6.14)的Feynman图. (参看图13.4.) 但是方程(13.6.2)中对置换的求和表明了, 在产生这些外场近似下的图的底层理论的图中, 与电子线相连的光子在所有可能的阶与带点重粒子线相连. (参看图13.5) 除非电子和带电重粒子是非相对论性的, 否则图13.5中的“非交叉梯形”图(用L标记)不会主导这个求和. (这些图包含来自旧形式微扰论中的项的贡献, 这些项的中间态包含了与初末态相同的粒子, 当电子和带电重粒子都是非相对论性时, 这会使得能量分母很小, 而图13.5中所有其它的图所对应的中间态, 要么有额外的光子, 要么有额外的电子-正电子对, 要么有重粒子-反粒子对.) 通过解一积分方程可以对非交叉梯形图求和, 这一积分方程称为Bethe-Salpeter(贝特-萨尔皮特)方程,¹⁰ 然而, 除非两个粒子都是非相对论性的, 否则没有什么理论依据来挑出图的这个子集, 在两个粒子都是非相对论性的情况下, Bethe-Salpeter方程就退化成普通的非相对论Schrödinger方程, 再加上自旋-轨道耦合附带的相对论性修正, 不过这个修正可以作为微扰处理. 我们必须承认, 束缚态中相对论效应和辐射修正的理论仍未处在完全令人满意的状态上.

在推导外场(13.6.16)时, 我们仅将带电重粒子与电磁场的相互作用计算至光子动量的领头阶. 重粒子的磁偶极矩, 电偶极矩等会产生关于光子动量的高阶修正. 当然, 除了图13.4中的那些图, 还会有Feynman图产生辐射修正, 在这些图中, 光子从电子线吸收且发射或者会在光子线中插入电子圈. 我们在下一章将看到, 在束缚态中, 图13.4中的必须引入至所有阶, 而所有其它的高阶光子动量或 e 的修正可以作为这些图的微扰被引入.

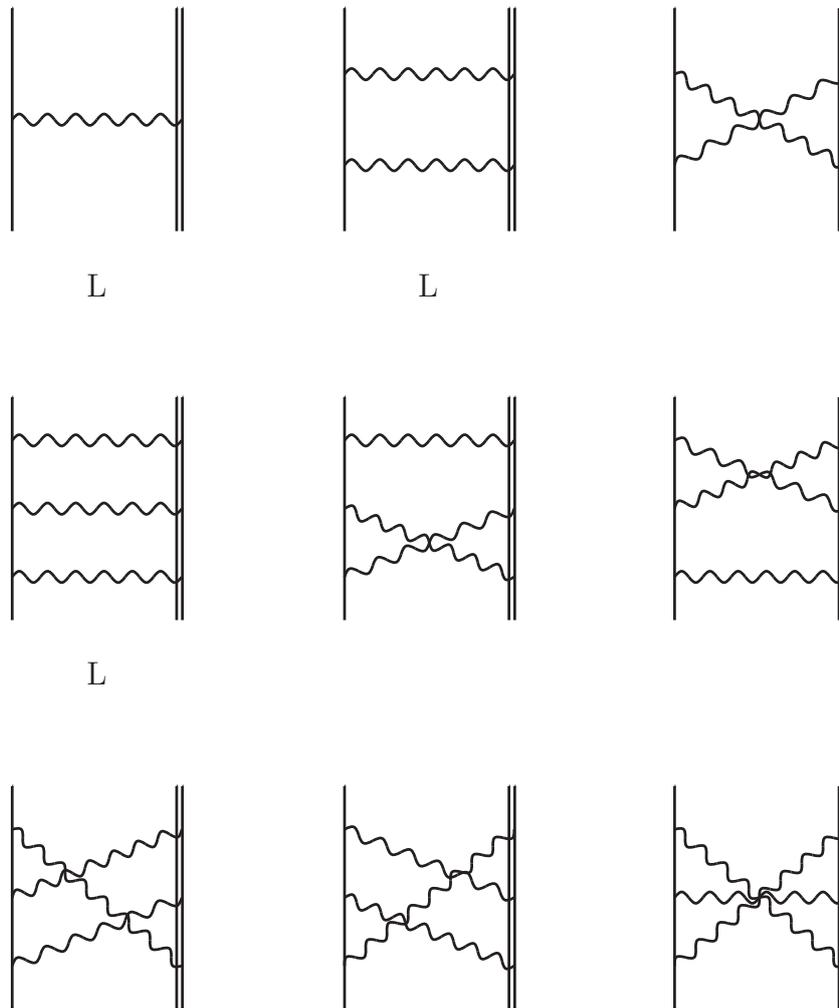


图 13.5 一个电子被一个带电重粒子散射的图, 这个图在靶的质量很大的极限下会产生与图13.4相同的结果. 这里单个直线代表电子, 双线条是重的靶粒子; 而波浪线是虚光子. 被“L”标记的图被称作非交叉梯形图; 当电子和靶粒子都是非相对论粒子时, 这些图主导求和.

参考文献

- [1] F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **37**, 54 (1937); D. R. Yennie, S. C. Frautschi and H. Suura, *Ann. Phys. (NY)* **13**, 379 (1961). 另见K. T. Mahantappa, Ph.D. Thesis at Harvard University (1961), 未发表.
- [2] S. Weinberg, *Phys. Lett.* **9**, 357 (1964); *Phys. Rev.* **135**, B1049 (1964).
- [3] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **140**, B515 (1965).
- [4] 在非相对论Coulomb散射的微扰展开中会遇到这个相因子, R. H. Dalitz, *Proc. Roy. Soc. London* **206**, 509 (1951).
- [5] 参看, L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1949): Section 20.

-
- [6] T. D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev.* **133**, B1549 (1964). 另见T. Kinoshita, *J. Math. Phys.* **3**, 650 (1962); G. Sterman and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1416 (1977).
- [7] G. Sterman and S. Weinberg, 参考文献6.
- [8] F. E. Low, *Phys. Rev.* **96**, 1428 (1954); M. Gell-Mann and M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **96**, 1433 (1954). 另见S. Weinberg, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — 1970 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics*, S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton编辑(MIT Press, Cambridge, MA, 1970).
- [9] E. J. Williams, *Kgl. Dan. Vid. Sel. Mat.-fys. Medd.* **XIII**, No. 4 (1935).
- [10] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **82**, 309 (1951); **84**, 1232 (1951).

第 14 章 外场中的束缚态

在第11章我们对辐射修正的处理中, 我们仅比微扰论的最低阶多踏出一步. 然而, 存在一类非常重要的问题, 在这类问题中, 即使是最简单的计算, 也要求我们从一开始就要考虑像 e 这样的耦合常数的任意高阶的Feynman图. 这些问题是那些涉及束缚态的问题——在电动力学中, 要么是普通的原子和分子, 要么是电子偶素或 μ 子偶素这样的奇异原子.

很容易看到, 这样的问题必然面临着普通微扰论的崩溃. 例如, 将电子-质子散射的振幅看做质心系能量 E 的函数. 在10.3节业已证明了, 束缚态的存在, 例如氢原子的基态, 暗示了这一振幅在 $E = m_p + m_e - 13.6 \text{ eV}$ 处有一极点. 然而, 在电子-质子散射的微扰展开中, 任何一个项都没有这样的极点. 因此, 这样的极点只能产生于对所有图的求和在 $m_p + m_e$ 附近的质心能处的发散.

这一微扰级数发散的原因也很容易看到, 尤其是我们先来考察旧形式微扰论的编时图而不是Feynman图时, 更是如此. 假定, 在质心系中, 电子和质子均有量级为 $q \ll m_e$ 的动量, 并考察电子和质子动量也相差 q 阶的中间态. 这一态所贡献的能量分母因子将是 $[q^2/m_e]^{-1}$ 阶的. 每一个这样的态也会贡献一个 e^2/q^2 (e^2/r 的Fourier变换)阶的Coulomb相互作用的矩阵元, 并且, 相应的动量空间积分会贡献一个 q^3 阶的因子, 将这些综合起来, 我们看到每个额外的Coulomb相互作用贡献了一个阶为

$$[q^2/m_e]^{-1}[e^2/q^2][q^3] = e^2 m_e/q$$

的总因子. 因此, 当 q 小于或等于 $e^2 m_e$ 阶时, 换句话说, 当动能和势能, 其是 q^2/m_e 阶的, 不再大于 e^4/m_e , 即氢原子的束缚能量级时, 微扰论会崩溃掉.

我们这里的问题是研究如何使用微扰论计算束缚态问题中的辐射修正, 对那些需要和至所有阶的图进行求和, 并仅保留有限个不要求和的图

14.1 Dirac方程

本章, 在我们所考虑的问题中, 束缚态是电子(或 μ 子)与像原子核这样的带电重粒子之间的相互作用产生的. 正像13.6节中所证明的, 通过给相互作用拉格朗日量中增加代表 c -数外场矢量势 $\mathcal{A}^\mu(x)$ 的项*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{A}} = & -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\mathcal{A}_\mu - \frac{1}{2}(Z_3 - 1)(\partial^\mu\mathcal{A}^\nu - \partial^\nu\mathcal{A}^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ & - ie(Z_2 - 1)\mathcal{A}_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \end{aligned} \quad (14.1.1)$$

这一相互作用就会被考虑进去, 这一相互作用是通过将方程(11.1.6)相互作用部分中的量子矢量势 A^μ 替换成 $A^\mu + \mathcal{A}^\mu$ 获得的. 例如, 对于处在原点且电荷为 Ze 的单个带电重粒子,

$$\mathcal{A}^0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \mathcal{A}(x) = 0. \quad (14.1.2)$$

*在本章, 我们重新使用大写字母 Ψ 来标记Heisenberg绘景中的电子场, 保留小写字母 ψ , 作为时间相关性仅由 c -数外场 $\mathcal{A}^\mu(x)$ 控制的Dirac场.

必须要考虑至所有阶的正是相互作用(14.1.1). 在本节, 我们将考察只有这一个相互作用的理论, 而将辐射修正留至接下来的章节.

物理学家从幼儿园就了解到, 处理这类问题的方法是解有外场的Dirac波动方程. 在这里导出这一方程看起来似乎是不必要的, 但正如第1章中所强调的, Dirac将这一方程作为相对论Schrödinger方程的原始动机并没有经受住检验. 另外, 在推导的过程中, 我们将发现必须要附加在Dirac方程解上的归一化条件, 而这个条件在Dirac方法中看起来似乎是特设的. 这里所讨论的Dirac方程的解将是下一节辐射修正处理中的重要因素.

在这里, 我们将在Heisenberg绘景版本下进行处理, 其中算符的时间相关性由包含外场作用量(14.1.1)的哈密顿量决定, 而这个哈密顿量不再包含其它相互作用. 电子场 $\psi(x)$ 在这一绘景下满足场方程

$$\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] \psi(x) = 0. \quad (14.1.3)$$

这不是Dirac原始含义下的Dirac方程,¹ 因为 $\psi(x)$ 在这里不是c-数波函数而是量子算符. c-数Dirac波函数定义为

$$u_N(x) \equiv (\Phi_0, \psi(x)\Phi_N), \quad (14.1.4)$$

$$v_N(x) \equiv (\Phi_N, \psi(x)\Phi_0), \quad (14.1.5)$$

其中 Φ_N 是态矢的正交完备集, 而 Φ_0 是真空. 由此, 可从方程(14.1.3)中立即得出这些函数满足齐次Dirac方程

$$\begin{aligned} \left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] u_N(x) &= \left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] v_N(x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (14.1.6)$$

我们也可从Dirac场的等时反对易关系中导出归一化条件. 相互作用(14.1.1)不会影响这些归一化条件, 所以归一化条件可以取为与自由场相同的形式:

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, t)\} = i\gamma^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (14.1.7)$$

取真空期望值, 并插入对 Φ_N 的求和, 我们发现

$$\sum_N u_N(\mathbf{x}, t) u_N^\dagger(\mathbf{y}, t) + \sum_N v_N(\mathbf{x}, t) v_N^\dagger(\mathbf{y}, t) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (14.1.8)$$

对 N 的求和理解成对连续态的积分和对任意离散束缚态的求和.

我们主要感兴趣的情况是时间无关的外场, 像(14.1.2). 在这种情况下, Φ_N 可以取为哈密顿量(包含相互作用(14.1.1))本征值为 E_N 的本征态. 这样, 时间平移不变形就告诉我们 $u_N(x)$ 和 $v_N(x)$ 的时间相关性为:

$$u_N(\mathbf{x}, t) = e^{-iE_N t} u_N(\mathbf{x}), \quad v_N(\mathbf{x}, t) = e^{+iE_N t} v_N(\mathbf{x}). \quad (14.1.9)$$

那么, 齐次Dirac方程(14.1.6)就变成

$$i\gamma^0 \left[\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m + ie\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \right] u_N(\mathbf{x}) = E_N u_N(\mathbf{x}), \quad (14.1.10)$$

$$i\gamma^0 \left[\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m + ie\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \right] v_N(\mathbf{x}) = -E_N v_N(\mathbf{x}). \quad (14.1.11)$$

方程(14.1.11)右边的负号表明这是著名的Dirac“负能”解. 正如方程(14.1.8)所表明的, 为了构成波函数的完备集需要这些负能解. 当然, 对于适度的外场, 在理论中不存在负能态, 所以所有的 E_N 都是正的, 但是, 非零 u_N 的态与非零 v_N 的态之间仍然存在一个重要差异: 定义(14.1.4)和(14.1.5)表明, 仅当一个态分别有电荷 $-e$ 和 $+e$ 时, 这个态才有 $u_N \neq 0$ 和 $v_N \neq 0$. 正是在这一意义下, Dirac方程的负能解与反粒子的存在相关. 然而, 这个讨论并没有涉及Dirac方程的任何细节, 甚至没有处理电子自旋.

从Dirac波动方程(14.1.10)和(14.1.11), 我们可以轻松地看到能量不同的波函数是正交的. 即,

$$(E_M - E_N^*) (u_N^\dagger u_M) = \nabla \cdot (u_N^\dagger i\gamma^0 \gamma u_M),$$

所以, 如果当 $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ 且 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时 $|\mathbf{x}|^2 (u_N^\dagger i\gamma^0 \gamma u_M)$ 依旧束缚, 那么

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})u_M(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{如果 } E_N \neq E_M^*. \quad (14.1.12)$$

利用 v_N 类似的边界条件, 我们以相同的方法发现

$$\int d^3x (v_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{如果 } E_N \neq E_M^*, \quad (14.1.13)$$

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{如果 } E_N \neq -E_M^*, \quad (14.1.14)$$

取 $N = M$, 方程(14.1.12)和(14.1.13)告诉我们能量都是实的. 扔掉方程(14.1.12)—(14.1.14)中 E_M 上的复共轭, 我们看到能量不同的 u 是正交的, 能量不同的 v 是正交的, 并且(只要势能没有强到产生新的负能态)所有的 u 与所有的 v 正交. 那么, 通过对表征态以及能量的离散量子数的合适选择, 我们总能整理成

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})u_M(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{如果 } N \neq M, \quad (14.1.15)$$

$$\int d^3x (v_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{如果 } N \neq M, \quad (14.1.16)$$

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0. \quad (14.1.17)$$

给方程(14.1.8)右乘 $u_M(\mathbf{x})$ 或 $v_M(\mathbf{y})$, 我们就会发现这些波函数必须满足归一化条件

$$\int d^3y (u_N^\dagger(\mathbf{y})u_M(\mathbf{y})) = \int d^3y (v_N^\dagger(\mathbf{y})v_M(\mathbf{y})) = \delta_{NM}, \quad (14.1.18)$$

其中 δ_{NM} 是克罗内克 δ -符号与动量空间 δ -函数的乘积, 而采用的归一化用来定义 \sum_N , 使得 $\sum_N \delta_{MN} = 1$. 这些归一化条件与Dirac波函数的几率解释并无直接关系, 却转而产生了场的反对易关系(14.1.7).

我们现在详细说明一下 $\mathcal{A} = 0$ 时的静电外场情况. 在我们的Dirac矩阵的标准表示中, 我们有

$$\gamma = i \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad i\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是通常的 2×2 Pauli矩阵3-矢, 而这里的“1”和“0”是 2×2 单位阵和零矩阵. 通过令

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_N + ig_N \\ f_N - ig_N \end{pmatrix}, \quad (14.1.19)$$

我们引入了两分量波函数 f_N 和 g_N . 这样, 能量本征值条件(14.1.10)就取如下形式:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)f_N = (E_N + e\mathcal{A}^0 + m)g_N, \quad (14.1.20)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)g_N = -(E_N + e\mathcal{A}^0 - m)f_N. \quad (14.1.21)$$

在 $e\mathcal{A}^0 r \approx Z\alpha \ll 1$ 的非相对论情况下, 束缚能 $m - E_N$ 是 $Z^2\alpha^2 m$ 阶的, 而梯度算符是 $Z\alpha m$ 阶的, 所以 g_N 要比 f_N 小一个阶为 $Z\alpha$ 的因子. (为了得到位置波函数 v_N , 要把所有的 E_N 替换成 $-E_N$, 所以在这一情况下, f_N 要比 g_N 小相同的因子.) 在本节末尾我们将回到这个非相对论情况.

根据空间反演的奇偶性可以对物理态进行分类:

$$P\Phi_N = \eta_N\Phi_N, \quad (14.1.22)$$

其中 η_N 是符号因子 ± 1 . 回忆起电子的内禀宇称定义为 $+1$, 而Dirac场有相同的空间反演性质

$$P\psi(\mathbf{x}, t)P^{-1} = \beta\psi(-\mathbf{x}, t)$$

所以方程(14.1.4)和(14.1.22)表明Dirac波函数满足宇称条件

$$u_N(\mathbf{x}) = \eta_N\beta u_N(-\mathbf{x}) \quad (14.1.23)$$

或者等价的

$$f_N(\mathbf{x}) = \eta_N f_N(-\mathbf{x}), \quad g_N(\mathbf{x}) = -\eta_N g_N(-\mathbf{x}). \quad (14.1.24)$$

要注意的是, 与态的宇称相同的是 $f_N(\mathbf{x})$ 的宇称, 而不是 $g_N(\mathbf{x})$ 的宇称.

只要势 \mathcal{A}^0 是旋转不变的, 我们就能根据波动方程解的总角动量 j 和宇称 η 对它们进行分类. 对于给定的 j , 分量 f 和 g 可以展成轨道角动量为 $\ell = j + \frac{1}{2}$ 和 $\ell = j - \frac{1}{2}$ 的球谐函数, 但对于确定的宇称 $\eta = (-1)^{j \mp \frac{1}{2}}$, 方程(14.1.24)表明在 f 中我们只能有 $\ell = j \mp \frac{1}{2}$ 而在 g 中有 $\ell = j \pm \frac{1}{2}$. 那么, 通常的角动量加法规则就表明了, 对于总角动量为 j , 总角动量 z -分量为 μ , 且宇称为 $(-1)^{j \mp \frac{1}{2}}$ 的态, “较大”的两分量波函数 f 有如下形式

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} C_{j \mp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(j \mu; \mu - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}) Y_{j \mp \frac{1}{2}}^{\mu - \frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j \mp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(j \mu; \mu + \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}) Y_{j \mp \frac{1}{2}}^{\mu + \frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} F(|\mathbf{x}|), \quad (14.1.25)$$

其中 C 和 Y 是通常的Clebsch-Gordan系数和球谐函数.² 另外, 给定任何总角动量且宇称确定的波函数, 通过算符 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, 我们可以构建另一个 j 和 μ 相同但宇称相反的波函数, 所以, “较小”分量可以写成如下形式

$$g(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} C_{j \mp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(j \mu; \mu - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}) Y_{j \mp \frac{1}{2}}^{\mu - \frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j \mp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(j \mu; \mu + \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}) Y_{j \mp \frac{1}{2}}^{\mu + \frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} G(|\mathbf{x}|). \quad (14.1.26)$$

习惯上喜欢将态的轨道角动量 ℓ 定义为“较大”分量 $f(\mathbf{x})$ 的轨道角动量,

$$\ell = j \mp \frac{1}{2}, \quad (14.1.27)$$

这使得宇称总是 $(-1)^\ell$.

将方程(14.1.25)和(14.1.26)代入方程(14.1.20)和(14.1.21)给出了耦合微分方程

$$\frac{dG}{dr} + \frac{k+1}{r}G + (E + e\mathcal{A}^0 - m)F = 0, \quad (14.1.28)$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{k-1}{r}F - (E + e\mathcal{A}^0 + m)G = 0, \quad (14.1.29)$$

其中, 对于宇称 $\eta = (-1)^{j \mp \frac{1}{2}}$,

$$k \equiv \pm(j + \frac{1}{2}). \quad (14.1.30)$$

我们现在专注于简单外场(14.1.2), 对于这一外场, $e\mathcal{A}^0 = Z\alpha/r$. 这一情况³下Dirac方程的处理是熟悉的, 所以, 仅为了完整性, 我们在这里简要的总结一下. 很容易看到原点附近的解趋于 r^{s-1} , 其中 $s^2 = k^2 - Z^2\alpha^2$. (注意到 $k^2 \geq 1$, 所以指数 s 对于 $Z\alpha \leq 1$ 是实的.) 对于 $s < 0$ 的解, 由于其与归一化条件(14.1.18)不相容, 我们必须丢弃这个解. 那么, $r \rightarrow \infty$ 时波函数不会发散, 这一条件确定了能量本征值的允许值:

$$E_{n,j} = m \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (14.1.31)$$

其中 n 是“主量子数”并有

$$j + \frac{1}{2} \leq n. \quad (14.1.32)$$

值得注意的是, 这些能量并不依赖于 ℓ 的宇称, 而仅依赖于 n 和 j . 对于每一 n 和 j , 这里有两个解, 对应于 k 的两个符号或两个可能的粒子, 除了在 $n = j + \frac{1}{2}$ 时, 这时我们只有 $k > 0$ 以及宇称 $(-1)^{j - \frac{1}{2}}$, 使得 $\ell = j - \frac{1}{2}$. 加上方程(14.1.32), 这与熟悉的非相对论性约束 $\ell \leq n - 1$ 是相同的.

对于 $Z\alpha \ll 1$ 的轻原子, 方程(14.1.31)给出了幂级数

$$E = m \left[1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2n^2} + \frac{Z^4\alpha^4}{n^4} \left(\frac{3}{8} - \frac{n}{2j+1} \right) + \dots \right]. \quad (14.1.33)$$

当然, 前两项就代表静能和非相对论Schrödinger方程给出的束缚能. 第一个依赖于 n 和 j 的项是第三项, 也是相对论修正. 对于 $n = 1$, 仅存在一个总角动量值 $j = \frac{1}{2}$, 并且, 由于这里 $n = j + \frac{1}{2}$, 所以仅存在一个宇称 $(-1)^{j - \frac{1}{2}} = +1$, 对应于 $\ell = 0$. 因此, 在氢原子 $n = 1$ 的态中, 很难看到方程(14.1.33)中的相对论修正的效应, 虽然这在最近变得可能, 我们将在14.3节看到这一点. 另一方面, 对于 $n = 2$, 我们有两个宇称都有的 $j = \frac{1}{2}$ 的态(即, $2s_{1/2}$ 态和 $2p_{1/2}$ 态), 以及 $j = \frac{3}{2}$ 且宇称为负的态 $2p_{3/2}$. 方程(14.1.33)给出氢原子中 p 态之间的分裂为

$$E(2p_{3/2}) - E(2p_{1/2}) = \frac{\alpha^4 m_e}{32} = 4.5823 \times 10^{-5} \text{ eV}. \quad (14.1.34)$$

这种相对论性的线分裂称为原子态的精细结构. 从一开始就知道这一预测与观测到的精细结构是高度符合的. 另一方面, Dirac方程并不给出任何 $2s_{1/2}$ 态和 $2p_{1/2}$ 态之间的能量差异, 所以这里是寻找进一步修正的效应的好地方, 我们将在14.3节中进行考察.

在结束本节之前, 对于一般的静电势 \mathcal{A}^0 , 我们应该考察波函数和矩阵元在非相对论情况下的近似形式. (对于Coulomb势, 这是限制 $Z\alpha \ll 1$.) 既然这里有 $E_N + m \simeq 2m \gg |e\mathcal{A}^0|$, 电子波函数的“较小”分量以较大分量的形式近似的给定为

$$g_N \simeq (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) f_N / 2m. \quad (14.1.35)$$

那么, 方程(14.1.21)就变成了非相对论Schrödinger方程

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} - e\mathcal{A}^0 \right] f_N \simeq (E_N - m)f_N . \quad (14.1.36)$$

既然在 f_N 的方程中自旋自由度与轨道自由度之间不再有耦合, 我们可以看到该方程解的完全集有如下形式

$$f_N = \chi_N \psi_N(\mathbf{x}) ,$$

其中 χ_N 是两分量常旋量, 而 $\psi_N(\mathbf{x})$ 是Schrödinger方程的常规单分量解. 然而, 我们经常处理的态有着明确的总角动量值 j , 对于这样的态, f_N (对于非零的轨道的角动量.)是这种项的和.

在非相对论近似下, 四分量Dirac波动方程取如下形式

$$u_N \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla/2m)f_N \\ (1 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla/2m)f_N \end{bmatrix} \quad (14.1.37)$$

而方程(14.1.18)给出了归一化条件

$$\int d^3x (f_N^\dagger, f_M) \simeq \delta_{NM} - \frac{1}{4}(\mathbf{v}^2)_{NM} , \quad (14.1.38)$$

其中

$$(\mathbf{v}^2)_{NM} \equiv -\frac{1}{m^2} \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) \nabla^2 f_M(\mathbf{x}) .$$

在将外场中的矩阵元与自由粒子矩阵元项关联时, 注意到, 能量本征态 N 中的动量空间波函数可以写成

$$u_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}) \simeq \sum_{\sigma} u(\mathbf{p}, \sigma) [f_N(\mathbf{p})]_{\sigma} , \quad (14.1.39)$$

这通常是有用的, 其中 $u(\mathbf{p}, \sigma)$ 是自由粒子Dirac旋量

$$u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2m)\chi_{\sigma} \\ (1 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2m)\chi_{\sigma} \end{bmatrix} ,$$

$$\chi_{+\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \chi_{-\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

而 $f_N(\mathbf{p})$ 是两分量Schrödinger波函数的Fourier变换

$$f_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f_N(\mathbf{x}) ,$$

* * *

最后, 作为计算各种微扰效应时的辅助, 我们注意到在16个独立的 4×4 电子矩阵元中领头项

是

$$(\bar{u}_M u_N) \simeq (f_M^\dagger f_N) - \frac{1}{4m^2} (\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N), \quad (14.1.40)$$

$$i(\bar{u}_M \gamma^0 u_N) \simeq (f_M^\dagger f_N) + \frac{1}{4m^2} (\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N), \quad (14.1.41)$$

$$(\bar{u}_M \boldsymbol{\gamma} u_N) \simeq \frac{1}{2m} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} f_N) - (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.42)$$

$$(\bar{u}_M [\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}] u_N) \simeq \frac{i}{m} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.43)$$

$$(\bar{u}_M [\gamma^i, \gamma^j] u_N) \simeq 2i\epsilon_{ijk} (f_M^\dagger \sigma_k f_N), \quad (14.1.44)$$

$$(\bar{u}_M \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} u_N) \simeq -i(f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} f_N), \quad (14.1.45)$$

$$(\bar{u}_M \gamma_5 \gamma^0 u_N) \simeq \frac{1}{2m} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} f_N) - (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.46)$$

$$(\bar{u}_M \gamma_5 u_N) \simeq \frac{i}{2m} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)]. \quad (14.1.47)$$

14.2 外场中的辐射修正

我们现在来考察上一节结果的辐射修正, 这些辐射修正是电子与量子电磁场以及带电重粒子的外场的相互作用引起的. 这些辐射修正可以用通常的那类Feynman图进行计算, 而外场的全部效应就是修正有电磁外场时的电子场传播子(并提供方程(14.1.1)中所示的外场相关的重整化抵消项.) 确切一些, 在任何一个图的电子内线中, 插入任意多个对应于相互作用(14.1.1)中的第一项的顶点, 其效应相当于将裸坐标空间传播子 $-iS(x-y)$ 替换成修正传播子

$$\begin{aligned} -iS_{\mathcal{A}}(x, y) &\equiv -iS(x-y) + (-i)^2 \int d^4 z_1 S(x-z_1) e\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu(z_1) S(z_1-y) \\ &+ (-i)^3 \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 S(x-z_1) e\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu(z_1) S(z_1-z_2) e\gamma^\nu \mathcal{A}_\nu(z_2) S(z_2-y) \\ &+ \cdots, \end{aligned} \quad (14.2.1)$$

其中, 同往常一样,

$$S(x-y) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{-i\gamma_\lambda p^\lambda + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip \cdot (x-y)}.$$

(因为外场破坏了平移不变性, 所以我们将 $S_{\mathcal{A}}$ 写成 x 和 y 的函数而不是 $x-y$ 的函数.) 6.4节证明的定理告诉我们, 方程(14.2.1)与

$$-iS_{\mathcal{A}}(x, y) = (\Phi_0, T\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \Phi_0)_{\mathcal{A}} \quad (14.2.2)$$

是相同的, 其中右边的下标 \mathcal{A} 表明真空态 Φ_0 和电子场是定义在所考虑的相互作用只有有外场的相互作用(14.1.1)的Heisenberg绘景中. 在方程(14.2.2)插入中间态 Φ_N 的完备集, 以上一节引入的Dirac波函数 u_N 和 v_N 的形式, 这给出了传播子的表达式

$$iS_{\mathcal{A}}(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \sum_N u_N(x) \bar{u}_N(y) - \theta(y^0 - x^0) \sum_M v_M(x) \bar{v}_M(y). \quad (14.2.3)$$

另一种获得传播子(14.2.2)的可能方法是解非齐次Dirac方程:

$$\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] S_{\mathcal{A}}(x, y) = \delta^4(x-y), \quad (14.2.4)$$

这一方程可从场方程(14.1.3)和反对易关系(14.1.7)中获得, 或者从微扰展开(14.2.1)形式上获得. 另外, 方程(14.2.3)告诉了我们传播子所满足的边界条件: 它的Fourier分解所包含的“正频项”在 $x^0 - y^0 \rightarrow \infty$ 时要正比于 $\exp(-iE(x^0 - y^0))$, 其中 $E > 0$, 而所包含的“负频项”在 $x^0 - y^0 \rightarrow -\infty$ 时要正比于 $\exp(+iE(x^0 - y^0))$, 其中 $E > 0$. 即使在外场过强以至于无法使用微扰展开(14.2.1)的情况下, 我们也可用附加这些边界条件的非齐次Dirac方程来获得该传播子的数值解.⁴ 一旦传播子 $S_{\mathcal{A}}(x, y)$ 被计算出来, 外场中的散射振幅, 在将 $S(x - y)$ 替换成 $S_{\mathcal{A}}(x, y)$ 后(并将 \mathcal{A} -相关的重整化抵消项插入到合适的地方), 就可用普通的Feynman图进行计算.

现在我们来了解一下如何使用传播子被修正后的微扰展开计算束缚态能级的偏移. 考察全电子传播子 $S'_{\mathcal{A}}(x, y)$, 这个传播子包含电子与量子电磁场合外场的相互作用:

$$-iS'_{\mathcal{A}}(x, y) \equiv (\Omega_0, T\{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\}\Omega_0)_{\mathcal{A}} \quad (14.2.5)$$

其中, $\Psi(x)$ 是包含所有相互作用的Heisenberg绘景中的电子场, 而 Ω_0 是全哈密顿量的真空本征态. 对于时间无关的外势, 我们可以找到全哈密顿量的一组正交完备的本征态 Ω_N , 其本征值为 E'_N . 在方程(14.2.5)的算符积中插入这些态的和, 我们发现

$$\begin{aligned} -iS'_{\mathcal{A}}(x, y) &= \theta(x^0 - y^0) e^{-iE'_N(x^0 - y^0)} \sum_N U_N(\mathbf{x}) \bar{U}_N(\mathbf{y}) \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) e^{-iE'_N(y^0 - x^0)} \sum_N V_N(\mathbf{x}) \bar{V}_N(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

其中

$$(\Omega_0, \Psi(\mathbf{x}, t)\Omega_N) \equiv e^{-iE'_N t} U_N(\mathbf{x}), \quad (14.2.7)$$

$$(\Omega_N, \Psi(\mathbf{x}, t)\Omega_0) \equiv e^{+iE'_N t} V_N(\mathbf{x}). \quad (14.2.8)$$

(求和包含对连续态的积分和对离散束缚态的求和. 像之前一样, 仅当态 Ω_N 分别有电荷 $-e$ 和 $+e$ 时, U_N 和 V_N 才是非零的.) 我们可以将传播子重定义为能量而非时间的函数

$$S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 e^{iE(x^0 - y^0)} S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (14.2.9)$$

(时间平移不变性表明 $S'_{\mathcal{A}}(x, y)$ 是 $x^0 - y^0$ 的函数而不单独是 x 和 y 的函数.) 从方程(14.2.6)中我们看到

$$S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_N \frac{U_N(\mathbf{x}) \bar{U}_N(\mathbf{y})}{E'_N - E - i\epsilon} - \sum_N \frac{V_N(\mathbf{x}) \bar{V}_N(\mathbf{y})}{E'_N + E - i\epsilon}. \quad (14.2.10)$$

特别地, $S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)$ 在任意的电子束缚态能量处有极点, 且在负的任意正电子束缚态能量处有极点. (当然, 正电子在普通的带正电核的Coulomb外场中没有束缚态.)

我们现在来考察对全传播子的最低阶辐射修正. 这里的Feynman规则给出的到这一阶的全传播子 $S'_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}} + \delta S_{\mathcal{A}}$, 修正项为

$$\delta S_{\mathcal{A}}(x, y) = \int d^4 z \int d^4 w S_{\mathcal{A}}(x, z) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(z, w) S_{\mathcal{A}}(w, y), \quad (14.2.11)$$

其中 $i\Sigma_{\mathcal{A}}^*$ 是所有有一个入电子线和一个出电子线的一圈图之和(排除了最后的电子传播子), 在计算这些图时, 对于电子内线, 要将 $S(x - y)$ 替换成 $S_{\mathcal{A}}(x, y)$, 最后再加上一个二阶重整化抵消项. 利用能量变量而非时间变量, 这是

$$\delta S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \int d^3 z \int d^3 w S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; E) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{z}, \mathbf{w}; E) S_{\mathcal{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{y}; E), \quad (14.2.12)$$

其中

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{z}, \mathbf{w}; E) \equiv \int dz^0 e^{iE(z^0 - w^0)} \Sigma_{\mathcal{A}}^*(z, w). \quad (14.2.13)$$

这些辐射修正的效应是将波函数变成 $U_N = u_N + \delta u_N$ 和 $V_N = v_N + \delta v_N$, 并将束缚态能量变成 $E'_N = E_N + \delta E_N$, 所以全传播子是

$$\begin{aligned} S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) &\simeq S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) \\ &+ \sum_N \frac{\delta u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) + u_N(\mathbf{x}) \delta \bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E} \\ &- \sum_N \frac{\delta v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y}) + v_N(\mathbf{x}) \delta \bar{v}_N(\mathbf{y})}{E_N + E} \\ &- \sum_N \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) \delta E_N}{(E_N - E)^2} + \sum_N \frac{v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y}) \delta E_N}{(E_N + E)^2}. \end{aligned} \quad (14.2.14)$$

(因为我们现在并没有从散射态的连续谱中取 E , 所以我们扔掉了 $i\epsilon$ 项.) 我们看到电子束缚态能量的偏移 δE_N 由全传播子中 $-u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) / (E_N - E)^2$ 的系数给定. 为了计算它, 我们注意到方程(14.2.3)给出

$$S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_N \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E - i\epsilon} - \sum_N \frac{v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y})}{E_N + E - i\epsilon}. \quad (14.2.15)$$

将其代入方程(14.2.12), 给出

$$\begin{aligned} \delta S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) &= \sum_{N, M} \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_M(\mathbf{y})}{(E_N - E)(E_M - E)} \\ &\times \int d^3 z \int d^3 w \bar{u}_N(\mathbf{z}) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{z}, \mathbf{w}; E) u_M(\mathbf{w}) + \dots \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

其中, 省略号代表至少含有一个负能极点的额外项. 比较这里 $(E_N - E)^{-2}$ 的系数与方程(14.2.14)中 $(E_N - E)^{-2}$ 的系数. 我们发现

$$\delta E_N = - \int d^3 x \int d^3 y \bar{u}_N(\mathbf{x}) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) u_M(\mathbf{y}). \quad (14.2.17)$$

u_N 是齐次 Dirac 方程满足归一化条件(14.1.8)的解, 所以这非常像普通的一阶微扰论, 只不过把哈密顿量的微扰替换成了 $-\Sigma^*$.

一般而言, δE_N 是复的. 这是要衰变到更低能级的不稳定原子能级的结果; 我们在第3章中看到, 能量为 E 的不稳定态与衰变速率 Γ 在各种振幅的复值能量 $E - i\Gamma/2$ 处产生了极点. 因而方程(14.2.17)的虚部等于 $-\Gamma/2$, 而它的实部给出能量偏移.

Σ^* 的 Feynman 图如图 14.1 所示. (注意到这里有了新的光子蝌蚪图, 这是因为外场破坏了在普通的 Feynman 规则下禁止这种图出现的 Lorentz 不变性与电荷共轭不变性.) 对这些图使用位置空

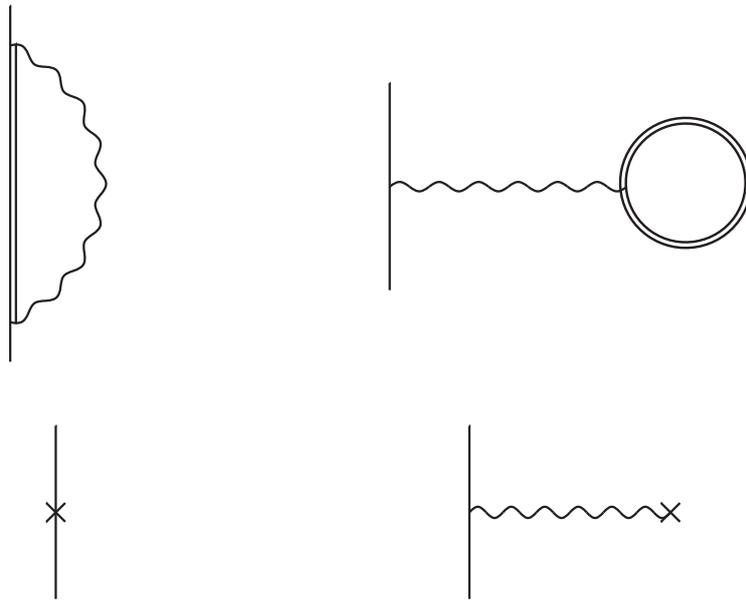


图 14.1 有外场时的电子自能函数 $\Sigma_{\mathcal{A}}^*(x, y)$ 的最低阶 Feynman 图. 这里的双线代表包含外场效应的电子传播子 $S_{\mathcal{A}}$; 单线是入电子线和出电子线; 波浪线是虚光子; 十字代表重整化抵消项.

间 Feynman 规则, 给出

$$\begin{aligned}
 i\Sigma_{\mathcal{A}}^*(x, y) &= [e\gamma^\mu] [-iS_{\mathcal{A}}(x, y)] [e\gamma_\mu] [-iD(x-y)] \\
 &- [e\gamma^\mu \delta^4(x-y)] \int d^4z [-iD(x-z)] \text{Tr} \{ [-iS_{\mathcal{A}}(z, z)] [e\gamma_\mu] \} \\
 &- i(Z_2 - 1)(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\delta^4(x-y) + i\delta m \delta^4(x-y) \\
 &+ e\gamma^\mu (Z_2 - 1)\delta^4(x-y)\mathcal{A}_\mu(x) \\
 &+ i(Z_3 - 1)[e\gamma_\mu]\delta^4(x-y) \int d^4z [-iD(x-z)] \partial_\nu (\partial^\nu \mathcal{A}^\mu(z) - \partial^\mu \mathcal{A}^\nu(z)), \quad (14.2.18)
 \end{aligned}$$

其中重整化常数 $(Z_2 - 1)$, $(Z_3 - 1)$ 和 δm 计算至 e 的 2 阶. (第二项中的负号是伴随闭合费米圈的负号.)

对于 Z_α 为一阶的强场, 必须要数值地计算构型空间电子传播子 $S_{\mathcal{A}}$ 和方程 (14.2.17) 和 (14.2.18) 中的积分.⁴ 然而, 对于弱场, 我们可以在方程 (14.2.18) 中使用级数 (14.2.1) 的前几项并以封闭的形式计算这些积分. 由于这个原因, 在动量空间下处理更加方便, 定义:

$$S_{\mathcal{A}}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4p' d^4p e^{ip'\cdot x} e^{-ip\cdot y} S_{\mathcal{A}}(p', p), \quad (14.2.19)$$

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^*(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4p' d^4p e^{ip'\cdot x} e^{-ip\cdot y} \Sigma_{\mathcal{A}}^*(p', p), \quad (14.2.20)$$

$$u_N(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u_N(\mathbf{p}), \quad (14.2.21)$$

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \int d^4q e^{iq\cdot x} \mathcal{A}^\mu(q). \quad (14.2.22)$$

(在这里, 我们不恰当地对一函数及其Fourier变换使用了同一符号, 我们会表示出变量以表明那个是那个.) 那么方程(14.2.1)和(14.2.18)就变成

$$S_{\mathcal{A}}(p', p) = \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} - ie \frac{-i\not{p}' + m}{p'^2 + m^2 - i\epsilon} \not{\mathcal{A}}(p' - p) \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + \dots, \quad (14.2.23)$$

和

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathcal{A}}^*(p', p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - i\epsilon} \gamma^\mu S_{\mathcal{A}}(p' - k, p - k) \gamma_\mu \\ &+ [-(Z_2 - 1)(i\not{p} + m) + Z_2 \delta m] \delta^4(p' - p) - ie(Z_2 - 1) \not{\mathcal{A}}(p' - p) \\ &- \frac{ie^2 \gamma^\mu}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - p')^2 - i\epsilon} \int d^4q \operatorname{Tr}\{S_{\mathcal{A}}(q, q + p' - p) \gamma_\mu\} \\ &+ \frac{ie(Z_3 - 1)}{(p - p')^2 - i\epsilon} \left[(p - p')^2 \not{\mathcal{A}}(p' - p) - (\not{p} - \not{p}') (p - p') \cdot \mathcal{A}(p' - p) \right]. \end{aligned} \quad (14.2.24)$$

因为外场是时间无关的, 所以 $S_{\mathcal{A}}(x, y)$ 和 $\Sigma_{\mathcal{A}}^*(x, y)$ 可以仅通过差 $x^0 - y^0$ 与 x^0 和 y^0 相关, 所以 $S_{\mathcal{A}}(p', p)$, $\Sigma_{\mathcal{A}}^*(p', p)$ 以及 $\mathcal{A}^\mu(p' - p)$ 必须正比于 $\delta(p'^0 - p^0)$:

$$\mathcal{A}^\mu(p' - p) = \delta(p'^0 - p^0) \mathcal{A}^\mu(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (14.2.25)$$

$$S_{\mathcal{A}}(p', p) = \delta(p'^0 - p^0) S_{\mathcal{A}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}; p^0), \quad (14.2.26)$$

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^*(p', p) = \delta(p'^0 - p^0) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}; p^0). \quad (14.2.27)$$

那么, 能量偏移就由方程(14.2.17)和(14.2.13)给定为

$$\delta E_N = - \int d^3p' \int d^3p \bar{u}_N(\mathbf{p}') \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E_N) u_N(\mathbf{p}), \quad (14.2.28)$$

其中 $\Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E_N)$ 由方程(14.2.23), (14.2.24)和(14.2.27)给出. 这是我们在下一节计算弱外场中的能量偏移时所使用的公式.

14.3 轻原子中的Lamb位移

对于一般静电场中非相对论性电子, 例如处在 $Z\alpha \ll 1$ 的轻核的Coulomb场中的电子, 我们现在来考察对其能级的辐射修正. 在这一极限下, 将Coulomb场处理为弱微扰是很自然的, 但是我们将看到这会导致红外发散, 而这些红外发散与11.3节中的红外发散是相关的. 这个红外发散实际是虚假的, 这是因为4-动量 \mathbf{p} , E_N 和 \mathbf{p}' , E'_N 不在电子质量壳上, 但它确实迫使我们小心翼翼地进行处理.

通常处理这一问题的方法是将对虚光子能量的积分分成低能区域和高能区域, 在低能区域, 我们可以非相对论地处理电子, 但是要引入外场中至所有阶的效应, 而在高能区域, 我们不得不引入相对论效应, 但是可以只引入外场中的最低阶效应. 诚然, 我们应该在这里引入虚假的光子质量 μ , 对 μ 进行选择使得它远大于电子的特征动能, 但远小于电子的特征动量. 对于Coulomb场, 这相当于要求

$$(Z\alpha)^2 m_e \ll \mu \ll Z\alpha m_e. \quad (14.3.1)$$

我们将方程(14.2.24)前两项(包括抵消项 $Z_2 - 1$ 和 $Z_2\delta m$ 的公式)中的光子传播子写成如下形式

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} = \left[\frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] + \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right]. \quad (14.3.2)$$

能量偏移对应于两个项的和,“高能”项和“低能”项:高能项的计算是通过在方程(14.2.24)的前三项中使用光子传播子(14.3.2)的第一项,再加上方程(14.2.24)中最后两项(真空极化项)的结果,其中最后两项无论怎样都不是红外发散的;而低能项的计算是在方程(14.2.24)的前三项中使用光子传播子(14.3.2)的第二项.这个处理的一个优点是,我们可以直接使用11.3节和11.4节中的相对论性计算的结果,不需要从光子质量到红外能量截断这个相当复杂的转化.当然,在末尾,我们就必须要检验,在对能量偏移的高能贡献和低能贡献中,与光子质量 μ 相关的那部分相互抵消掉了,从而使得总能量偏移是 μ -无关的.

A 高能项

因为所取的 μ 远大于原子束缚能,我们可以仅保留外场的最低阶项,在一般的时间无关外矢势 $\mathcal{A}^\mu(\mathbf{x})$ 中,原子能级在动量空间中的一圈辐射修正由方程(14.2.28)给定,其中自能插入 $\Sigma_{\mathcal{A}}(p', p)$ 由方程(14.2.24)和(14.2.23)给定.外场的零阶项抵消掉了: δm 项抵消了 $\mathcal{A} = 0$ 的第一项; $Z_3 - 1$ 项抵消了 $\mathcal{A} = 0$ 的第三项;而由于 $u(p)$ 满足Dirac方程, $Z_2 - 1$ 项为零. $\Sigma_{\mathcal{A}}(p', p)$ 中关于 \mathcal{A}^μ 的一阶项可以写成如下形式

$$\Sigma_{\mathcal{A}1}(p', p) = -ie\mathcal{A}_\mu(p' - p)\Gamma_1^\mu(p', p) \quad (14.3.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu(p', p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + \mu^2 + i\epsilon} \\ &\quad \times \gamma^\nu \left[\frac{-i(\not{p}' - \not{k}) + m_e}{(p' - k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right] \gamma^\mu \left[\frac{-i(\not{p} - \not{k}) + m_e}{(p - k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right] \gamma^\nu \\ &\quad + (Z_2 - 1)\gamma^\mu \\ &\quad - \frac{ie^2\gamma_\nu}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - p')^2 - i\epsilon} \\ &\quad \times \int d^4l \operatorname{Tr} \left\{ \left[\frac{-i\not{l} + m_e}{l^2 + m_e^2} \right] \gamma^\mu \left[\frac{-i\not{l} - i\not{p}' + i\not{p} + m_e}{(l + p' - p)^2 + m_e^2} \right] \gamma^\nu \right\} \\ &\quad - \frac{Z_3 - 1}{(p' - p)^2 - i\epsilon} \left[(p - p')^2 \eta_{\mu\nu} - (p' - p)^\mu (p' - p)^\nu \right] \gamma_\nu. \end{aligned} \quad (14.3.4)$$

比较前两项与方程(11.3.1)和(11.3.8),并比较接下来的两项与方程(11.3.9), (11.2.3)和(11.2.15),这表明 $\Gamma_1^\mu(p', p)$ 是完整的一圈顶点函数,包含了真空极化和所有抵消项,而我们已经11.3节计算过它的质量壳矩阵元.利用方程(14.2.26)和(14.2.25),这对能量偏移(14.2.28)的贡献为

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{\text{high energy}} &= ie \int d^3p' \int d^3p (\bar{u}(\mathbf{p}')\Gamma_1^\mu(\mathbf{p}', E_N, \mathbf{p}, E_N)u_N(\mathbf{p})) \\ &\quad \times \mathcal{A}_\mu(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (14.3.5)$$

(这其实可以猜出来, 将电子与外场的相互作用中的 γ^μ 替换成 Γ_1^μ 即可.) 正如我们在14.1节讨论过的, 因为 $Z\alpha \ll 1$, 我们可以近似地取方程(14.3.5)中的Dirac波函数 u_N 为

$$[u_N(\mathbf{p})]_\alpha = \sum_\sigma u_\alpha(\mathbf{p}, \sigma) [f_N(\mathbf{p})]_\sigma, \quad (14.3.6)$$

其中 f_N 是外Coulomb场中电子的非相对论两分量波函数, 而 $u(\mathbf{p}, \sigma)$ 是动量空间Dirac方程

$$[i\gamma_\mu p^\mu + m_e]u(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (14.3.7)$$

对于自旋 z -分量 σ 的归一化四分量解. 既然 $u_N(\mathbf{p})$ 近似满足自由粒子Dirac方程, 方程(10.6.15)给出了 Γ_1^μ 矩阵元的一般形式

$$\begin{aligned} & \bar{u}_M(\mathbf{p}') [\gamma^\mu + \Gamma_1^\mu(p', p)] u_N(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}_M(\mathbf{p}') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{2} i [\gamma^\mu, \gamma^\nu] q_\nu F_2(q^2) \right] u_N(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (14.3.8)$$

其中 $q = p' - p$. 波函数 $u_N(\mathbf{p})$ 在 $|\mathbf{p}| \gg Z\alpha m_e$ 时衰减得非常快, 所以我们仅需要极限 $|q^2| \ll m_e^2$ 下的 $F_1(q^2)$ 和 $F_2(q^2)$. 在这一极限下, 方程(11.3.31), (10.6.18)和(11.3.16)给出

$$F_1(q^2) \simeq 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \left(\frac{q^2}{m_e^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right], \quad (14.3.9)$$

$$F_2(q^2) \simeq \frac{e^2}{16m_e\pi^2}. \quad (14.3.10)$$

我们先来考察方程(14.3.8)中 F_1 项的贡献, 这一项到目前为止对能量偏移的贡献最大, 并且在它的计算中产生了最有趣的问题. 对于 $\mathcal{A} = 0$ 的纯静电场, 方程(14.3.5), (14.3.8)和(14.3.9)给出

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{F_1} &= -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \\ &\quad \times \int d^3 p' \int d^3 p \bar{u}_N(\mathbf{p}') \left(-ie\mathcal{A}^0(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right) \gamma^0(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 u_N(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (14.3.11)$$

为了计算这个贡献, 我们可以使用非相对论矩阵元(14.1.41)中的领头项, 并看到

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{F_1} &= -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \\ &\quad \times \int d^3 p' \int d^3 p f_N^\dagger(\mathbf{p}') e\mathcal{A}^0(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) [\mathbf{p}' - \mathbf{p}]^2 f_N(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (14.3.12)$$

或者, 在位置空间,

$$[\delta E_N]_{F_1} = \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \int d^3 x f_N^\dagger(\mathbf{x}) [e\nabla^2 \mathcal{A}^0(\mathbf{x})] f_N(\mathbf{x}). \quad (14.3.13)$$

特别地, 对于Coulomb势(14.1.2), 我们有 $e\nabla^2 \mathcal{A}^0(\mathbf{x}) = -Ze^2 \delta^3(\mathbf{x})$, 而指标 N 由主量子数 n 和角动量量子数 j, m, ℓ , 而方程(11.2.41)给出 $[f_{njm\ell}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2} \delta_{\ell,0} \delta_{\sigma,m} / \sqrt{4\pi}$. 那么能量偏移就是

$$[\delta E_N]_{F_1} = -\frac{2Z^4 \alpha^5 m_e}{3\pi n^3} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \delta_{\ell,0}. \quad (14.3.14)$$

(δE 与总角动量 z -分量无关这一点是旋转不变性所保证的.) 方程(14.3.12)和(14.3.13)中括号中的 $\frac{2}{3}$ 项产生了真空极化, 并正好产生了11.2节中试探性计算出的能量偏移.

在继续计算磁矩和能量偏移的低能贡献之前, 值得注意的是, 迄今为止我们获得的结果, 在进一步的处理之前, 关于Lamb位移产生了大量的量级估计. 我们可以预计到, 低能项会包含正比于 $\ln(\mu/B)$ 项, 该项的系数会使得这一项抵消掉方程(14.3.12)的 μ -相关性. 这里的常数 B 是为了使对数变量无量纲而必须引入的能量; 既然正是电子在原子中的束缚最终提供了红外截断, 我们可以猜测 B 为特征的原子束缚能, 阶为 $B \simeq (Z\alpha)^2 m_e$. 因此, 态 N 中主量子数为 n 且轨道角动量为 ℓ 的总能量偏移采取如下的形式

$$\delta E_N = -\frac{2Z^4 \alpha^5 m_e}{3\pi n^3} \left[\ln(Z^4 \alpha^4) \delta_{\ell,0} + O(1) \right]. \quad (14.3.15)$$

对于氢原子的 $2s$ 态, 对数项单独给出

$$\delta E_{2s} \simeq -\frac{\alpha^5 m_e}{12\pi} \ln(\alpha^4) = 5.5 \times 10^{-6} \text{ eV} = 1300 \text{ MHz} \times 2\pi\hbar.$$

我们将看到, 方程(14.3.15)中的“ $O(1)$ ”项会使总能量偏移降低大约25%.

现在我们来考察 Γ_1^{μ} 矩阵元中 F_2 项的贡献, 正如我们在10.6节中看到的那样, 这一贡献可以解释为对电子磁矩的辐射修正. 在方程(14.3.5)中使用方程(14.3.10), (14.3.8)和(14.3.6), 我们看到这一项给出的能量偏移为

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{F_2} = & -\frac{e^2}{32\pi^2 m_e} \int d^3 p' \int d^3 p (\bar{u}_N(\mathbf{p}') [\gamma^\mu, \gamma^\nu] u_N(\mathbf{p})) \\ & \times e \mathcal{A}_\mu(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) (p' - p)_\nu \end{aligned} \quad (14.3.16)$$

或者, 在位置空间,

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{ie^2}{64\pi^2 m_e} \int d^3 x (\bar{u}_N(\mathbf{x}) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] u_N(\mathbf{x})) e \mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \quad (14.3.17)$$

其中

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(\mathbf{x}) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(\mathbf{x}). \quad (14.3.18)$$

对于 $\mathcal{A} = 0$ 的纯静电场, 这是

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{-ie^2}{32\pi^2 m_e} \int d^3 x (\bar{u}_N(\mathbf{x}) [\gamma, \gamma^0] u_N(\mathbf{x})) \cdot \nabla [e \mathcal{A}^0(\mathbf{x})]. \quad (14.3.19)$$

在非相对论极限 $Z\alpha \ll 1$ 下, 我们可以使用近似结果(14.1.43), 这个结果在这里是

$$\begin{aligned} (\bar{u}_N [\gamma^0, \gamma] u_N) & \simeq \frac{i}{m_e} [(\nabla f_N^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_N^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)] \\ & = \frac{i}{m_e} [\nabla (f_N^\dagger f_N) - i(\nabla f_N^\dagger \times \boldsymbol{\sigma}) f_N - i f_N^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla f_N)]. \end{aligned} \quad (14.3.20)$$

在方程(14.3.8)使用上式并分部积分, 这部分的能量偏移是

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{F_2} = & \frac{e^2}{32\pi^2 m_e^2} \int d^3 x \left[-|f_N(\mathbf{x})|^2 \nabla^2 (e \mathcal{A}^0(\mathbf{x})) \right. \\ & \left. + 2i f_N^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla (e \mathcal{A}^0(\mathbf{x})) \times \nabla f_N(\mathbf{x})) \right]. \end{aligned} \quad (14.3.21)$$

结合方程(14.3.12)和(14.3.21), 这给出了, 在任意的经典势 \mathcal{A}^0 中, 对能量偏移的所有高能贡献:

$$[\delta E_N]_{\text{high energy}} = \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} \right] \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) [e\nabla^2 \mathcal{A}^0(\mathbf{x})] f_N(\mathbf{x}) \\ + \frac{ie^2}{16\pi^2 m_e^2} \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})) \times \nabla f_N(\mathbf{x})) . \quad (14.3.22)$$

B 低能项

对能量的偏移的低能贡献是对光子传播子做替换

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} , \quad (14.3.23)$$

然后从方程(14.2.24)的前三项中获得的. 这一替换最终用于在 μ 阶值处截断对光子4-动量 k 的分量的积分, 然而, 直到我们仔细地将质量重整化考虑在内, 我们才会看到这一点, 所以我们将任何非相对论近似推迟至那之后. 另外, 我们现在引入的光子动量同原子态的束缚能一样小, 或者比原子态的束缚能还要小, 所以我们必须要在所有阶处理产生这一束缚的静电力.

取代用动量空间公式(14.2.24)处理, 回归使用构型空间公式(14.2.18)会更方便一些. 这一公式给出的电子自能函数的低能贡献是

$$[\Sigma_{\mathcal{A}}^*(x, y)]_{\text{low energy}} = ie^2 \gamma^\rho S_{\mathcal{A}}(x, y) \gamma_\rho D(x - y; \mu) + \delta m_e(\mu) \delta^4(x - y) \\ - (Z_2(\mu) - 1)(\gamma^\mu [\partial_\mu + ie\mathcal{A}_\mu] + m_e) \delta^4(x - y) , \quad (14.3.24)$$

其中 $D(x - y; \mu)$ 是修正光子传播子

$$D(x - y; \mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik \cdot (x-y)} \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] , \quad (14.3.25)$$

并且, 抵消项 $Z_2(\mu) - 1$ 和 $\delta m(\mu)$ 是用该修正传播子进行计算的. 从时间变量转化到能量变量, 那么, 对函数(14.2.13)的低能贡献是

$$[\Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)]_{\text{low energy}} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\rho S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E - k^0) \gamma_\rho \\ \times \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ - (Z_2(\mu) - 1) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + i\gamma^0 E + ie\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathcal{A} + m_e) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ + \delta m_e(\mu) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (14.3.26)$$

那么, 方程(14.2.17)就给出了能量偏移的低能贡献

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = - \int d^3x \int d^3y \bar{u}_N(\mathbf{x}) [\Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N)]_{\text{low energy}} u_N(\mathbf{y}) \\ = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^3x \int d^3y \bar{u}_N(\mathbf{x}) \gamma^\rho S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N - k^0) \gamma_\rho u_N(\mathbf{y}) \\ \times \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ - \delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}) . \quad (14.3.27)$$

注意到, 由于Dirac波函数 $u_N(\mathbf{x})$ 满足Dirac方程(14.1.10), 正比于 $Z_2(\mu) - 1$ 的项被扔掉了. 对于有Coulomb场的电子传播子, 我们使用方程(14.2.15):

$$S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_M \frac{u_M(\mathbf{x})\bar{u}_M(\mathbf{y})}{E_M - E - i\epsilon} - \sum_M \frac{v_M(\mathbf{x})\bar{v}_M(\mathbf{y})}{E_M + E - i\epsilon},$$

其中第一项和第二项中的求和分别取遍单电子态和单正电子态. 积掉 k^0 积分的最简单方法是, 用一个大半圆, 对于第一项在下半平面闭合围道, 对于第二项在上半平面闭合围道:

$$\begin{aligned} & \int dk^0 \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right) \left(\frac{1}{E_M \mp E_N \pm k^0 - i\epsilon} \right) \\ &= \frac{i\pi}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \left(\frac{1}{E_M \mp E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon} \right), \end{aligned}$$

如果 μ 被换成了0, 处理方法相同. 能量偏移(14.3.27)现在变成

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{\text{low energy}} &= -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \\ &\times \left[\Gamma_{MN}^\rho(\mathbf{k})^* \Gamma_{\rho MN}(\mathbf{k}) \left(\frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\Gamma}_{MN}^\rho(\mathbf{k})^* \tilde{\Gamma}_{\rho MN}(\mathbf{k}) \left(\frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M + E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right] \\ &- \delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (14.3.28)$$

其中

$$\Gamma_{MN}^\rho(\mathbf{k}) \equiv \int d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \bar{u}_M(\mathbf{y}) \gamma^\rho u_N(\mathbf{y}), \quad (14.3.29)$$

$$\tilde{\Gamma}_{MN}^\rho(\mathbf{k}) \equiv \int d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \bar{v}_M(\mathbf{y}) \gamma^\rho u_N(\mathbf{y}). \quad (14.3.30)$$

(当然, 方程(14.3.28)中对 M 的“求和”仅得到第一项中的电子态贡献和第二项中的正电子态贡献.) 方程(14.3.28)可以从旧形式微扰论中更直接地导出; 能量分母 $E_M - E_N + \omega$ 和 $E_M + E_N + \omega$ 是从中间态的能量中减去初态的能量 E_N 后的结果, 对于前者, 中间态由能量为 E_M 电子和能量为 ω 的光子构成, 对于后者, 中间态由能量为 E_M 的电子, 能量为 ω 的光子, 以及初末态电子构成. (参看图14.2.)

在对方程(14.3.28)做任何近似之前, 将矩阵元 Γ_{MN}^ρ 和 $\tilde{\Gamma}_{MN}^\rho$ 的时间分量表示成相对应的空间分

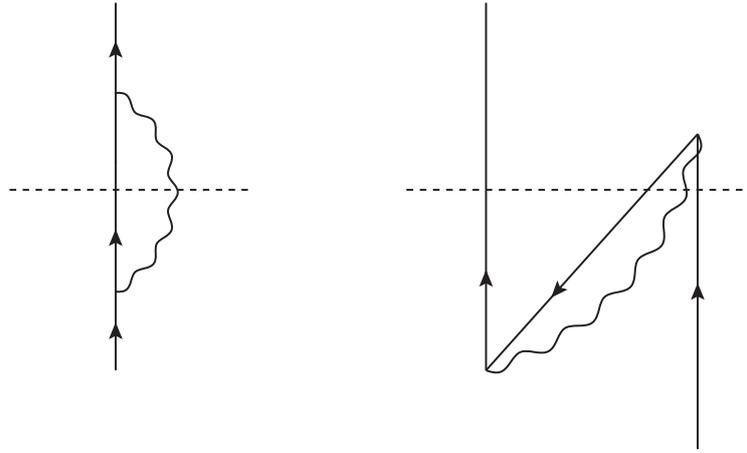


图 14.2 电子能量偏移低能部分的旧形式微扰论图. 这里实线是电子; 波浪线是光子, 虚线截断粒子线的地方对应于出现在(14.3.28)前两项中的中间态.

量的形式将是方便的, 利用从电流守恒中导出的关系*:

$$k_i \Gamma_{MN}^i(\mathbf{k}) = (E_N - E_M) \Gamma_{MN}^0(\mathbf{k}), \quad (14.3.31)$$

$$k_i \tilde{\Gamma}_{MN}^i(\mathbf{k}) = (E_N + E_M) \tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k}). \quad (14.3.32)$$

更进一步, 通过使用完备性关系(14.1.8), 可以直接证明:

$$\sum_M \left[|\Gamma_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 + |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \right] = 1 \quad (14.3.33)$$

和

$$\begin{aligned} & \sum_M \left[|\Gamma_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 (E_M - E_N) - |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 (E_M + E_N) \right] \\ &= \sum_M \left[-\Gamma_{MN}^0(\mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k}) - \tilde{\Gamma}_{MN}^{0*}(\mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k}) \right] \\ &= -i \mathbf{k} \cdot \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} u_N(\mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \quad (14.3.34)$$

*为了导出方程(14.3.31), 注意到

$$\begin{aligned} k_i \Gamma_{MN}^i(\mathbf{k}) &= -i \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \nabla \cdot (\bar{u}_M(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} u_N(\mathbf{x})) \\ &= i \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \partial_0 \left[(\bar{u}_M(\mathbf{x}) \gamma^0 u_N(\mathbf{x})) e^{-i(E_N - E_M)x^0} \right]_{x^0=0} = (E_N - E_M) \Gamma_{MN}^0(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

方程(14.3.32)以相同的方式导出.

最后一步是从宇称条件(14.1.23)得到的. 以这一方式, 方程(14.3.28)可以重写成

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{low energy}} = & \\
& - \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[\frac{(|\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/k^2)}{|\mathbf{k}| (E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(|\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(k^2 + \mu^2))}{\sqrt{k^2 + \mu^2} (E_M - E_N + \sqrt{k^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] \\
& + \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[\frac{(|\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2/k^2)}{|\mathbf{k}| (E_M + E_N + |\mathbf{k}|)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(|\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(k^2 + \mu^2))}{\sqrt{k^2 + \mu^2} (E_M + E_N + \sqrt{k^2 + \mu^2})} \right] \\
& - \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M |\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + \mu^2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \alpha \mu - \delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}), \tag{14.3.35}
\end{aligned}$$

在倒数第二项中, 我们使用了基础积分

$$\int d^3k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + \mu^2} \right) = 2\mu\pi^2.$$

迄今为止, 这只是方程(14.3.28)精确改写. 我们现在必须启用几个近似. 首先, 考察质量重整化. 在11.4节中, 我们已经计算了到 α 阶的 $\delta m_e(\mu)$; 其是

$$\delta m_e(\mu) = \frac{2m_e\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [1+x] \ln \left(\frac{m_e^2 x^2 + \mu^2(1-x)}{m_e^2 x^2} \right). \tag{14.3.36}$$

尽管在11.4节中我们认为 μ 是正规化质量, 所取的 μ 远大于 m_e , 我们也可使用方程(14.3.36), 在这里我们所感兴趣的情况下, 即 $\mu \ll m_e$, 提供 $\delta m_e(\mu)$ 的值. 在这一极限下, 方程(14.3.36)给出

$$\delta m_e(\mu) \rightarrow \frac{\alpha\mu}{2} \left[1 - \frac{3\mu}{2\pi m_e} + \dots \right]. \tag{14.3.37}$$

我们又回想起, 对于 $Z\alpha \ll 1$, $u_N(\mathbf{x})$ 由方程(14.1.37)给定为

$$u_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{l} (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}/2 + \dots) f_N(\mathbf{x}) \\ (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}/2 + \dots) f_N(\mathbf{x}) \end{array} \right]. \tag{14.3.38}$$

其中省略号代表 $Z\alpha$ 的高阶项; \mathbf{v} 是非相对论速度算符 $-i\nabla/m_e$; 而 $f_N(\mathbf{x})$ 非相对论Schrödinger方程的两分量旋量解, 根据方程(14.1.38)归一化, 使得

$$\int d^3x |f_N(\mathbf{x})|^2 = 1 - \frac{1}{4}(\mathbf{v}^2)_{NN} + \dots \tag{14.3.39}$$

这给出了方程(14.3.35)中 $\delta m_e(\mu)$ 的系数

$$\int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{2}(\mathbf{v}^2)_{NN} + \dots \quad (14.3.40)$$

我们立刻注意到, $-\delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N u_N$ 中的领头项抵消了方程(14.3.35)中的 $\alpha\mu/2$ 项. 诚然, 我们可以预估出这个抵消, 这是因为在极限 $Z\alpha \rightarrow 0$ 下, 方程(14.3.35)中的 $\alpha\mu/2$ 项依旧存在, 并且 $m_e(\mu)$ 作为重整化电子质量的定义, 暗示了在这一极限不存在能量偏移. 通过相同的讨论, 我们可以预估出 $\delta m_e(\mu)$ 中的 $\alpha\mu^2/m_e$ 阶项(这一项大于 $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$ 阶项, 因而无法简单地忽略掉)抵消了方程(14.3.35)中同阶的第二项和第三项.** 另一方面, δm_e 中 $\alpha\mu^2/m_e$ 阶项与矩阵元(14.3.40)中第二项的乘积, 它的阶是 $(Z\alpha)^2 \alpha\mu^2/m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4 m_e$, 因而可以被忽略掉. 到 $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$ 阶, 质量重整化留给我们的效应只剩下, $\delta m_e(\mu)$ 中的领头项与 $\int d^3x \bar{u}_N u_N$ 中的 $(Z\alpha)^2$ 阶项之积:

$$-\left[\frac{e^2\mu}{8\pi}\right] \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v}^2)_{NN}\right] = \frac{e^2\mu}{16\pi}(\mathbf{v}^2)_{NN}.$$

(这是质量重整化在电子动能上的效应, 在1.3节提到过.) 如果我们忽视掉能级之间的差异, 这正是方程(14.3.35)中第一项的负数. 为了看到这一点, 注意到这一项中的积分实际上在 $|\mathbf{k}| \sim \mu \ll Z\alpha m_e$ 处被截断了, 所以我们可以取极限 $\mathbf{k} \rightarrow 0$ 下计算矩阵元 $\Gamma_{MN}(\mathbf{k})$. 到 $Z\alpha$ 的最低阶, 方程(14.1.42)给出

$$\Gamma_{MN}(0) = (\mathbf{v})_{MN}, \quad (14.3.41)$$

然后使用非相对论Schrödinger方程解 f_N 的完备性, 我们有

$$\sum_M \Gamma_{MN}^{i*}(\mathbf{k}) \Gamma_{MN}^j(\mathbf{k}) \simeq (v^i v^j)_{NN}, \quad (14.3.42)$$

**这个抵消的证明如下. 我们预估方程(14.3.35)中的第二项和第三项足够小, 所以它们可以使用 $u_N(\mathbf{x})$ 所满足的Dirac方程的极端非相对论近似 $\beta u_N(\mathbf{x}) = u_N(\mathbf{x})$. 另一方面, 尽管位置波函数 $v_M(\mathbf{x})$ 中的Coulomb力可以被忽略掉, 第三项中对 M 的求和得到了来自相对论性正电子的重要贡献, 所以我们可以使用近似 $v_{\mathbf{p},\sigma}(\mathbf{x}) \simeq (2\pi)^{-3/2} v(\mathbf{p},\sigma) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$, 其中 $v(\mathbf{p},\sigma)$ 是5.5节中引入的正电子旋量, 对其归一化, 使得 $\bar{v}(\mathbf{p}',\sigma) v(\mathbf{p},\sigma) = \delta_{\sigma',\sigma}$. 因此, 在方程(14.3.35)的第二项和第三项中, 对 M 的求和近似地给定为

$$\frac{1}{2} \left[\sum_M \tilde{\Gamma}_{MN}^{i*}(\mathbf{k}) \tilde{\Gamma}_{MN}^j(\mathbf{k}) + (i \leftrightarrow j) \right] \simeq \delta_{ij} \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} + m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right),$$

$$\sum_M |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \simeq \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} - m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right).$$

那么, 到 μ/m_e 的领头阶, 方程(14.3.35)中的第二项和第三项分别是,

$$\frac{e^2}{4m_e(2\pi)^3} \int d^3k \left[\frac{2}{k} - \frac{(3 - k^2/(k^2 + \mu^2))}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \right] \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} + m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right) \simeq \frac{\alpha\mu^2}{4\pi m_e}$$

和

$$-\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right) \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} - m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right) \simeq -\frac{\alpha\mu^2}{\pi m_e}.$$

(方程(14.3.32)排除了对后一表达式的相对论修正没有被因子 \mathbf{k}^2/m_e 抑制的可能性, 这一因子在 $|\mathbf{k}|^2 \ll m_e^2$ 时会出现在该表达式中.) 这两项被 $-\delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x})$ 中的 $+3\alpha\mu^2/4\pi m_e$ 抵消掉了. 最后, 我们注意到, 对于对正电子态求和的估计, 它的相对论修正将会包含额外的因子 $v^2/c^2 \approx (Z\alpha)^2$, 这产生了阶为 $\alpha(Z\alpha)^2 \mu^2/m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4 m_e$ 的贡献, 这证明了这里所使用的非相对论近似是合理的.

所以, 到这一阶

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[\frac{\left(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / \mathbf{k}^2 \right)}{\mathbf{k}^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / (\mathbf{k}^2 + \mu^2) \right)}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right] \\
& \simeq -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} (\mathbf{v}^2)_{NN} \int d^3k \left[\frac{2}{3\mathbf{k}^2} - \frac{1 - \mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2 + \mu^2)}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right] \\
& = -\frac{e^2 \mu}{16\pi} (\mathbf{v}^2)_{NN}.
\end{aligned}$$

因此, 在质量重整化之后, 我们就剩下了方程(14.3.35)中的第一项, 而与能量差 $E_N - E_M$ 相差不大的项被扔掉了:

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{low energy}} &= \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M (E_M - E_N) \\
& \quad \times \left[\frac{\left(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / \mathbf{k}^2 \right)}{\mathbf{k}^2 (E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / (\mathbf{k}^2 + \mu^2) \right)}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2) (E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right]. \quad (14.3.43)
\end{aligned}$$

再一次使用方程(14.3.41), 这是

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{low energy}} &= \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \\
& \quad \times \int d^3k \left[\frac{2}{3\mathbf{k}^2 (E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1 - \mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2 + \mu^2)}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2) (E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right]. \quad (14.3.44)
\end{aligned}$$

尽管电子动量的特征值远大于原子能量差的特征值, 但它不是积分中 $|\mathbf{k}|$ 的真正特征值, 这是因为, 如果我们不保留分母中的 $E_M - E_N$ 项, 这一积分会红外发散. 在极限 $\mu \gg |E_M - E_N| \sim (Z\alpha)^2 m_e$ 下, 通过将方程(14.3.44)中积分的积分区域分为两段, 一段从 0 到 λ , 另一端从 λ 到无穷, 可以把这个积分算出来, 其中 λ 的选择使得 $|E_M - E_N| \ll \lambda \ll \mu$, 但其它方面任意. 以这种方式, 我们发现

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty k^2 dk \left[\frac{2}{3k^2 (E_M - E_N + k - i\epsilon)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1 - k^2/3(k^2 + \mu^2)}{(k^2 + \mu^2) (E_M - E_N + \sqrt{k^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] \\
& \simeq \frac{2}{3} \left[\ln \left(\frac{\mu}{2|E_M - E_N|} \right) + \frac{5}{6} + i\pi\theta(E_N - E_M) \right].
\end{aligned}$$

这里的虚部反应了原子从态 N 衰变到能量更低的态 M 的可能性. 这一项的贡献是给由能量偏移虚部给定的衰变速率. 我们在这里感兴趣的是能量偏移的实部, 因而会在下文中扔掉这个虚项. 方

程(14.3.44)现在给出

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \frac{e^2}{6\pi^2} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln \left(\frac{\mu}{2|E_M - E_N|} \right) + \frac{5}{6} \right]. \quad (14.3.45)$$

C. 总能量偏移

我们需要在方程(14.3.45)中的求和与高能项(14.3.22)中的矩阵元之间做一个连接. 由于这个目的, 我们先来看看, 如果我们忽视掉方程(14.3.45)中的对数, 方程(14.3.45)中的求和将会给出什么值. 我们注意到 $(E_M - E_N)\mathbf{v}_{NM} = [\mathbf{v}, H]_{NM}$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_M \left([v^i, H]_{NM} v_{MN}^i + v_{NM}^i [H, v_i]_{MN} \right) \\ &= -\frac{1}{2m_e^2} \left([p^i, [p^i, H]] \right)_{NN}. \end{aligned}$$

非相对论哈密顿量 H 中唯一一个不与动量算符 \mathbf{p} 对易的项是势能项 $-e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})$, 所以这给出

$$\sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 = -\frac{e}{2m_e^2} \left(\nabla^2 \mathcal{A}^0(\mathbf{x}) \right)_{NN}. \quad (14.3.46)$$

检查方程(14.3.45)和(14.3.22), 现在它们证明了, 高能项中成正比于 $\ln \mu$ 的项被低能项中成正比于 $\ln \mu$ 的项抵消了:

$$\begin{aligned} \delta E_N &= [\delta E_N]_{\text{high energy}} + [\delta E_N]_{\text{low energy}} \\ &= \frac{e^2}{6\pi^2} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln \left(\frac{m_e}{2|E_N - E_M|} \right) + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{16\pi^2 m_e^2} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla (e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})) \times \mathbf{p} \right)_{NN}. \end{aligned} \quad (14.3.47)$$

迄今为止, 我们所处理的是一般静电场 $\mathcal{A}^0(\mathbf{x})$. 我们现在专门来处理纯Coulomb场, 其中

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{x}) = Ze/|\mathbf{x}|. \quad (14.3.48)$$

在这一情况下, 方程(14.3.46)变成

$$\sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 = \frac{Ze^2}{2m_e^2} \left(\delta^3(\mathbf{x}) \right)_{NN} = \frac{Ze^2}{2m_e^2} \left(f_N^\dagger(0) f_N(0) \right). \quad (14.3.49)$$

这仅对于 $\ell = 0$ 才是非零的. 另外, 方程(14.3.47)中后一项中的矩阵元有值

$$\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla (e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})) \times \mathbf{p} \right)_{NN} = -Ze \left(\frac{1}{r^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \right)_{NN}, \quad (14.3.50)$$

这个矩阵元仅当 $\ell \neq 0$ 才是非零. 因此, 现在分别考察两种情况, $\ell = 0$ 和 $\ell \neq 0$, 是有用的.

i. $\ell = 0$

在这里定义平均激发能量 ΔE_N 将是方便的:

$$\begin{aligned} \sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \ln |E_N - E_M| &\equiv \ln \Delta E_N \sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \\ &= \frac{Ze^2}{2m_e^2} \ln \Delta E_N \left(f_N^\dagger(0) f_N(0) \right). \end{aligned} \quad (14.3.51)$$

对于氢原子的 s -波态, 指标 N 由主量子数 n 和自旋 z -分量 m 构成, 而 $[f_{nm}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2} \delta_{\sigma,m} / \sqrt{4\pi}$, 所以

$$\left(f_N^\dagger(0)f_N(0)\right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z\alpha m_e}{n}\right)^3. \quad (14.3.52)$$

在方程(14.3.47)中使用方程(14.3.51)和(14.3.52)给出了这些态中的能量偏移

$$[\delta E]_{n,\ell=0} = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3} \left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{n,\ell=0}}\right) + \frac{19}{30} \right]. \quad (14.3.53)$$

ii. $\ell \neq 0$

对于不为零的轨道角动量, 求和(14.3.49)为零, 所以定义(14.3.51)是不合适的. 诚然, 在这里将平均激发能量 ΔE_N 定义为

$$\sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \ln |E_N - E_M| \equiv \frac{2(Z\alpha)^4 m_e}{n^3} \ln\left(\frac{2\Delta E_N}{Z^2 \alpha^2 m_e}\right). \quad (14.3.54)$$

(由于方程(14.3.49)为零, 这使得用来测量方程(14.3.54)中的 $E_N - E_M$ 的单位无关紧要.) 另外, 在总角动量为 j 而轨道角动量为 ℓ 的态中, 标量积 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}$ 有熟悉的值 $j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}$, 并且对于主量子数 n , 算符 $1/r^3$ 有期望值

$$\int d^3r |f_N|^2 / r^3 = \frac{2Z^3 \alpha^3 m_e^3}{n^3 \ell(\ell+1)(2\ell+1)}. \quad (14.3.55)$$

将所有这一切代入方程(14.3.47), 对于 $\ell \neq 0$, 我们有:

$$\begin{aligned} [\delta E]_{jn\ell} &= -\frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3} \ln\left(\frac{2\Delta E_{jn\ell}}{Z^2 \alpha^2 m_e}\right) \\ &+ \frac{\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{2\pi n^3} \left[\frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}}{\ell(\ell+1)(2\ell+1)} \right]. \end{aligned} \quad (14.3.56)$$

这些结果留待使用以给出能量偏移的数值值. 这里的平均激发能量必须数值地进行计算; 利用非相对论氢原子波函数, 它们有值:⁵

$$\Delta E_{1s} = 19.769266917(6) \text{ Ry},$$

$$\Delta E_{2s} = 16.63934203(1) \text{ Ry},$$

$$\Delta E_{2p} = 0.9704293186(3) \text{ Ry},$$

其中 $1 \text{ Ry} \equiv m_e \alpha^2 / 2 = 13.6057 \text{ eV}$. 那么方程(14.3.53)给出

$$\begin{aligned} [\delta E]_{1s} &= \frac{4\alpha^5 m_e}{3\pi} \left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{1s}}\right) + \frac{19}{30} \right] = 3.3612 \times 10^{-6} \text{ eV} \\ &= 2\pi\hbar \times 8127.4 \text{ MHz}, \end{aligned} \quad (14.3.57)$$

$$\begin{aligned} [\delta E]_{2s} &= \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi} \left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2s}}\right) + \frac{19}{30} \right] = 4.2982 \times 10^{-5} \text{ eV} \\ &= 2\pi\hbar \times 1039.31 \text{ MHz}, \end{aligned} \quad (14.3.58)$$

而方程(14.3.56)给出

$$\begin{aligned} [\delta E]_{2p_{1/2}} &= \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi} \left[\ln \left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2p}} \right) - \frac{1}{8} \right] = -5.3267 \times 10^{-8} \text{ eV} \\ &= 2\pi\hbar \times -12.88 \text{ MHz} . \end{aligned} \quad (14.3.59)$$

经典地Lamb位移是氢原子 $2s$ 态和 $2p_{1/2}$ 态之间的能量差, 这些态在没有辐射修正时是简并的. 我们的计算给出了

$$[\delta E]_{2s} - [\delta E]_{2p_{1/2}} = 4.35152 \times 10^{-6} \text{ eV} = 2\pi\hbar \times 1052.19 \text{ MHz} .$$

这与Kroll和Lamb⁶以及French和Weisskopf⁷的旧结果是相同的, 他们的结果是通过旧形式微扰论的技巧获得的. 在本节开头, 我们通过仅考虑 $2s$ 能量偏移的高能贡献给出了1300 MHz的粗略估计, 其中的红外截断预估为 $\alpha^2 m_e = 2 \text{ Ry}$ 阶的. 我们现在可以看到这个估计过高了, 这个过高的估计大部分来源于有限红外截断的真实值 $\Delta E_{2s} = 16.64 \text{ Ry}$ 远大于我们所估计的. 另一方面, 正如1.3节中所描述的, 在1947年, Hans Bethe能够对Lamb位移做相当好的估计, 1040 MHz, 这个估计是仅考察对 $2s$ 态的低能贡献获得的, 其中的紫外截断猜测为 m_e . (Bethe对激发能做了第一个估计, $\Delta E_{2s} \simeq 17.8 \text{ Ry}$.)

这里所描述的Lamb位移的计算, 可以通过将高阶辐射修正以及核尺寸和核收缩的效应考虑在内进行进一步的改善. 目前, 最大的不确定性来源于质子荷半径方均根 r_p 的准确值. 对于 $r_p = 0.862 \times 10^{-13} \text{ cm}$ 或 $r_p = 0.805 \times 10^{-13} \text{ cm}$, 一个计算⁹给出的Lamb位移为1057.87 MHz或1057.85 MHz, 而另一个计算¹⁰给出的是1057.883 MHz或1057.865 MHz. 给定质子半径中的不确定性, 理论结果与目前的实验值1057.845(9) MHz¹¹是高度一致的. 这个实验的精度主要被氢原子 $2p$ 态约为100 MHz的自然展宽所限制, 所以在这里进一步的提高将是非常困难的.

最近几年, 关于 $1s$ 态本身的能量偏移的测量有一个重大的进展, 直接比较 $1s$ - $2s$ 共振的频率与 $2s$ - $4s$ 和 $2s$ - $4d$ 双光子共振频率的4倍. 这些 s 态和 d 态要比 $2p$ 态窄的多, 所以这些频率的差可以比经典的Lamb位移更准确地测出来. 理论和实验之间在短时间内曾经出现过矛盾. 计算^{12, 13}表明, 对于 $r_p = 0.862(11) \times 10^{-13} \text{ cm}$ 或 $r_p = 0.805(11) \times 10^{-13} \text{ cm}$ 的质子半径, 将质子尺寸和其它修正考虑在内使得理论上的 $1s$ 能量从之前的8127.4 MHz分别提高到8173.12(6) MHz或8172.94(9) MHz. 对于质子半径 $r_p = 0.862(11) \times 10^{-13} \text{ cm}$ 的结果, 我们认为更可靠些, 但与测量值8172.86(5) MHz不是非常一致. 然而, 在之后一个的计算中, 采用了该质子半径并包含了 $\alpha^2(Z\alpha)^5$ 阶的项, 而这个计算所给出的 $1s$, $2s$ 和 $4s$ 态的能量偏移与实验一致. 所以, 显然量子电动力学又一次胜利了.

参考文献

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A117**, 610 (1928).
- [2] 参看, A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957); M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957).
- [3] 参看, L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, (McGraw-Hill, New York, 1949): Section 43. 原始文献是C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A118**, 654 (1928); *ibid.*, **A120**, 621 (1928); W. Gordon, *Zeit. f. Phys.* **48**, 11 (1928).

-
- [4] G. E. Brown, J. S. Langer, and G. W. Schaefer, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A251**, 92 (1959); G. E. Brown and D. F. Mayers, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A251**, 105 (1959); A. M. Desiderio and W. R. Johnson, *Phys. Rev.* **A3**, 1267 (1971).
- [5] R. W. Huff, *Phys. Rev.* **186**, 1367 (1969).
- [6] N. M. Kroll and W. E. Lamb, *Phys. Rev.* **75**, 388 (1949).
- [7] J. B. French and V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **75**, 1240 (1949).
- [8] H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947).
- [9] J. R. Sapirstein and D. R. Yennie, in *Quantum Electrodynamics*, T. Kinoshita 编辑 (World Scientific, Singapore, 1990): P. 575, 以及那里所引用的文献.
- [10] H. Grotch, *Foundations of Physics* **24**, 249 (1994).
- [11] S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 232 (1981); S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Metrologia* **22**, 9 (1986). 综述可参看, F. M. Pipkin, in *Quantum Electrodynamics*, T. Kinoshita 编辑 (World Scientific, Singapore, 1990): p. 697.
- [12] M. Weitz, A. Huber, F. Schmidt-Kaler, D. Leibfried, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 328 (1994).
- [13] M. Weitz, F. Schmidt-Kaler, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1120 (1992), 以及参考文献 12.
- [14] K. Pachucki, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3154 (1994).